

AdS 空間中の極小曲面とグルーオン散乱振幅

Minimal surfaces in AdS space and gluon scattering amplitudes

筑波大学数理物質系物理学域

佐藤 勇二

Institute of Physics, University of Tsukuba
Yuji Satoh

概要

負の定曲率を持つ Lorentz 時空である反 de Sitter 空間中の光的多角形を境界とする極小曲面は、弦理論のゲージ/重力双対性により、強結合超対称ゲージ理論におけるゲージ粒子（グルーオン）の散乱振幅を与える。このような特別な境界を持つ極小曲面の構成は一般には困難であるが、散乱振幅の評価に必要な曲面の面積は 2 次元可積分系を用いて解析することが可能となる。本講演では、このような、4 次元ゲージ理論、10 次元弦理論、2 次元可積分系の間の不思議なつながりを紹介する。また、超対称ゲージ理論の背後に現れる可積分模型を用いて、或る運動量配位周りで強結合散乱振幅の解析的な展開式を導く。

1 はじめに

重力の量子論を含む素粒子の統一理論の有力な候補として、微小な弦を基本構成要素とする弦理論がある。この弦理論の近年の研究において、負の定曲率を持つローレンツ時空である反 de Sitter (anti-de Sitter; AdS) 空間中の極小曲面が重要な役割を果たしている。本講演では、その具体例となる、AdS 空間中の極小曲面を用いた強結合ゲージ理論の散乱振幅の解析を紹介する。まず、物理を専門としない方々への導入として物理側の動機を説明したい。

1.1 弦理論とゲージ/重力双対性・AdS/CFT 対応

自然界には、重力、電磁気力、弱い力、強い力の4つの基本的な力（相互作用）がある。重力を除いた3つの力は、特殊相対論と量子力学に基づく素粒子の標準模型で記述される。一般に物理の理論はその系を記述する作用（action）によって与えられるが、標準模型の作用はゲージ変換と呼ばれる局所的な $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ 変換の下で不変である。力を媒介する粒子は、このゲージ群に対応する代数に値を取る量子場（ゲージ場）で記述される。電磁気力と弱い力は $SU(2) \times U(1)$ 部分に相当して統一的に扱われ、力を媒介する粒子はそれぞれ光子、 Z -, W -ボソンと呼ばれる。強い力は $SU(3)$ 部分に相当し、対応する粒子はグルーオンと呼ばれる。重力は古典的には一般相対論で記述されるが、量子力学と統合された量子重力の理論はまだ与えられていない。

電磁気力と弱い力が統一的に理解されたように、強い力、さらには、重力をも含む自然界の相互作用の統一的な理論を構築することは物理学の大きな目標の一つとなっている。この素粒子の統一理論の有力な候補の一つに弦理論がある。弦理論では、自然界の基本構成要素は大きさを持たない点粒子ではなく、微小な大きさを持った弦（ひも）となる。さらに弦理論は、主に物質場に対応するフェルミ粒子と主に力を媒介するゲージ場に対応するボーズ粒子を入れ替える超対称性（supersymmetry）を持っている。このため超弦理論と呼ばれることもある。

この弦理論の近年の主要な研究テーマに、ゲージ場の理論（ゲージ理論）と重力の理論が実は同じ理論の異なった切り口に過ぎないという「ゲージ/重力双対性」がある。特に、5次元反 de Sitter 空間と5次元球面の直積空間（ $AdS_5 \times S^5$ ）中の弦理論と4次元平坦（Minkowski）時空中の極大超対称（ $\mathcal{N} = 4$ ） $SU(N_c)$ ゲージ理論の双対性は最もよく研究され、証明はされていないものの双対性に関する多くの証拠が見つかった。この $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論はスケール変換を一般化した共形不変性を持つ共形場理論（conformal field theory; CFT）であるため、この双対性は AdS/CFT 対応と呼ばれる [1]。AdS/CFT 対応の総説としては、例えば、[2, 3] がある。

AdS/CFT 対応では通常、ゲージ群 $SU(N_c)$ の階数（カラー数） N_c が大きく、ゲージ相互作用の大きさを表す結合定数 g_{YM} との組み合わせで与えられる 't Hooft 結合

$$\lambda := g_{YM}^2 N_c \quad (1.1)$$

が固定された場合、即ち、

$$N_c \gg 1, \quad \lambda: \text{固定} \quad (1.2)$$

の場合を考える。弦理論側では、't Hooft 結合は AdS_5 あるいは S^5 の半径 R と弦理論

の基本的なスケールを与える定数 α' を用いて

$$\lambda = R^4/\alpha'^2 \quad (1.3)$$

と与えられる。この 't Hooft 結合が小さい時には、ゲージ理論側の摂動論的な記述がよいが、弦／重力理論側は相互作用が大きい強結合理論となり解析が困難となる。逆に 't Hooft 結合が大きい時には、弦／重力理論側が弱結合となり古典的な弦／重力理論としての解析が可能となるが、ゲージ理論側は解析が難しい強結合理論となる。この意味で、この対応は強／弱結合双対の関係にある。模式的にこの関係を表すと次のようになる：

$\text{AdS}_5 \times S^5 \text{ 中の弦理論}$ $\lambda = R^4/\alpha'^2 \gg 1$	双対 $\longleftrightarrow$ 強／弱結合	4次元 $\mathcal{N} = 4$ $\text{SU}(N_c)$ 超対称ゲージ理論 $\lambda = g_{YM}^2 N_c \ll 1$
--	--------------------------------------	--

この AdS/CFT 対応は様々な観点から興味深い。まず、この対応は素粒子の理論で長い間議論されてきた興味深いアイデアを具体化するものとなっている：一つ目は、大きな N_c でのゲージ理論と弦理論の等価性。二つ目は、重力の量子論というものは抽象的で難しいものだと思われるが、実は、次元の低い時空での非重力理論で与えられるという「ホログラフィー」。また、量子色力学 ($\text{SU}(3)$ ゲージ理論) に基づくクォークの閉じ込めやハドロン (強い力で相互作用する粒子) の解析のように、強結合におけるゲージ理論は物理的に重要であるにも拘らず、その解析は困難であり、通常は大規模な数値計算を用いて行われる。上で述べた強／弱結合双対の関係は、このような強結合 ($\lambda \gg 1$) ゲージ理論が古典的な重力／弦理論を用いて解析できることを示している。そのため、AdS/CFT 対応とその拡張により非常に多くの応用がハドロンの物理においてなされている。

本講演では、このような研究の中でも特に $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の粒子の散乱振幅を議論する。一般に、非 Abel ゲージ群に対応するゲージ粒子を強い力の場合に倣ってグルーオンと呼ぶため、以下、この散乱振幅をグルーオン散乱振幅と呼ぶ。

1.2 AdS/CFT 対応に現れる可積分性

このような AdS/CFT 対応の研究において、その背後に可積分性が現れることが明らかとなり、AdS/CFT 対応の研究に新たな可能性が拓けてきた [4–6]。例えば、対応を詳細に調べようとする、ゲージ理論側、弦理論側の少なくともどちらか一方の強結合領域を調べる必要があり、それ以前には主にこうした量子補正がうまく制御できる

超対称性を保つ量について議論がなされてきた。可積分性を用いることにより、まず、超対称性に顕わに依らない解析が可能となった。また、対応に現れる可積分性を用いることにより、ゲージ理論の強結合ダイナミクスを定量的に調べることも可能となった。さらに、このような弦理論に触発された研究に刺激され、AdS/CFT 対応という仮説に依らない通常の量子場の理論に基づいた超対称ゲージ理論の研究が大いに進んでいる。可積分性に基づく AdS/CFT 対応の深い理解により、様々な応用への有用な示唆を得ることも期待される。

事実、このような可積分性に基づく AdS/CFT 対応の研究の成果として、AdS 空間中の弦のエネルギー／ゲージ理論演算子のスケーリング次元のスペクトルが全ての t Hooft 結合の領域で計算可能である、という目覚ましい結果が得られている [6]。この提案によると、エネルギー／スケーリング次元は、2次元可積分模型の有限サイズ効果を調べる時に典型的に現れる、熱力学的ベーテ仮説 (thermodynamic Bethe ansatz; TBA) 方程式を解くことで得られる。また、その結果は、ゲージ理論の摂動論 (プランク定数による展開) の5次の次数まで実際に確かめられている。

こうした結果を踏まえると、AdS/CFT 対応の他の研究においても可積分性は有用であると期待されるが、実際に、グルーオン散乱振幅／Wilson ループ、相関関数、クォーク-反クォークポテンシャルの解析にも用いられるようになってきている。本講演では上述のように、このような研究の中でも特に可積分性に基づいた散乱振幅の解析に注目する。この話題を概観すると次のようになる：まず、AdS/CFT 対応により、強結合におけるグルーオン散乱振幅は AdS 空間中の極小曲面の面積、あるいは、曲面の境界に沿った Wilson ループの真空期待値で与えられる [7]。ここで可積分性が顔を出し、この極小曲面が TBA 方程式で解析されることになる。但し、この場合に現れる TBA 方程式は、上で述べたスペクトル問題に現れる TBA 方程式とは別のものである。従って、強結合散乱振幅の研究は AdS/CFT 対応において TBA 方程式が現れるもう一つの興味深い場合であるといえる。模式的に表すと次のようになる：

強結合グルーオン散乱振幅

↑ 文献 [7]

AdS 空間中の極小曲面

↑ 文献 [8-11]

熱力学的ベーテ仮説方程式

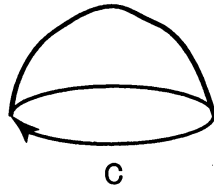


図 1: Wilson ループと極小曲面

1.3 AdS/CFT 対応における Wilson ループ

ここで、前小節で出てきた「Wilson ループ」について一言コメントしておく。Wilson ループ $W(C)$ とは、ゲージ場を経路 C に沿って順序付けて並べたものの積分で以下のように表される：

$$\begin{aligned}
 W(C) &= \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[\oint_C A_\mu(x) dx^\mu \right] \\
 &:= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr} \int_{s_i > s_{i+1}} \prod_{i=1}^n A_{\mu_i}(x(s_i)) \frac{dx^{\mu_i}}{ds_i} ds_i.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで、 s は経路 C の径数、 $\mathcal{P}$ は順序付け (path order) を表す。Tr はゲージ群 (代数) の空間のトレースである。Wilson ループはゲージ変換の下で不変であり、量子色力学ではクォークの閉じ込めの判定に用いられるなど、ゲージ理論における重要な物理量である。

AdS/CFT 対応では、Wilson ループの真空期待値 $\langle W(C) \rangle$ の強結合における値は、AdS 空間の境界 (無限遠) にあたる Minkowski 空間内の経路 C を境界とする極小曲面の面積で与えられる [12,13]。(図 1 参照。) 従って、前小節で述べた強結合散乱振幅と極小曲面の対応は散乱振幅と光的多角形を境界とする Wilson ループの真空期待値の間の等価性を示唆している。この等価性は、強結合領域だけでなく、通常のゲージ理論の摂動論が有効な弱結合領域においても実際に確かめられている。

本講演では、散乱振幅に対応する特別な極小曲面を考えるが、一般に AdS 空間の境界に伸びる極小曲面の面積と境界の形がわかると、通常の摂動論では解析ができない強結合ゲージ理論の物理量が求まる、ということになる。また、物理では様々な解析をうまく定義するために、Euclid 空間内の理論について解析をおこなった後結果を Minkowski 空間の場合に接続する (Wick 回転)、ということをししばしばおこなう。この手続きに対応して、AdS 空間の Euclid 版である双曲空間 (hyperbolic space; H) 内の極小曲面も AdS/CFT 対応の研究では有用である。模式的に表すと：

AdS/H 中の極小曲面

AdS/CFT 対応
≈強結合ゲージ理論の
Wilson ループ (物理量)

1.4 本講演の予定

以下では、強結合 ($\lambda \gg 1$) 4 次元極大超対称 ($\mathcal{N} = 4$) ゲージ理論のグルーオン散乱振幅、より正確には、ヘリシティ (スピンの進行方向成分) を最大限に破る MHV (maximally helicity violating; MHV) 振幅を、背後に現れる 2 次元可積分模型・共形場理論を用いて議論する。特に、対応する Wilson ループ (の空間射影が) が正多角形になる運動量配位の周りでの解析的な展開式を導く [14–17]。

講演の予定は以下の通りである：まず 2 節では、強結合散乱振幅について簡単な復習をする。ここで、強結合散乱振幅と AdS 中の極小曲面、Wilson ループとのつながりを見る。3 節では、この AdS 空間中の極小曲面と可積分性の関わりを概観する。ここで、極小曲面と Hitchin 系と呼ばれる 2 次元可積分系、熱力学的ベータ仮説方程式とのつながりを見る。これらの準備に基づいて、4 節では強結合散乱振幅の解析的展開を議論する。最後に、5 節で本講演のまとめをおこなう。

2 強結合グルーオン散乱振幅

それでは、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の散乱振幅から議論を始めよう。この理論の散乱振幅についての総説としては、例えば、[18] がある。AdS/CFT 対応により、強結合における $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論は AdS 空間中の古典的な弦理論でよく記述される。この事実に基づくと、MHV 振幅をその (プランク定数による展開の) 最低次の表式で割って得られるスカラー部分は次式で与えられる [7]：

$$\mathcal{M} \sim e^{-S} = e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}(\text{Area})}. \quad (2.1)$$

ここで、 S は弦の作用、 λ は 't Hooft 結合、(Area) は AdS 空間中の極小曲面の面積である。また、ここで用いられる極小曲面は特別な境界条件を満たすものである。図 2 に 4 粒子散乱の場合の極小曲面の例を示す。

図 2 では、AdS 空間を中身の詰まった円筒で、その境界 (無限遠) を円筒の側面で表した。このように、極小曲面は AdS 空間の境界まで広がり、そこで光的な境界とカuspを持つ。それぞれの光的な辺が粒子の 4 元運動量 k_i ($i = 1, \dots, 4$) に対応している。今

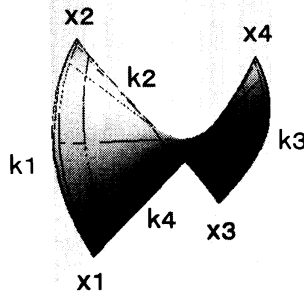


図 2: 4 粒子散乱振幅に対応する極小曲面

考えている超対称ゲージ理論の粒子は全て 0 質量なので、運動量は光的 $k_i^2 = k_i \cdot k_i = 0$ である。この強結合散乱振幅と極小曲面の関係を模式的に表すと図 3 のようになる。

同様に、一般の n -粒子散乱振幅も n -個のカusp と光的な辺を境界に持つ極小曲面の面積で与えられ、それぞれの光的な辺が粒子の運動量を表す。即ち、境界のカusp の座標を x_i^μ ($i = 1, \dots, n; \mu = 0, 1, 2, 3$) とすると、

$$\Delta_i x^\mu := x_i^\mu - x_{i+1}^\mu = k_i^\mu. \quad (2.2)$$

また、運動量の保存 $\sum_i k_i^\mu = 0$ により、曲面の境界は閉じた光的多角形 (null polygon) となる。これらの結果を標語的に表すと次のようになる：

強結合 n -粒子散乱振幅

$\approx$

AdS 中の n -カusp 極小曲面

2.1 4 粒子散乱振幅

強結合散乱振幅と極小曲面の関係を理解するために、上でも述べた 4 粒子散乱振幅をもう少し詳しく見てみよう。そのため、まず、5 次元反 de Sitter 空間 (AdS_5) を符号 $(2,4)$ を持つ平坦な空間 $\mathbb{R}^{2,4}$ 中の次式で定義される超曲面として表す：

$$\vec{Y} \cdot \vec{Y} := -Y_{-1}^2 - Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 = -1. \quad (2.3)$$

弦の運動は、複素座標 $z, \bar{z}$ で表される弦の世界面から AdS 空間への写像 $\vec{Y}(z, \bar{z})$ で表される。これらの座標を用いると、弦の運動方程式は古典的には次式で与えられる：

$$\partial \bar{\partial} \vec{Y} - (\partial \vec{Y} \cdot \bar{\partial} \vec{Y}) \vec{Y} = 0, \quad (\partial \vec{Y})^2 = (\bar{\partial} \vec{Y})^2 = 0. \quad (2.4)$$

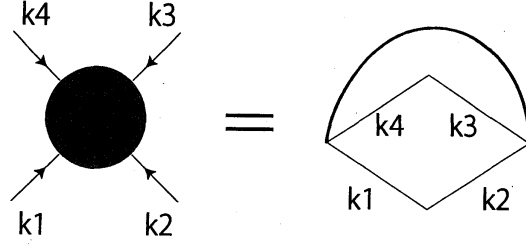


図 3: 散乱振幅と極小曲面

但し、ここで $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. これは、AdS 中の極小曲面の方程式に一致している。古典弦の作用は弦の描く曲面の面積で与えられるため、その作用の極値化条件である運動方程式は極小曲面を与えるのである。

この非線形方程式系を解くことは一般には難しいが、

$$\begin{pmatrix} Y^{-1} + Y^4 & Y^1 + Y^0 \\ Y^1 - Y^0 & Y^{-1} - Y^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\tau+\sigma} & e^{\tau-\sigma} \\ -e^{-\tau+\sigma} & e^{-\tau-\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$Y^2 = Y^3 = 0$, $z = \tau + i\sigma$ が解となることは容易に確かめられる。この解がどのような曲面を表しているのかを見てみよう。そのために、次の Poincaré 座標を導入する：

$$Y^\mu =: \frac{x^\mu}{r}, \quad Y^{-1} + Y^4 =: \frac{1}{r}, \quad Y^{-1} - Y^4 = \frac{r^2 + x^\mu x_\mu}{r}. \quad (2.6)$$

ここで $\mu = 0, 1, 2, 3$, また、添字は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とその逆 $\eta^{\mu\nu}$ を用いて上げ下げする。この座標系では、AdS₅ の計量は

$$ds^2 = \frac{1}{r^2} (dr^2 + dx^\mu dx_\mu) \quad (2.7)$$

と表される。 r の各値に対して x^μ で表される Minkowski 空間が付随し、 $r = 0$ が AdS₅ の境界に対応する。(2.5) で与えられる曲面は、 $Y^2 = Y^3 = 0$ より、 r と

$$x^\pm := x^0 \pm x^1 = \frac{Y^0 \pm Y^1}{Y^{-1} + Y^4} \quad (2.8)$$

を座標とする AdS₅ の 3 次元部分空間 AdS₃ に含まれることがわかる。従って、(2.2) で与えられる粒子の運動量は $\mathbb{R}^{1,1} \subset \mathbb{R}^{1,3}$ の元になる。これらの座標を用いると、 z -平面の無限遠点が $r = 0$ に写され曲面の境界をなすことがわかる。

曲面の境界の形を見るために、図 4 左図のように原点から十分離れて z -平面を 1 周してみる。すると、第 1 象限の原点から離れた領域が AdS₃ の境界である (x^+, x^-) -平

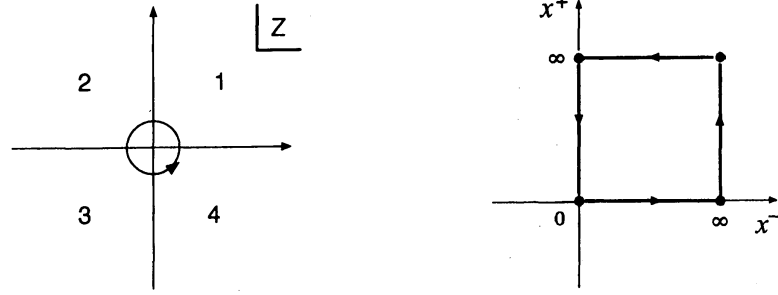


図 4: 弦の世界面 (z -平面) と 4 カスパ極小曲面の境界

面の原点近傍に写されることがわかる。同様に、第 2, 3, 4 象限の原点から離れた領域は、 $(x^+, x^-) = (\infty, 0), (\infty, \infty), (0, \infty)$ 近傍にそれぞれ写される。従って、 z -平面の実軸あるいは虚軸を超えるごとに、曲面の境界は図 4 右図のように (x^+, x^-) -平面の 4 つのカスパ間をジャンプし、その過程で光的な線分を描く。このことから、曲面全体は確かに図 2 のようになり、(2.5) で表される単純な極小曲面が 4 つの光的な辺とカスパを持つこと、即ち、散乱振幅の評価に必要な境界条件を満たすものであることがわかる。

この曲面は AdS 空間の無限遠にまで広がっているので、その面積は発散している。そこで、例えば次元正則化 $4 \rightarrow 4 - 2\epsilon$ のような適当な正則化をおこなった後に (2.1) に従って散乱振幅を求めると

$$\mathcal{M}_4 \sim \mathcal{M}_4^{\text{div}} \times \exp \left[\frac{1}{8} f(\lambda) \left(\ln \frac{s}{t} \right)^2 + \text{const.} \right] \quad (2.9)$$

という結果を得る。ここで、 $\mathcal{M}_4^{\text{div}}$ は発散部分、 s, t は Mandelstam 変数 $s = (k_1 + k_2)^2$, $t = (k_2 + k_3)^2$ である。また、 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}/\pi$ であり、これはスペクトル問題で求められた強結合でのカスパ異常次元と正確に一致している。この表式は、Bern-Dixon-Smirnov (BDS) による摂動論の全次数での散乱振幅の予想 [19] と精密に整合している。

2.2 超対称ゲージ理論への示唆

こうした弦理論／強結合側の議論は超対称ゲージ理論に対して非常に有用な示唆も与えている：まず、1 節で述べたように、AdS/CFT 対応によると AdS 空間中の極小曲面はその境界に沿った Wilson ループの真空期待値に対応しているため、(2.1) は強結合での MHV 振幅と光的多角形に沿った Wilson ループとの等価性を示唆している。次に、極小曲面の面積は AdS 空間の等長変換の下で不変である。曲面のカスパ座標の差

がゲージ理論の粒子の運動量なので、この不変性は、大雑把にいうと、運動量空間での共形不変性に対応している。この対称性は双対共形不変性 (dual conformal symmetry) と呼ばれる。この双対共形不変性を認めると、上で述べた BDS 公式が $n \leq 5$ の n -粒子散乱で厳密であることが示される。 $n \geq 6$ の場合は、再び強結合側からの考察から BDS 公式が変更を受けることが示され、弱結合側でも BDS 公式とのずれが実際に確認されている。この BDS 公式とのずれの部分は現在「残り関数」 (remainder function) と呼ばれている。双対共形不変性を用いると、この残り関数はカusp座標 x_i^μ の「複比」の関数であることもわかる。従って、以下の問題は、この残り関数をカusp座標の複比の関数として求めることになる。

2.3 強結合散乱振幅から幾何学へ

この節の最後に、通常のゲージ理論の摂動論の立場からは、Alday-Maldacena の結果 (2.1) は非常に驚くべき結果であることを強調しておきたい。

前小節で述べた残り関数の最も簡単なものは、6 粒子散乱振幅の摂動論の 2 次の次数 (2 ループ) で現れる。(プランク定数に関する摂動の次数は Feynmann 図に現れるループの数に対応するので、摂動の次数を「ループ」と呼ぶ。) この残り関数を直接求めた結果が [20] に与えられている。図 5 に、この結果の一部を示す。ここでは詳しい定義は与えないが、この表式に現れる G は Goncharov の複合多重対数関数 (multiple polylogarithm) と呼ばれる関数である。これは 17 ページに及ぶ表式の最初の 1 ページ分である。

実は、この場合は「symbol」という関数の解析性を特徴付ける道具立てを用いると多重対数関数 (polylogarithm) を用いて数行の簡便な表式にまとめることがわかっている [21]。しかし、一般に強結合の結果というものは、こうした摂動計算を高次まで実行し足し上げ、結合定数の大きな領域まで接続したものに相当する。このように、直接的にはほぼ不可能と思われる強結合での散乱振幅の計算が、公式 (2.1) により概念的にも明確な幾何学の問題になったのである。

3 極小曲面と可積分性

前節では、AdS 空間中の極小曲面を用いて強結合散乱振幅が評価できることを説明し、4 粒子散乱の場合の具体的な結果を示した。同様に、 $n \geq 5$ の強結合 n -粒子散乱振幅を求めるためには、5 つ以上のカuspを持つ極小曲面を構成する必要があると考えられ

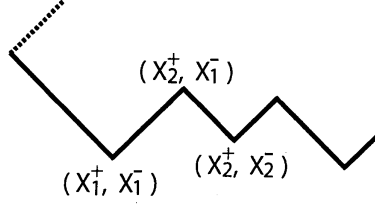
$$\begin{aligned}
R_{6,WL}^{(0)}(u_1, u_2, u_3) = & \quad (H.1) \\
& \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{1-u_1}, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{u_3-1}{u_2+u_3-1}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{1-u_3}, \frac{u_1-1}{u_3+u_1-1}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \frac{1}{24}\pi^2 G \left(\frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) + \\
& \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) + \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) + \\
& \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) + \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \frac{3}{2}G \left(0, 0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) + G \left(0, \frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1}; 1 \right) + \\
& G \left(0, \frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1}; 1 \right) + \\
& G \left(0, \frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_3}; 1 \right) + G \left(0, \frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, 0, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}, 0, \frac{1}{1-u_1}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}, \frac{1}{1-u_1}, 0; 1 \right) - \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}, \frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}, \frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}; 1 \right) - \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_1+u_2-1}, \frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{1}{u_3}, 0, \frac{1}{u_1}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2}; 1 \right) + G \left(0, \frac{1}{u_3}, 0, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) + \\
& G \left(0, \frac{1}{u_3}, 0, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_1+u_3}; 1 \right) - \frac{1}{2}G \left(0, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_2+u_3}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_1-1}{u_1+u_3-1}, 0, \frac{1}{1-u_3}; 1 \right) + \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_1-1}{u_1+u_3-1}, \frac{1}{1-u_3}, 0; 1 \right) - \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_1-1}{u_1+u_3-1}, \frac{1}{1-u_3}, \frac{1}{1-u_3}; 1 \right) + \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_1-1}{u_1+u_3-1}, \frac{1}{1-u_3}, \frac{1}{1-u_3}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_1+u_3-1}{u_1+u_3-1}, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, \frac{1}{1-u_3}; 1 \right) + \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, \frac{1}{1-u_2}, 0; 1 \right) - \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1 \right) + \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1 \right) - \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_2-1}{u_2+u_3-1}, \frac{u_3-1}{u_3+u_1-1}, \frac{1}{1-u_2}; 1 \right) - \\
& \frac{1}{4}G \left(0, \frac{u_3-1}{u_3+u_1-1}, \frac{1}{1-u_3}, \frac{1}{1-u_3}; 1 \right) + \frac{1}{2}G \left(\frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}, \frac{1}{1-u_1}; 1 \right) +
\end{aligned}$$

図 5: 6 粒子散乱の 2 ループ残り関数

る。実際に、特別な 6 カスプ解が [22, 23] で構成されているが、一般にこのような特別な境界条件を満たす極小曲面を構成することは非常に難しい問題である。

しかし興味深いことに、Alday-Maldacena は極小曲面を具体的に構成することなく散乱振幅の評価に必要な曲面の面積が求められることを示した [8]。彼らはまず古典弦の運動方程式 (2.4) を Hitchin 系と呼ばれる 2 次元可積分系に書き直し、一般の n -カスプ解を前節の 4 カスプ解をうまく「貼り合わせた」ものとして特徴付けた。さらに、この結果に基づき AdS_3 に極小曲面が含まれる場合の強結合 8-粒子散乱振幅を評価した。その後の研究により、今では、強結合散乱振幅は、TBA (型の) 方程式を解くことで評価できることがわかっている [9–11]。

本節では、こうした TBA 方程式を用いた散乱振幅の評価法を説明したい。但し簡単のため、以下では極小曲面が AdS_3 に含まれる場合を考えることにする。これは、2.1 節のように粒子の運動量が $\mathbb{R}^{1,1} \subset \mathbb{R}^{1,3}$ に含まれる場合に相当し、4 次元の強結合ゲージ理論を特別な運動量配位で考えていることになる。この場合、運動量の保存から、粒子あるいはカスプの数は偶数であることがわかる。よって、以下では $2n$ 個のカスプを持つ極小曲面を議論する。また、極小曲面の境界の座標としては (2.8) 中の光円錐座標

図 6: AdS_3 空間中の極小曲面の境界

$x^\pm$ を用いる。カスプの座標を $x_{2k-1} = (x_k^+, x_k^-)$, $x_{2k} = (x_{k+1}^+, x_k^-)$ とすると、極小曲面の境界は図 6 のように座標付けされる。

3.1 Pohlmeyer 還元

可積分性を用いた強結合散乱振幅の評価の第 1 段階は Pohlmeyer 還元 (reduction) という操作である。これは、古典弦の運動方程式を AdS_3 が埋め込まれる $\mathbb{R}^{2,2}$ の正規直交系の発展方程式として書き直すことに相当する。そのため、 AdS_3 を (2.3) で $Y^3 = Y^4 = 0$ としたものとして与え、非自明な 4 成分を前節と同様に $\vec{Y}$ と表すことにする。この $\vec{Y}$ を用いると、 $\mathbb{R}^{2,2}$ の局所正規直交系として

$$q = (\vec{Y}, \partial\vec{Y}, \bar{\partial}\vec{Y}, \vec{N})^t \quad (3.1)$$

を取ることができる。但しここで、

$$N_a = \frac{1}{2} e^\alpha \epsilon_{abcd} Y^b \partial Y^c \bar{\partial} Y^d, \quad e^{2\alpha} = \frac{1}{2} \partial\vec{Y} \cdot \bar{\partial}\vec{Y} \quad (3.2)$$

そして $\vec{Y} \cdot \vec{Y} = -Y_{-1}^2 - Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^1$ 。また ϵ_{abcd} は Levi-Civita 記号である。この正規直交系を用いると、弦の運動方程式 (2.4) は適当な 4×4 行列 $U_z, U_{\bar{z}}$ によって $(\partial + U_z)q = (\bar{\partial} + U_{\bar{z}})q = 0$ という形で表せる。さらに、 $so(4) \sim su(2) \oplus su(2)$ を用いて 4 次元ベクトルを 2 次元ベクトル (スピノル) の積に分解し、スペクトルパラメタ ζ を導入する。その結果、次の線形系を得る：

$$0 = (\partial + B_z)\psi = (\bar{\partial} + B_{\bar{z}})\psi, \quad (3.3)$$

但し、

$$B_z(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial\alpha & -\frac{1}{\zeta}e^\alpha \\ -\frac{1}{\zeta}e^{-\alpha}p & -\frac{1}{2}\partial\alpha \end{pmatrix}, \quad B_{\bar{z}}(\zeta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{\partial}\alpha & -\zeta e^{-\alpha}\bar{p} \\ -\zeta e^\alpha & \frac{1}{2}\bar{\partial}\alpha \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

また、 $p = p(z) := -2\partial^2\vec{Y} \cdot \vec{N}$ は z のみの関数である。

ここで、

$$B_z = A_z + \frac{1}{\zeta} \Phi_z, \quad B_{\bar{z}} = A_{\bar{z}} + \zeta \Phi_{\bar{z}} \quad (3.5)$$

のように接続を分解すると、上の線形系の両立／平坦条件は

$$D_{\bar{z}} \Phi_z = D_z \Phi_{\bar{z}} = 0, \quad F_{z\bar{z}} + [\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}] = 0 \quad (3.6)$$

となる。共変微分 D の作用は $D_\alpha \Phi_\beta = \partial_\alpha \Phi_\beta + [A_\alpha, \Phi_\beta]$ 、場の強さは $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]$ でそれぞれ与えられる。これは、4次元インスタントン方程式の次元縮約で得られる $su(2)$ Hithin 方程式系である。 A_α, Φ_α の具体形を代入すると、この方程式系は

$$0 = \partial \bar{\partial} \alpha - e^{2\alpha} + |p(z)|^2 e^{-2\alpha} \quad (3.7)$$

と同等であることもわかる。これは、一般化された sinh-Gordon 方程式である。線形系 (3.3) の独立な解 ψ_1, ψ_2 を組み合わせた行列 $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ を用いると、弦の運動（極小曲面の）方程式の解は

$$Y_{a\bar{a}} = \begin{pmatrix} Y^{-1} + Y^2 & Y^1 + Y^0 \\ Y^1 - Y^0 & Y^{-1} - Y^2 \end{pmatrix} = \Psi(\zeta = 1) \Psi^T(\zeta = i) \quad (3.8)$$

と表される。

3.2 $2n$ -カスプ解

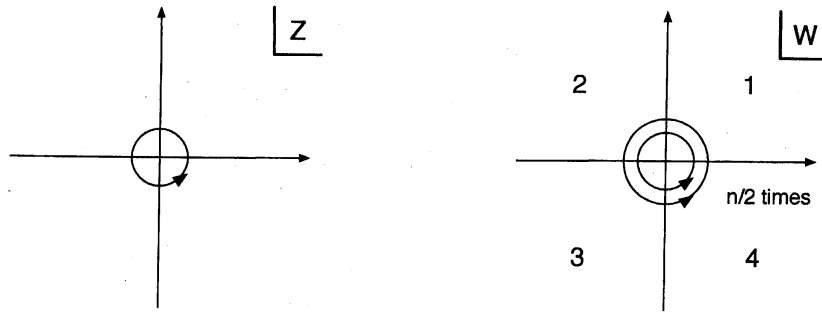
前小節のような設定をおこなうと、一般の $2n$ -カスプ解を議論することができる。まず、(3.4) に現れた $p(z)$ を用いて

$$dw = \sqrt{p} dz, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{1}{4} \ln p \bar{p} \quad (3.9)$$

と変数変換をおこなうと、一般化された sinh-Gordon 方程式 (3.7) は

$$0 = \partial \bar{\partial} \hat{\alpha} - 2 \sinh \hat{\alpha} \quad (3.10)$$

となる。この方程式の自明な解 $\hat{\alpha} = 0$ は 2 節で述べた 4-カスプ解に対応していることがわかる。このことから、 $p(z) = z^{n-2} + \dots$ と $p(z)$ を $n-2$ 次の多項式に取った場合の $|w| \gg 1$ で十分早く減少する解 $\hat{\alpha}$ が、我々が必要としている $2n$ -カスプ極小曲面を与えることがわかる：まず、 $|w| \gg 1$ で $\hat{\alpha} \sim 0$ なので、局所的には解は 4-カスプ解と見做せ、前節で説明したように w -平面の各象限が極小曲面の境界の各カスプを与える。

図 7: z -平面、 w -平面での回転

また、 $|w| \gg 1$ で $w \sim z^{n/2}$ であることに注意すると、原点から十分離れて w -平面を 1 周すると z -平面を $n/2$ 周することがわかる (図 7)。この 2 つの事実を組み合わせると、元の z -平面を 1 周すると $4 \times n/2 = 2n$ 個のカスポが得られることが確かめられる。なお、最高次の係数を 1 に取って規格化すると、多項式 $p(z)$ は $2(n-3)$ 個の実パラメタを持つ。これは $2n$ 個のカスポからつくられる独立な複比の数と確かに一致している。また、ここでは滑らかな極小曲面を考えているので、 $\hat{\alpha}$ は (3.9) に従って $p(z)$ の零点に対応して対数的な特異性を持つ。

3.3 複比

このように、 $2n$ 個のカスポを持つ極小曲面が特徴付けられたのであるが、やはり、解の具体的な形を書き下すことは難しい。それにも拘らず、元々の問題である強結合散乱振幅について有用な知見が得られることを次に見てみよう。まず、残り関数の引数となるカスポ座標 $x_i^\pm$ の複比を考える。

原点から十分に離れて z -平面を 1 周すると、 w -平面で $\text{Re}(w/\zeta + \bar{w}\zeta) > 0$, $\text{Re}(w/\zeta + \bar{w}\zeta) < 0$ となる領域 (Stokes 領域) を交互に通過することになる。それぞれの領域で、線形系 (3.3) は $|w| \gg 1$ で発散する解と 0 になる解を持つ。これらをそれぞれ大きな解、小さな解と呼び b_i, s_i と書くことにする。 i は領域のラベルである。具体的には b_i, s_i は $(e^{w/\zeta + \bar{w}\zeta}, 0)^t, (0, e^{-(w/\zeta + \bar{w}\zeta)})^t$ の形をとり、線形系の解はそれぞれの領域で

$$\psi(\zeta; z) \sim b_i(\zeta; z) + s_i(\zeta; z) \quad (3.11)$$

となる。適当に規格化された小さな解 s_i から得られる行列式

$$s_i \wedge s_j := \det(s_i, s_j) \quad (3.12)$$

は Stokes 係数を与えるが、この Stokes 係数を用いてカスプ座標の複比が

$$\frac{x_{ij}^{\pm} x_{kl}^{\pm}}{x_{ik}^{\pm} x_{jl}^{\pm}} = \frac{(s_i \wedge s_j)(s_k \wedge s_l)}{(s_i \wedge s_k)(s_j \wedge s_l)}(\zeta) =: \chi_{ijkl}(\zeta) \quad (3.13)$$

と表されることがわかる。ここで、 $x_{ij}^{\pm} := x_i^{\pm} - x_j^{\pm}$ 、また、 x^+ の複比に対しては $\zeta = 1$ 、 x^- の複比に対しては $\zeta = i$ である。 $s_i \wedge s_j$ が z に依らないことに注意する。このようにして、線形系の解 ψ を通して得られる極小曲面の幾何学的な情報が物理的なカスプ座標の複比に結びついている。

3.4 熱力学的ベーテ仮説方程式

次に、具体的にどのようにして Stokes 係数あるいは複比を求めるかを議論しよう。まず [10] に従い、

$$T_{2k+1} := (s_{-k-1} \wedge s_{k+1}), \quad T_{2k} := (s_{-k-1} \wedge s_k)^+, \\ Y_s := T_{s-1} T_{s+1} \quad (3.14)$$

によって T-関数、Y-関数を定義する。ここで、 $\pm$ は引数の位相変化を表す： $f^{\pm}(\zeta) := f(e^{\pm i\pi/2} \zeta)$ 。この定義から、例えば、 $Y_{2k} = -\chi_{-k,k,-k-1,k+1}$ となり、Y-関数はスペクトルパラメタによって拡張されたカスプ座標の複比であると言える。また、定義 (3.12) から $s_i \wedge s_j$ は行列式に対する代数的恒等式

$$(s_i \wedge s_j)(s_k \wedge s_l) = (s_i \wedge s_k)(s_j \wedge s_l) + (s_i \wedge s_l)(s_k \wedge s_j) \quad (3.15)$$

を満たすことがわかる。この恒等式を T-関数で表すと

$$T_s^+ T_s^- = T_{s+1} T_{s-1} + 1, \quad (3.16)$$

Y-関数で表すと

$$Y_s^+ Y_s^- = (1 + Y_{s-1})(1 + Y_{s+1}), \quad (3.17)$$

となる。これらは可積分系でよく知られた T-系 (T-system) [24], Y-系 (Y-system) [25] と呼ばれる代数方程式系である。

ここまでの議論では、(3.16) や (3.17) は定義から従う代数的恒等式である。ここで物理的なインプットを入れることになるが、それは Y-関数の漸近的な振舞いから与えられる。線形系 (3.3) の WKB 解析からは、例えば

$$\log Y_{2k} \sim \frac{Z_{2k}}{\zeta}, \quad Z_s = \oint_{\gamma_s} \sqrt{p} dz \quad (3.18)$$

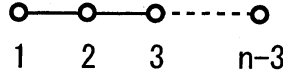


図 8: Y-関数の相互作用を表す A_{n-3} Dynkin 図

となることがわかる。こうした漸近的振舞いと Y-関数の解析性から、Y-系 (3.17) は次の積分方程式系に書き換えられる：

$$\log Y_s(\theta) = -m_s \cosh \theta + \sum_s K_{sr} * \log(1 + Y_r) \quad (3.19)$$

($s = 1, \dots, n-3$). ここで、 $Y_0 = Y_{n-2} = 0$, $\theta := \log \zeta$, $m_s := 2Z_s$, $K_{sr}(\theta) := I_{sr}/\cosh \theta$ であり、 $*$ は畳み込み $f * g = \int \frac{d\theta'}{2\pi} f(\theta - \theta')g(\theta')$ を表す。 $I_{sr} = \delta_{s,r-1} + \delta_{s,r+1}$ は A_{n-3} 代数の接続 (incidence) 行列であり、Y-関数間の「相互作用」は A_{n-3} の Dynkin 図 (図 8) で表すことができる。また、(3.19) では簡単のため、パラメタ m_s が実の場合の方程式を示した。

この積分方程式系は、2次元可積分模型の有限サイズ効果の解析に典型的に現れる TBA 方程式 [26] の形をしている。実際に、今考えている AdS_3 中の極小曲面に対する方程式 (3.19) は、等質 sine-Gordon (homogeneous sine-Gordon; HSG) 模型 [27] と呼ばれる 2次元可積分模型の TBA 方程式になっていることが確かめられる [11]。

TBA 方程式 (3.19) を解き Y-関数が求まると、強結合散乱振幅を具体的に書き下すことができる。まず、曲面の面積は発散しているので

$$\begin{aligned} A(\text{Area}) &= 4 \int d^2 z e^{2\alpha} \\ &\rightarrow 4 \int d^2 z (e^{2\alpha} - \sqrt{p\bar{p}}) + 4 \int_{r \geq \epsilon} d^2 z \sqrt{p\bar{p}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

のように正則化する。各項を評価した後、BDS 公式との差

$$R = A - A_{\text{BDS}} \quad (3.21)$$

によって残り関数が求まる。なお、 $2n$ の n が偶数の時には様々な結果の表式が煩雑になることがあるため、以下では特に断らない限り n が奇数の場合を考えることにする。

3.5 残り関数

議論が少し長くなったので、ここまでの内容をまとめておこう。 AdS_3 中の極小曲面に対応する強結合 $2n$ -粒子散乱振幅を求めるには、まず、積分方程式 (3.19) を解く。こ

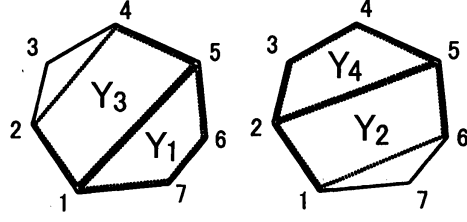


図 9: $n = 7$ での Y-関数と複比

の方程式は、HSG 模型という 2 次元可積分模型の TBA 方程式と一致している。Y-関数 Y_s は、スペクトルパラメタ θ で拡張されたカusp座標 $x_i^\pm$ の複比である。例えば、 $n = 7$ での Y_1 を $\theta = -\pi i/2, 0$ で評価すると、カusp 1, 5, 6, 7 からつくられる複比が得られる：

$$Y_1\left(-\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{x_{15}^+ x_{67}^+}{x_{56}^+ x_{17}^+}, \quad Y_1(0) = \frac{x_{15}^- x_{67}^-}{x_{56}^- x_{17}^-}. \quad (3.22)$$

他の場合も同様の公式が得られ、図 9 のようにまとめることができる。 m_s は一般には複素のパラメタである。実で数えると $2(n-3)$ 個のこれらのパラメタを変化させると、極小曲面の形が変わり、元のゲージ理論粒子の運動量配位が変化することになる。実パラメタの数 $2(n-3)$ は実際にこの場合の独立な複比の数と一致している。HSG 模型では、 m_s は粒子の（複素化された）質量パラメタである。従って、以後 m_s を質量パラメタと呼ぶ。畳み込みの核 K_{sr} は A_{n-3} 代数の接続行列に比例していて Y-関数間の相互作用は図 8 の A_{n-3} Dynkin 図に要約される。

TBA 方程式を解いて得られた Y-関数を用いると、強結合 $2n$ -粒子散乱振幅の残り関数は次のように表される：

$$R_{2n} = \frac{7\pi}{12}(n-2) + A_{\text{periods}} + \Delta A_{\text{BDS}} + A_{\text{free}}. \quad (3.23)$$

ここで、全体に掛かる結合定数部分 $\sqrt{\lambda}$ は省略されている。第 2 項は、

$$A_{\text{periods}} = -\frac{1}{4} m_r I_{rs}^{-1} \overline{m}_s \quad (3.24)$$

で与えられる。第 3 項は、隣接するカusp座標からつくられる複比 $c_{i,j}^\pm = c_{j,i}^\pm$ を用いて

$$\Delta A_{\text{BDS}} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \log \frac{c_{i,j}^+}{c_{i,j+1}^+} \log \frac{c_{i-1,j}^-}{c_{i,j}^-} \quad (3.25)$$

と表される。複比 $c_{i,j}^\pm$ は、 $j-i > 0$ が奇数の時は

$$c_{i,j}^\pm = \frac{x_{i+2,i+1}^\pm x_{i+4,i+3}^\pm \cdots x_{j,i}^\pm}{x_{i+1,i}^\pm x_{i+3,i+2}^\pm \cdots x_{j,j-1}^\pm} \quad (3.26)$$

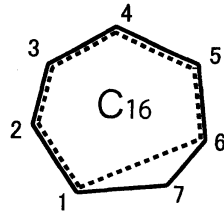


図 10: 隣接カスプ座標からつくられる $n = 7$ の場合の複比 $c_{1,6}$

で与えられ、 $i - j > 0$ が偶数の時は、添字が i から j に減る方向に並ぶ同様の表式で与えられる。 $n = 7$ の場合は、例えば、 $c_{1,6}^{\pm} = x_{23}^{\pm} x_{45}^{\pm} x_{16}^{\pm} / x_{12}^{\pm} x_{34}^{\pm} x_{56}^{\pm}$ であり、図 9 と同様に図 10 のように表すことができる。図 10 では、添字 $\pm$ は省略した。第 4 項は、Y-関数の積分

$$A_{\text{free}} = \sum_{s=1}^{n-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} |m_s| \cosh \theta \log(1 + \tilde{Y}_s(\theta)) \quad (3.27)$$

で与えられる。ここで、質量パラメタ $m_s = e^{i\varphi_s} |m_s|$ の位相で引数をずらした Y-関数 $\tilde{Y}_s(\theta) := Y_s(\theta + i\varphi_s)$ を導入した。興味深いことに、この第 4 項は（適当な因子を除いて）2 次元可積分模型の自由エネルギーそのものになっていることがわかる。また、第 3 項も可積分模型の転送行列に相当する T-関数で簡潔に表されることを後にみる。第 2 項は可積分模型の質量パラメタで与えられているので、残り関数の各項が 2 次元可積分模型の言葉で非常にうまく表されていることがわかる。

我々は、4 次元の極大超対称ゲージ理論の強結合散乱振幅から出発したのであるが、AdS/CFT 対応を通して 10 次元時空 ($\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$) 中の弦理論と結びつき、さらに、2 次元可積分系 (Hitchin 系、HSG 模型) を用いて散乱振幅が解析されることを見た。次節では、HSG 模型の極限として現れる 2 次元共形場理論に基づく解析が有用であることもみる。このように、強結合散乱振幅は 4 次元、10 次元、2 次元の一見すると全く異なった理論が絡み合う非常に興味深い研究対象となっている (図 11)。

3.6 TBA 方程式を解く

さて、これまでに見てきたように、具体的に残り関数を求めるためには TBA 方程式 (3.19) を解かなければならない。このような非線形積分方程式を解くことは一般には難しく、通常は適当な反復操作を用いて数値的に解が調べられる。また、質量パラメタ m_s が全て大きく、あるいは、小さくなる極限では、方程式を厳密に解くことができる。前者の極限 $m_s \rightarrow \infty$ は、2 次元可積分模型が質量を持つ自由粒子の模型に帰着す

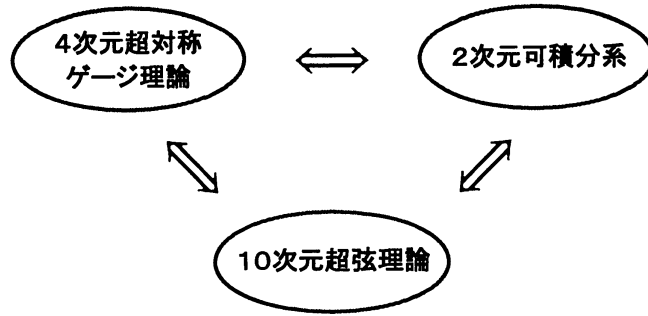


図 11: 強結合散乱振幅を巡る 4 次元、2 次元、10 次元理論

る極限／赤外 (infra-red; IR) 極限であり、元のゲージ理論の文脈ではカusp座標の複比が特異になるソフト／コリニア極限に相当する。後者の極限 $m_s \rightarrow 0$ は、2 次元可積分模型が 2 次元共形場理論 (CFT) に帰着する極限／紫外 (ultra-violet; UV) 極限であり、元のゲージ理論の文脈では極小曲面あるいは対応する Wilson ループ (の空間射影) が正多角形になる正多角形 (regular-polygonal) 極限である。

TBA 方程式は質量パラメタ m_s をインプットとして解かれる。しかし、散乱振幅の運動量依存性やその構造を調べるためには、質量パラメタと運動量／カusp座標の複比との関係を知る必要がある。ここで、TBA 方程式の解の解析的な情報が必要となるであろう。また、ゲージ理論の摂動論による解析では、摂動の 2 次 [20,21], 3 次 [28] における散乱振幅の興味深い解析的な結果が得られている (2.3 節参照)。これらを考慮すると、 $m_s \rightarrow 0, \infty$ 極限以外においても TBA 方程式を解析的に調べる必要があると考えられる。次節では、特に、CFT/UV/正多角形極限 $m_s \rightarrow 0$ の周りで TBA 方程式 (3.19) を解析し、強結合散乱振幅の解析的展開式を導く。質量スケール M , TBA 系の温度の逆数に相当する長さのスケール L を導入して (次元のない) 質量パラメタ m_s を

$$m_s = M_s L = \tilde{M}_s M L \quad (3.28)$$

と書くと、これから議論する CFT/UV 極限は

$$l := M L \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

と表される。

4 強結合散乱振幅の解析的展開

本節では、強結合散乱振幅の CFT/UV 極限周りでの解析的展開を議論する。以下の議論の基礎となるのは、極小曲面の解析に現れる積分方程式が HSG 模型の TBA 方程式と一致しているという前節で触れた事実である。より正確に言えば、ここに現れる HSG 模型は $\widehat{su}(n-2)_2/[\widehat{u}(1)]^{n-3}$ コセット 2 次元共形場理論に付随する HSG 模型である。模式的に表すと、

$$\boxed{\text{AdS}_3 \text{ 中の } 2n\text{-カスプ} \\ \text{極小曲面に対する積分方程式}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\widehat{su}(n-2)_2}{[\widehat{u}(1)]^{n-3}} \text{ HSG 模型}}$$

また、T-関数と境界エントロピー (g-関数) と呼ばれる物理量とのつながりも重要な役割を果たす。

4.1 等質 sine-Gordon 模型

以後の解析の準備として、まず HSG 模型について簡単にまとめておく。我々が用いる $\widehat{su}(n-2)_2/[\widehat{u}(1)]^{n-3}$ HSG 模型は、 $\widehat{su}(n-2)_2/[\widehat{u}(1)]^{n-3}$ コセット共形場理論の可積分変形として得られる。従って、模型の作用は

$$S_{\text{HSG}} = S_{\text{coset}} + \beta \int d^2x \Phi \quad (4.1)$$

という形を取る。ここで、 $\Phi(\tilde{M}_s)$ は $su(n-2)$ の随伴表現における重み 0 演算子の線形結合であり、共形次元 $\Delta = \bar{\Delta} = (n-2)/n$ を持つ。線形結合の係数は質量パラメータに依存し、この模型の可積分変形は多次元パラメータ変形になっている。これは、この可積分模型の大きな特徴の 1 つである。また次元解析から、結合定数 β は無次元結合定数 κ_n と質量スケール M によって

$$\beta = -\kappa_n M^{2(1-\Delta)} \quad (4.2)$$

と表されることがわかる。 $\widehat{su}(2)_k/\widehat{u}(1)$ に付随する HSG 模型は、HSG 模型の最も単純な場合になるが、これは複素 sine-Gordon 模型、あるいは、極小 (minimal) A_{k-1} アファイン戸田模型になる。

HSG 模型は対角な厳密 S-行列を持つ。その粒子のスペクトルは、互いに相互作用し合う極小アファイン戸田模型のスペクトルのコピーからなる。例えば、 $\widehat{su}(N)_k/[\widehat{u}(1)]^{N-1}$ HSG 模型のスペクトルは図 12 に要約される。図のように $N-1$ 列の粒子の組があ

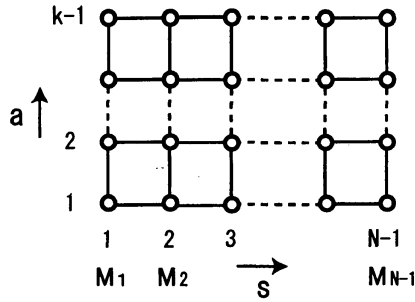


図 12: $\widehat{su}(N)_k/[\widehat{u}(1)]^{N-1}$ HSG 模型のスペクトル

り、それぞれの列内には $k-1$ 個の粒子が含まれる。列内の粒子の質量の比は $M_s^a = (\sin \frac{\pi a}{k} / \sin \frac{\pi}{k}) M_s$ で与えられる。これは、極小 A_{k-1} アファイン戸田模型のスペクトルと同じである。それぞれの列の質量スケール M_s は独立なパラメタであり、相対質量スケール $\tilde{M}_s$ を用いると $M_s = \tilde{M}_s M$ となる。我々の議論している $\widehat{su}(n-2)_2/[\widehat{u}(1)]^{n-3}$ HSG 模型では、縦方向の長さが 1 となり、図 12 は図 8 の A_{n-3} Dynkin 図に帰着する。

このような、極小曲面、TBA 方程式、2 次元可積分模型、CFT/UV 極限での共形場理論の間の関係がわかると、残り関数 (3.23) を CFT/UV 極限の周りで展開することは（少なくとも）概念的には明確である：問題となる諸量を (4.1) 中の摂動項に関して CFT 極限の周りで摂動展開すればよい。このような摂動の枠組みを共形摂動理論 (conformal perturbation theory; CPT) と言う。また、これまでの一連のつながりから、極小曲面の境界の正多角形極限周りの変形が、コセット共形場理論から HSG 模型への繰り込み群 (renormalization group; RG) の流れに相当していることがわかる (図 13)。

4.2 自由エネルギー部分の展開

CPT に基づいて残り関数の展開を実行しよう。質量パラメタ m_s が与えられた時、残り関数 R_{2n} には $A_{\text{free}}, \Delta A_{\text{BDS}}$ の 2 つの非自明な部分があった。まず、 A_{free} の展開を考えよう。

A_{free} は 2 次元可積分模型の自由エネルギーに相当し、通常の物理量に対する摂動展開をおこなえばよいことになる。（より正確には、温度と空間のサイズを入れ替えた系

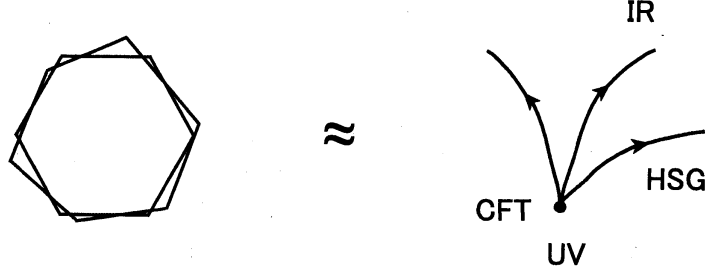


図 13: 極小曲面の変形と 2 次元場の理論の繰り込み群の流れ

の基底エネルギーを摂動展開で求める。) 標準的な手続き [26] に従うと

$$A_{\text{free}} = \frac{\pi}{6} c_n + f_n^{\text{bulk}} + \sum_{p=2}^{\infty} f_n^{(p)} l^{4p/n} \quad (4.3)$$

の形の展開を得る。第 1 項 $c_n = (n-2)(n-3)/n$ は、 $\widehat{su}(n-2)_2/[\widehat{u}(1)]^{n-3}$ コセット共形場理論の中心電荷 (central charge) である。第 2 項は、バルク項と呼ばれ A_{periods} と相殺することがわかる。級数の各項は摂動演算子 Φ による摂動から来る。最低次の寄与は $f_n^{(2)} = \frac{\pi}{6} C_n^{(2)} \kappa_n^2 G^2(\tilde{M}_s)$ となる。ここで、 $C_n^{(2)} = 3(2\pi)^{2(n-4)/n} \gamma^2\left(\frac{n-2}{n}\right) \gamma\left(\frac{4-n}{n}\right)$, $\gamma(x) := \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$, そして、 $G(\tilde{M}_s)$ は

$$\langle \Phi(x) \Phi(0) \rangle = G^2(\tilde{M}_s) |x|^{-4\Delta} \quad (4.4)$$

で定義される 2 点関数の規格化因子である。この因子の $\tilde{M}_s$ -依存性は後に議論する。

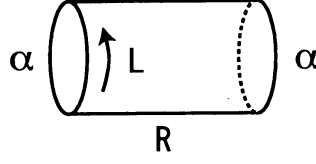
4.3 ΔA_{BDS} と T-関数、g-関数

次に ΔA_{BDS} の展開を考えよう。まず、(3.22) のようなカusp座標の複比と Y-関数の関係、Y-関数と T-関数の関係 (3.14) そして T-/Y-系 (3.16), (3.17) を用いると、 ΔA_{BDS} 中の $c_{i,j}^{\pm}$ が T-関数を用いて

$$c_{i,j}^+ = T_{|i-j|-1}^{[i+j]}(0), \quad c_{i,j}^- = T_{|i-j|-1}^{[i+j+1]}(0) \quad (4.5)$$

と簡潔に表されることがわかる。ここで、角括弧は引数のシフト $f^{[k]}(\theta) := f(\theta + \pi i k/2)$ を表す。従って前節で触れたように、残り関数の各項が 2 次元可積分模型の言葉で簡潔に表されることが確かめられる。

このことから、 ΔA_{BDS} を展開するためには T-関数を展開すればよいことがわかる。ここで重要な事実は、T-関数が境界エントロピーあるいは g-関数と呼ばれる物理量と

図 14: 円筒分配関数 $Z_{(\alpha|\alpha)}$

関係しているということである [29–31]。この g -関数は、図 14 の円筒分配関数をエネルギー固有状態によって

$$Z_{(\alpha|\alpha)} = \langle \alpha | e^{-RH} | \alpha \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathcal{G}_{|\alpha}^{(k)}(l) \right)^2 e^{-RE_k} \quad (4.6)$$

のように展開した時の最低エネルギー（基底）状態からの寄与として定義される：

$$(g\text{-関数}) \sim \log \mathcal{G}_{|\alpha}^{(0)}. \quad (4.7)$$

この定義から、大まかに言うと g -関数は境界 α を与えた時の基底状態の縮退度を数えていることがわかる。ここでは詳細には立ち入らないが、 T -関数、 g -関数の満たす積分方程式を比べることにより、適当な境界に対応する g -関数の比が T -関数に一致していることが確かめられる。我々の場合の正確な関係は [15–17] に与えられている。

4.4 T -関数、 ΔA_{BDS} の展開

これで T -関数および ΔA_{BDS} の CFT/UV 極限周りの展開の下準備ができたことになる。 T -関数を展開するためには、さらに、 T -系から従う T -関数の準周期性

$$T_s^{[n]}(\theta) = T_{n-2-s}(\theta) \quad (4.8)$$

を用いる。この準周期性と T -関数の解析性そして g -関数との対応から、 T -関数は

$$T_s(\theta) = \sum_{p,q=0} t_s^{(p,2q)} l^{(1-\Delta)(p+2q)} \cosh\left(\frac{2p}{n}\theta\right), \quad (4.9)$$

$t_{n-2-s}^{(p,2q)} = (-1)^p t_s^{(p,2q)}$ のように展開されることがわかる。ここでは簡単のため m_s が実の場合の展開を示した。この展開を T -系 (3.16) に代入すると、低次の展開係数が

$$\begin{aligned} t_s^{(0,0)} &= \sin\left(\frac{s+1}{n}\pi\right) / \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \\ t_s^{(1,0)} &= t_s^{(0,2)} = t_s^{(1,2)} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

のように求まる。

前小節の定義から g -関数は自由エネルギーの境界からの寄与とも見做せる。従って、バルクの自由エネルギーであった A_{free} と同様に、CFT 極限周りでのこの物理量の展開を考えることは概念的には明確である。但し、今の場合は境界のある系の共形摂動理論を用いることになる。(元の極小曲面や TBA 方程式の立場から見た時のこの境界の意味は明らかとはなっていない。) 具体的には、[30,31] 中の一般的な議論を我々の場合に適用することにより

$$\frac{t_s^{(2,0)}}{t_s^{(0,0)}} = -\frac{\kappa_n G \cdot B(1-2\Delta, \Delta)}{2(2\pi)^{1-2\Delta}} \left(\frac{\sin(\frac{3(s+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{(s+1)\pi}{n})} \sqrt{\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{3\pi}{n})}} - \sqrt{\frac{\sin(\frac{3\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}} \right) \quad (4.11)$$

を得る。ここで、 $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ である。また、T-系から導かれる関係式

$$2t_s^{(0,0)}t_s^{(0,4)} + \frac{1}{2}(t_s^{(2,0)})^2 \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = t_{s-1}^{(0,0)}t_{s+1}^{(0,4)} + t_{s+1}^{(0,0)}t_{s-1}^{(0,4)} + \frac{1}{2}t_{s-1}^{(2,0)}t_{s+1}^{(2,0)} \quad (4.12)$$

から、 $t_s^{(0,4)}$ が $t_s^{(2,0)}$ (と定数 $t_s^{(0,0)}$) で表されることがわかる。(4.11) より、 $t_s^{(2,0)}$, $t_s^{(0,4)}$ は全て、例えば、 $t_1^{(2,0)} \propto \kappa_n G(\tilde{M}_s)$ で表される。こうした T-関数の展開を代入することにより、 ΔA_{BDS} の展開を得ることができる。

4.5 残り関数の展開

これまでに議論した A_{free} と ΔA_{BDS} の展開を合わせると、強結合 $2n$ -粒子散乱振幅に対する残り関数の CFT/UV 極限周りでの展開を得る：

$$R_{2n} = R_{2n}^{(0)} + l^{\frac{8}{n}} R_{2n}^{(4)} + \mathcal{O}(l^{\frac{12}{n}}). \quad (4.13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_{2n}^{(0)} &= \frac{\pi}{4n}(n-2)(3n-2) - \frac{n}{2} \sum_{s=1}^{(n-3)/2} \log^2 \left(\frac{\sin(\frac{(s+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{s\pi}{n})} \right), \\ R_{2n}^{(4)} &= \frac{\pi}{6} C_n^{(2)} \kappa_n^2 G^2(\tilde{M}_s) - \frac{n}{4} \left[\sum_{s=1}^{(n-3)/2} A_{n,s} - 2 \left(\frac{t_{(n-3)/2}^{(2,0)}}{t_{(0,0)}^{(n-3)/2}} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

また、

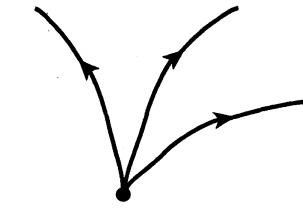
$$\begin{aligned} A_{n,s} &= \left[\left(\frac{t_{s-1}^{(2,0)}}{t_{s-1}^{(0,0)}} \right)^2 + \left(\frac{t_s^{(2,0)}}{t_s^{(0,0)}} \right)^2 \right] \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{2t_{s-1}^{(2,0)}t_s^{(2,0)}}{t_{s-1}^{(0,0)}t_s^{(0,0)}} \\ &\quad + \left[\left(\frac{t_{s-1}^{(2,0)}}{t_{s-1}^{(0,0)}} \right)^2 - \left(\frac{t_s^{(2,0)}}{t_s^{(0,0)}} \right)^2 - 4 \left(\frac{t_{s-1}^{(0,4)}}{t_{s-1}^{(0,0)}} - \frac{t_s^{(0,4)}}{t_s^{(0,0)}} \right) \right] \log\left(\frac{t_s^{(0,0)}}{t_{s-1}^{(0,0)}}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

である。第 1 項 $R_{2n}^{(0)}$ は、CFT/UV 極限あるいは正多角形極限での残り関数である。また、散乱振幅はカスプの巡回シフト $x_i \rightarrow x_{i+1}$, あるいは、Y-関数の引数のシフト $Y_s^{[k]} \rightarrow Y_s^{[k+1]}$ に対応する $\mathbb{Z}_{2n}$ -対称性を持つ。この対称性のため、この次数までの残り関数の展開には $t_s^{(3,0)}, t_s^{(2,2)}, t_s^{(4,0)}$ が現れず、 $R_{2n}^{(4)}$ は $t_1^{(2,0)}$ または $\kappa_n G$ のみで表されることがわかる。ここまでの議論では質量パラメタ m_s は実であるとしてきたが、この $\mathbb{Z}_{2n}$ -対称性により、複素 m_s に対しては展開結果に現れる $t_1^{(2,0)}$ または $\kappa_n G$ をこれらの絶対値で置き換えればよいこともわかる。(実 m_s の仮定は、g-関数の展開の際に用いた境界可積分性を保つためにも必要である。)

4.6 運動量依存性

前小節で導いた展開では、まだ、 $\kappa_n G(\tilde{M}_s), t_s^{(2,0)}$ が質量パラメタの関数として定まっていない。これは元の摂動演算子 $\kappa_n \Phi(\tilde{M}_s)$ の質量パラメタ依存性が定まっていないことに起因している。このような、質量パラメタと摂動の結合定数/摂動演算子との関係を質量-結合関係 (mass-coupling relation) という。HSG 模型は複数の質量スケールを持っており、このような多次元パラメタ可積分変形に対する質量-結合関係を一般的に求めることは難し問題である。しかし、例えば、 $M_s = \delta_{s,r} M$ あるいは $M_s = (\delta_{s,r} + \delta_{s,n-2-s})$ のように質量スケールが 1 つになる場合には、対応する TBA 系が対角 $\widehat{su}(2)$ コセツト共形場理論や極小共形場理論の可積分変形で得られる模型の TBA 系に帰着し、質量-結合関係を求めることが可能になる場合がある。さらに、後に具体的に見るように、このような単一質量スケールの結果を組み合わせ、より一般的な場合の質量-結合関係を得ることも可能である。

質量-結合関係を用いると前小節の結合定数 $\kappa_n G(\tilde{M}_s)$ による展開式から TBA 方程式に現れる質量パラメタに関する展開式を得ることができる。さらに、この展開を粒子の運動量あるいはカスプ座標の複比で表すためには、(複素) m_s に対する T-関数の展開を (3.22) のような Y-関数と複比の関係式に代入し、これを逆解きして $m_s = m_s(k_i)$ のように質量パラメタを運動量/複比で表した後、これを質量パラメタによる展開式に代入する。このようにして、質量パラメタ空間あるいは運動量/カスプ座標の複比の空間の CFT/UV 極限の周りで、質量スケールを媒介変数とした軌道に沿って強結合散乱振幅の解析的な展開式が得られるのである (図 15)。



CFT/UV/正多角形極限

図 15: CFT/UV/正多角形極限周りの解析的展開の概念図

4.7 強結合 8-, 10 -粒子散乱振幅

これまでの一般的な議論を踏まえ、CFT/UV 極限周りの解析的展開式の具多例を見てみよう。AdS₃ 中の極小曲面に対応する 2 次元的な運動量配位では $2n$ -粒子散乱振幅のカस्प座標の複比の数が $2(n-3)$ であったことを思い出すと、最も簡単な残り関数は 8-粒子散乱振幅で現れることがわかる。この場合の残り関数に対しては、その積分表示が具体的に与えられており [8], UV 極限周りの全次数での展開式を導くことができる [15]。本講演で議論した HSG 模型に基づく展開の最も簡単な場合は、従って、10-粒子散乱振幅の場合になる。この場合の TBA 系は 2 つ複素質量パラメタ $m_s = \tilde{M}_s l = e^{i\varphi_s} |\tilde{M}_s| l$ ($s = 1, 2$) を持つ系となる。これまでの議論に従い、残り関数 R_{10} の CFT/UV 極限 ($l \rightarrow 0$) 周りでの展開は

$$R_{10} = R_{10}^{(0)} + R_{10}^{(4)} \cdot l^{8/5} + \mathcal{O}(l^{12/5}) \quad (4.16)$$

となり、展開係数は

$$\begin{aligned} R_{10}^{(0)} &= \frac{39}{20}\pi - \frac{5}{2}\log^2\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right), \\ R_{10}^{(4)} &= \left(-\frac{1}{5}\tan\frac{\pi}{5} + C_1\right) \cdot |t_1^{(2,0)}|^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

および

$$\begin{aligned} t_1^{(2,0)} &= C_2(\tilde{M}_1^{4/5} + \tilde{M}_2^{4/5} - C_3\tilde{M}_1^{2/5}\tilde{M}_2^{2/5}), \\ C_1 &= 20\cos^4\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(1 - 5^{-1/2}\log\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)\right), \\ C_2 &= \frac{1}{4 \cdot 6^{1/5}}\Gamma(-1/5)\left[10\cos\frac{\pi}{5}\gamma(3/5)\gamma(4/5)\right]^{1/2}, \\ C_3 &= 2 - \left(\frac{3}{\pi^2}\right)^{1/5}\gamma(1/4)^{4/5} \end{aligned} \quad (4.18)$$

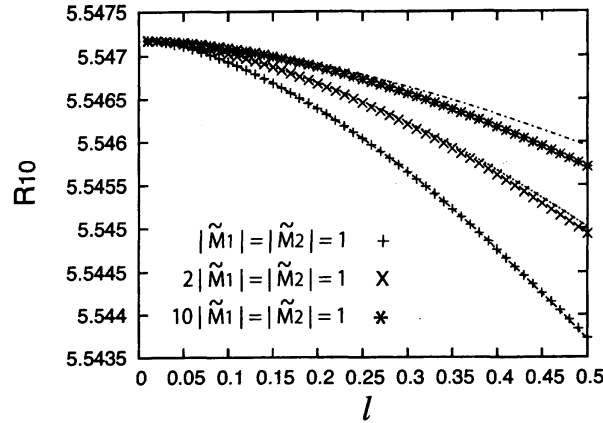


図 16: 強結合 10-粒子散乱振幅の残り関数

で与えられる。適当な質量パラメタに対して、上の結果と数値的に TBA 方程式を解いて得られた残り関数をプロットしたグラフを図 16 に示す。質量パラメタの位相は $\varphi_1 = \pi/20, \varphi_2 = \pi/5$ とした。破線は (4.16) の解析的展開、(+, x, *) は数値計算の結果を表す。CFT/UV 極限の周りで我々の解析的結果と数値計算がよく合っていることが見て取れる。

4.8 $\text{AdS}_4, \text{AdS}_5$ 中の極小曲面

これまで、粒子の運動量が $\mathbb{R}^{1,1} \subset \mathbb{R}^{1,3}$ に含まれる運動量配位の場合に、強結合散乱振幅に対応する AdS_3 中の極小曲面を主に議論してきた。最後により一般的な運動量配位の場合について簡単に言及しておきたい。

まず、粒子の運動量が $\mathbb{R}^{1,2} \subset \mathbb{R}^{1,3}$ に含まれる場合は AdS_4 中の極小曲面を考えることになる。この場合も (3.19) を拡張した形の積分方程式によって極小曲面が解析され [10]、 n -粒子散乱の場合の積分方程式が $\widehat{su}(n-4)_4/[\widehat{u}(1)]^{n-5}$ コセット共形場理論の可積分変形で得られる HSG 模型の TBA 方程式となっていることがわかる [11]。この事実に基づき、 AdS_3 中の極小曲面の場合と同様の解析をおこなうことができる [17]。単一質量スケールの場合、この TBA 系は対角 $\widehat{su}(4)$ コセット共形場理論あるいは W 極小共形場理論の可積分変形で得られる模型の TBA 系となり、質量-結合関係を求められる場合がある。これらの結果を合わせると CFT/UV 極限周りで強結合 6-粒子、7-粒子散乱振幅の主要次数までの完全な解析的展開を得ることができる。

粒子の運動量が一般の $\mathbb{R}^{1,3}$ に含まれる場合は AdS_5 中の極小曲面を考えることにな

る。この場合の極小曲面に対する TBA-型の積分方程式も知られているが [10]、最も単純な 6-粒子散乱振幅の場合以外では、対応する 2 次元可積分模型・共形場理論は同定されていない。6-粒子散乱の場合、積分方程式は $\mathbb{Z}_4$ -パラフェルミオン共形場理論の可積分変形で得られる $\mathbb{Z}_4$ -可積分模型を適当な演算子でツイストした模型の TBA 方程式となっている [9, 14]。

5 まとめ

4 次元極大超対称 ($\mathcal{N} = 4$) $SU(N_c)$ ゲージ理論は、ゲージ/重力双対性あるいは AdS/CFT 対応により、 $AdS_5 \times S^5$ 中の超弦理論と等価であり、これらの理論は 1 つの理論の異なった見方に対応すると考えられている。't Hooft 結合 $\lambda = g_{YM}^2 N_c = R^4/(\alpha')^2$ を固定し $N_c \rightarrow \infty$ とする 't Hooft 極限においては、 $\lambda \ll 1$ ではゲージ理論の摂動論的な見方がよく、 $\lambda \gg 1$ では弦/重力理論の古典論的な見方がよい。この強/弱双対性により、通常の摂動論では解析不可能な強結合 ($\lambda \gg 1$) ゲージ理論が古典弦/重力を用いて解析可能となる。

本講演では、特に、ゲージ粒子 (グルーオン) の強結合における散乱振幅を議論した。この散乱振幅は、AdS 空間中の光的多角形を境界とする極小曲面の面積として評価される。こうした特別な境界を持つ極小曲面の構成は一般には困難であるが、散乱振幅の評価に必要な曲面の面積は 2 次元可積分系を用いて解析することが可能となり、4 次元超対称ゲージ理論、10 次元弦理論そして 2 次元可積分系の間の非常に興味深いつながりが見えてくる (図 11)。より具体的には、極小曲面の方程式に付随する線形系の Stokes 係数が 2 次元可積分模型の有限サイズ効果の解析に典型的に現れる熱力学的ベーテ仮説 (TBA) 型の積分方程式を満たしていることがわかる。特に、極小曲面が AdS_3 , AdS_4 に含まれる場合にはこの積分方程式は実際に等質 sine-Gordon (HSG) 模型の TBA 方程式と一致している。この事実に基づき、対応する極小曲面の境界 (の空間射影) が正多角形になる運動量配位周りで散乱振幅の解析的展開式を導いた。

強結合散乱振幅を巡る理論の不思議なつながりには未だに明らかとなっていない多くの問題がある。例えば、なぜ極小曲面の問題に TBA 方程式が現れるのか、なぜ解析の途中で用いられた T-関数と g-関数 (境界エントロピー) が関係するのか、g-関数を与える境界のある 2 次元系は元の 4 次元理論あるいはバルクの HSG 模型の何に対応しているのか、等々。また、2 次元可積分模型に基づいた強結合散乱振幅の解析の、一般的な運動量配位/ AdS_5 中の極小曲面の場合への拡張は未だなされていない。本講演では強結合極限 $\lambda \gg 1$ に焦点を当てたが、1 節で述べたスペクトル問題の場合のよう

に有限 λ の散乱振幅について最近興味深い研究がなされている [32]。この場合の 2 次元可積分系との関わりを解明することもまた今後の大きな課題の 1 つであろう。さらに 1 節で述べたように、AdS 空間中の極小曲面は一般的に強結合ゲージ理論の Wilson ループの真空期待値を与える。AdS 空間あるいはその Euclid 版である双曲空間中の極小曲面に関するこれらの問題に対して、数学・物理双方の間の対話が望まれる。

謝辞

本研究会で講演の機会を与えて下さった世話人の方々に感謝します。また、本講演の元となった研究の共同研究者である、初田泰之氏、伊藤克司氏、酒井一博氏に感謝します。筆者の研究は JSPS 科研費 23540290, 24540248 の助成を受けています。

参考文献

- [1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.
- [2] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rept. **323** (2000) 183.
- [3] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, hep-th/0201253.
- [4] J. A. Minahan and K. Zarembo, JHEP **0303** (2003) 013.
- [5] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Phys. Rev. D **69** (2004) 046002.
- [6] N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday, Z. Bajnok, J. M. Drummond, L. Freyhult, N. Gromov and R. A. Janik *et al.*, Lett. Math. Phys. **99** (2012) 3.
- [7] L. F. Alday and J. M. Maldacena, JHEP **0706** (2007) 064.
- [8] L. F. Alday and J. Maldacena, JHEP **0911** (2009) 082.
- [9] L. F. Alday, D. Gaiotto and J. Maldacena, JHEP **1109** (2011) 032.
- [10] L. F. Alday, J. Maldacena, A. Sever and P. Vieira, J. Phys. A **43** (2010) 485401.
- [11] Y. Hatsuda, K. Ito, K. Sakai and Y. Satoh, JHEP **1004** (2010) 108.
- [12] S. -J. Rey and J. -T. Yee, Eur. Phys. J. C **22** (2001) 379.
- [13] J. M. Maldacena, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859.

- [14] Y. Hatsuda, K. Ito, K. Sakai and Y. Satoh, JHEP **1009** (2010) 064.
- [15] Y. Hatsuda, K. Ito, K. Sakai and Y. Satoh, JHEP **1104** (2011) 100.
- [16] Y. Hatsuda, K. Ito and Y. Satoh, JHEP **1202** (2012) 003.
- [17] Y. Hatsuda, K. Ito and Y. Satoh, JHEP **1302** (2013) 067.
- [18] L. F. Alday and R. Roiban, Phys. Rept. **468** (2008) 153.
- [19] Z. Bern, L. J. Dixon and V. A. Smirnov, Phys. Rev. D **72** (2005) 085001.
- [20] V. Del Duca, C. Duhr and V. A. Smirnov, JHEP **1005** (2010) 084.
- [21] A. B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu and A. Volovich, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 151605.
- [22] K. Sakai and Y. Satoh, JHEP **0910** (2009) 001.
- [23] K. Sakai and Y. Satoh, JHEP **1003** (2010) 077.
- [24] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, J. Phys. A **44** (2011) 103001.
- [25] Al. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. B **253** (1991) 391.
- [26] Al. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **342** (1990) 695.
- [27] C. R. Fernandez-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, Nucl. Phys. B **484** (1997) 609.
- [28] L. J. Dixon, J. M. Drummond, M. von Hippel and J. Pennington, arXiv:1308.2276 [hep-th].
- [29] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, Commun. Math. Phys. **177** (1996) 381.
- [30] P. Dorey, I. Runkel, R. Tateo and G. Watts, Nucl. Phys. B **578** (2000) 85.
- [31] P. Dorey, A. Lishman, C. Rim and R. Tateo, Nucl. Phys. B **744** (2006) 239.
- [32] B. Basso, A. Sever and P. Vieira, arXiv:1303.1396 [hep-th].