

## Monge - Ampère 方程式について

京都教育大 森本 徹 (Toku Morimoto)

序. 独立変数  $x, y$  未知関数  $z$  についての 2 階の方程式:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

は Monge - Ampère 方程式として古くから知られてゐる. ここで  $r, s, t$  は 2 階の偏微分  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  を表わす. また  $H, K, \dots, N$  は  $x, y, z$  及び  $p (= \frac{\partial z}{\partial x}), q (= \frac{\partial z}{\partial y})$  の関数である.

1 未知関数の 1 階の偏微分方程式系については Hamilton, Jacobi, Lie 等の理論により極めて澄明な理解が得られてゐる. 高階の方程式一般に対してはむしろこのような簡明さを望むことはできないが, 2 階の非線型方程式の中で Monge - Ampère 方程式の族は, ある意味で 1 階の方程式と近い点もあり, 幾何学的になじみやすく, 一方内容も多様性に富んでいて, 興味深い対象であると思われる.

Monge - Ampère 方程式の座標によらない intrinsic な定

式は、この方程式を接触多様体上の外微分式系とみなすこと  
によって得られる。即ち 5次元接触多様体  $M$  上の外微分式系  
 $\Sigma$  で接触形式  $\omega$  とある 2 次の外微分形式  $\theta$  及びこれらの外微  
分から生成されるものを、拡張された意味での Monge-Ampère  
方程式と考える。そしてその最大次元 (2 次元) の積分多様  
体を拡張された意味での解と考える。

この観点に立つと、幾何学的に興味深い問題がいろいろ生  
じてくる。接触同値による分類の問題、積分の問題、大域的  
な問題、解の特異点、等々。

ここでは、まず Monge-Ampère 方程式の輪郭を理解してい  
ただくために、[5] に従って Monge-Ampère 方程式の定式、  
おおよかな分類について述べる。積分についても少し言及す  
る。続いて、接触多様体上に大域的に定義された Monge-Ampère  
方程式の 1 つの興味深い例として、“ $rt - s^2 = 0$ ” 型の Monge-  
Ampère 方程式が 3 次元射影空間 (の射影余接束) 上に自  
然に定義されることを示す。そしてその大域解について 1 つ  
の顕著な事実を述べる。最後に解の特異点について問題の方  
向を述べ、石川剛郎氏による結果に触れる。

1. Monge-Ampère 外微分式系.  $M$  を 5 次元接触多様  
体とし、その接触構造を  $D$  で表す。  $D$  は接束  $TM$  の余次元 1

の部分集で、局所的に接触形式  $\omega$  を用いて  $\omega = 0$  で定義される。

$M$  上の外微分式系  $\Sigma$  で局所的に  $\omega$  とある 2 次の外微分形式  $\theta$  及びそれらの外微分から生成されるものを  $M$ -A 系と呼ぶ。そしてその最大次元の積分多様体を  $M$ -A 系の解と呼ぶ。

これは Monge-Ampère 方程式の自然な拡張であることを見よう。今  $N \rightarrow X$  を fibred manifold とし  $\dim N = 3, \dim X = 2$  とする。この局所切断  $\sigma$  の 1-jet  $j'_x \sigma$  全体のなす空間を  $J^1(N; X)$  で表わす。これには自然な接触構造が入る。

$X, N$  の局所座標系を  $(x, y), (x, y, z)$  とすると  $J^1$  の局所座標系として  $(x, y, z, p, q)$  (ここで  $\phi(j'_x \sigma) = \frac{\partial(z \circ \sigma)}{\partial x}$ ,  $q(j'_x \sigma) = \frac{\partial(z \circ \sigma)}{\partial y}$ ) がとれ、 $J^1$  の接触構造は

$$\omega = dz - p dx - q dy = 0$$

によって定義される。

さて今  $J^1$  上に  $M$ -A 系  $\Sigma$  が定義されているとし、その解  $S$  を考えよう。  $S$  上  $\omega$  は消えるので、 $S$  は特に Legendre 多様体である。ここで  $J^1$  の Legendre 多様体について次のことに注意しよう。  $N \rightarrow X$  の局所切断  $\sigma$  に対して  $J^1 \rightarrow X$  の局所切断  $j'_x \sigma$  が定まり、これをグラフと見ると  $j'_x \sigma$  は  $J^1$  の Legendre 多様体である。逆に  $J^1$  の Legendre 多様体  $L$  で  $L \rightarrow X$  が immersion になっているものは局所的に  $j'_x \sigma$  の

形をしてゐる。

そこで  $S$  は  $J^1\sigma$  の形であるとし、局所座標で  $Z \cdot \sigma = f(x, y)$  とする。  $\Sigma$  のもう一つの生成元 2-形式  $\theta$  を局所座標  $(x, y, z, p, q)$  で表現し、  $S$  が  $\theta$  と消滅条件と書き上げてもよく、 " $S$  が  $\Sigma$  の解  $\iff f$  は冒頭に書いた Monge-Ampère 方程式の解" が分る。

従って  $J^1(N, X)$  上の  $M-A$  系を  $N \rightarrow X$  の切断に対する微分方程式とみるならば、これは通常の Monge-Ampère 方程式に他ならない。

fibration  $N \rightarrow X$  を与えることは独立変数の空間を指定するという意味を持つが、この指定をはずすと次のようになる。

$N$  を 3次元の多様体とし  $q_2(N; 2)$  を  $N$  の接空間の 2次元部分空間  $\alpha$  なる  $N$  上の Grassmann bundle とする。これは射影余接束  $PT^*N$  と同一視される。  $q_2(N; 2)$  には自然な接触構造が次のように定義される。 2次元部分空間

$\eta \subset T_x N$  に対して  $D_\eta = (\pi_*)^{-1}(\eta)$  と定める。

ここで  $\pi$  は自然な射影  $q_2 \rightarrow N$  を表わす。

$N$  の 2次元部分多様体  $Y$  に対して その lift

$$\tilde{Y} = \{ (y, T_y Y) \mid y \in Y \}$$

は  $q_2$  の Legendre 多様体であり、逆に  $q_2$  の Legendre 多様体  $L$  で  $L \rightarrow N$  が immersion となるものは、局所

的に上の形で与えられる。

従って  $\mathcal{O}_Y(N)$  上に  $M$ -A 系  $\Sigma$  が与えられるとき、これを  $N$  の曲面  $Y$  に対する Monge-Ampère 方程式と見ることができ、( $Y$  が  $\Sigma$  の解とは  $\tilde{Y}$  が  $\Sigma$  の積分多様体と定義する。)

任意の接触多様体は局所的には常に  $J^1(N, X)$  あるいは  $\mathcal{O}_Y(N)$  と同型であることに注意すると、我々の定義した  $M$ -A 系は Monge-Ampère 方程式の intrinsic な定式を与えることが納得されるよう。

2. 特性系, 分類.  $\Sigma$  を接触多様体  $(M, D)$  上の  $M$ -A 系とし、接触形式  $\omega$  と 2-形式  $\theta$  から生成されるとする。  $\Sigma$  の特性系  $\mathcal{V}(\Sigma)$  を  $\Sigma$  の 1 次元の singular integral element 全体の集合とする。即ち  $m \in M$  に対して

$$\mathcal{V}(\Sigma)_m = \{ v \in D_m : v \lrcorner \theta \equiv 0 \pmod{\omega, v \lrcorner d\omega} \}$$

とあり、 $\mathcal{V}(\Sigma) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{V}(\Sigma)_m$  とおく。

複素カラゴリーでは各点  $m \in M$  において次の場合に分類:

$$(T) \quad \mathcal{V}(\Sigma)_m = D_m$$

$$(H) \quad \mathcal{V}(\Sigma)_m = E_m \cup F_m, \quad \text{ここで } E_m, F_m \text{ は}$$

$D_m$  の 2 次元部分ベクトル空間で、 $d\omega$  に属して

$$E_m^\perp = F_m, \quad \text{かつ } D_m = E_m \oplus F_m$$

(P)  $V(\Sigma)_m$  は  $D_m$  の 2次元の isotropic subspace

EP3 上の (H) で  $E_m = F_m$  と退化する場合.

上の各々の場合に応じて  $\Sigma$  は  $m$  によって trivial, hyperbolic, parabolic という。

到了所 hyperbolic 又は 到了所 parabolic と仮定すると,  $D$  の階数 2 の部分束  $E, F$  が存在して

$$V(\Sigma) = E \cup F, \quad E^\perp = F.$$

このようにして  $M$ - $A$  系  $\Sigma$  にその特性系  $E, F$  が付随するが, 逆に  $D$  の階数 2 の部分束  $E$  を与えるとそれを特性系の一つに持つような  $M$ - $A$  系が唯一つ定まる。このようにして  $M$ - $A$  系の幾何は 接触構造とその階数 2 の部分束との組  $(D, E)$  の幾何に帰着する。

注意. 独立変数の数が 2 以上の時も  $M$ - $A$  系は同様に定義できるが, 特性系は格段に複雑になる。

さて一般に多様体  $M$  の接束  $TM$  の部分束  $E$  が与えられたとき  $E$  の derived system が次のように定義される。  $E$  の切断の芽  $\alpha$  は層  $\underline{E}$  で表され,  $TM$  の部分層  $E^{(p)}$  ( $p=0, 1, \dots$ ) を次で決める:

$$\begin{cases} E^{(0)} = \underline{E} \\ E^{(p+1)} = E^{(p)} + [E^{(p)}, E^{(0)}] \end{cases}$$

必要なら regularity は仮定して,  $E^{(p)}$  はベクトル束  $E^{(p)}$  の

切断の芽  $\alpha$  は  $\Sigma$  層であるとする。今特に  $\dim M = 5$  とする  
 には  $E^{(1)}$  の階数は次の場合に限られる。

$$E^{(0)} \subset E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset E^{(3)}$$

|          |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|
| case (0) | 2 | 2 |   |   |
| case (1) | 2 | 3 | 3 |   |
| case (2) | 2 | 3 | 4 | 4 |
| case (3) | 2 | 3 | 4 | 5 |
| case (4) | 2 | 3 | 5 | 5 |

よって  $\Sigma$  の特性系  $V(\Sigma) = E \cup F$  に対して,  $E, F$  が上の  
 case (1), case (4) のとき  $\Sigma$  を type  $H_{(2,j)}$ ,  $E = F$  で  $E$  が  
 case (1) のとき type  $P_i$  ということにしよう。

命題 (Goursat [1]).  $\Sigma$  が  $E$  または  $F$  が完全積分可能  
 ならば,  $E = F$  で  $\Sigma$  は  $rt - s^2 = 0$  に局所的に接触  
 変換で同値となる。

定理 (die)  $\Sigma$  が type  $H_{(1,1)}$  ならば  $\Sigma$  は局所  
 的に接触変換で  $s = 0$  に同値となる。

証明は [7], [6] を参照。

各 type  $H_{(2,j)}$  ( $1 \leq i \leq j \leq 4$ )  $P_i$  ( $i = 0, 2, 3, 4$ )  
 の  $M$ - $A$  系が存在することと注意しておく。幾何構造の方  
 法を用いるとさらに詳しい分類が可能である。よって  $M$ - $A$   
 系は極めて多様で完全に分類することは不可能。

最も generic な type  $H(4,4)$  に属し かつ homogeneous な方程式の例を挙げて 示そう。

$$xt - s^2 = (x - xp - yz)^4.$$

3. 積分. 特性系を用いると解は次のように特徴付けられる。

命題.  $\Sigma$  を接触多様体  $M$  上の  $M$ -A 系とし,  $\gamma$  の特性系を  $v(\Sigma) = E \cup F$  とする.  $M$  の 2 次元の部分多様体  $S$  が  $\Sigma$  の解であるための必要十分条件は,  $S$  は Legendre 多様体であり かつ任意の  $x \in S$  において

$T_x S \cap E_x \neq 0$  又は (又は, かつ)  $T_x S \cap F_x \neq 0$  が成り立つことである。

これが特性系を用いて解を求めようとするときの基礎となる。  $E$  または  $F$  が 2 つの独立な第 1 積分を持つとき (即ち  $E^{(1)}$  又は  $F^{(1)}$  が完全積分可能のとき)  $\Sigma$  は Monge 可積分と呼ばれ, 一般に Cauchy 問題は 特性方向への積分によって解くことができる (Monge の解法)。しかしこの条件を満たさない Monge-Ampère 方程式も沢山ある。これらに対してどのような解法があるかどうか。松田道彦氏による研究 [4] があり, Bäcklund 変換とも密接に関係し, 興味ある問題がいろいろあるが, まだ良く解明されてはいない。



4.  $rt - s^2 = 0$  の大域的モデル.  $V$  を 4 次元のベクトル空間としその双対を  $V^*$ , それらの射影化を  $P(V)$ ,  $P(V^*)$  が表わす。

$Q = \{ (x, \xi) \in P(V) \times P(V^*) : \langle x, \xi \rangle = 0 \}$   
とみると, 自然な射影

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ \rho \swarrow & & \searrow \rho' \\ P(V) & & P(V^*) \end{array}$$

があって,  $Q$  は  $P(V)$ ,  $P(V^*)$  の射影余接束と同一視できる:

$$Q \simeq PT^*P(V) \simeq PT^*P(V^*).$$

さらにこれが接触多様体としての同型となるような接触構造  $D$  が  $Q$  上に自然に定義でき,

$$D = \text{Ker } \rho_* \oplus \text{Ker } \rho'_*$$

と直和分解する,

$\text{Ker } \rho'_*$  は  $D$  の階数 2 の部分束なので, これを特性系とする  $M$ - $A$  系が  $Q$  上に一意的に定まる, これを  $\Sigma_0$  で表わそう.  $\text{Ker } \rho_*$  は完全積分可能なので  $\Sigma_0$  は type  $P_0$  EPS "  $rt - s^2 = 0$  " 型の  $M$ - $A$  系である.  $\Sigma_0$  はこのように射影構造のみから canonical に定まるので, 射影幾何に付随した Monge-Ampère 方程式である.

$Q$  の曲面  $S$  が  $\Sigma_0$  の解であるための条件は, 前節の命題より

り、 $S$  が Legendre 多様体であって  $\rho': S \rightarrow P(V^*)$  の階数が到る所 1 以下になることである。従って  $\Sigma_0$  を  $P(V)$  の曲面に於ける Monge-Ampère 方程式と見ると、 $P(V)$  の曲面  $Y$  が  $\Sigma_0$  の解となるのは、 $\text{rank}(\rho'|_{\tilde{Y}}) \leq 1$  が成り立つときである。ここで  $\tilde{Y}$  は  $Y$  の lift, 即ち  $Y$  の射影法束を表わす。このことから  $\Sigma_0$  の解  $Y$  は線織面であって、その直線に沿って接空間が一定という性質を持つ。例えは affine 座標  $(x, y, z)$  で

$$z^2 = x^2 + y^2$$

と表わされる円錐  $C$  は  $\Sigma_0$  の解である。その  $Q$  への lift  $\tilde{C}$  はトーラスと同相であり、 $C$  は特異点を持つが  $\tilde{C}$  は滑らかであることに注意する。 $P(V)$  内の滑らかな大域解について次の定理が得られる。

定理.  $P(V)$  のコンパクト、連結な  $\Sigma_0$  の解は、 $P(V)$  の平面に限る。

これは Bernstein の定理 “ $x^2 + y^2 = 1$  の全  $(x, y)$ -平面で定義された解は 2 次以下の多項式に限る。” と対比をする。Bernstein の定理は楕円型方程式の性質に由来するが、上の定理は、退化した方程式に対するものであり、射影幾何的性質に由来し、実、複素両カテゴリーで成立つ。

5. 解の特異点.  $\Sigma$  を接触多様体  $M$  上の  $M$ - $A$  系とする.  
 $\Sigma$  の解の特異点を問題にする時, 特異点について3次の区別が必要である.

(i) 本来の特異点, 即ち  $\Sigma$  の積分多様体として  $M$  の中で既に特異点を持つている場合.

(ii) Legendre fibering に関する特異点.  $M = q_2(N)$  と表わされたとき, fibering  $q_2(N) \xrightarrow{p} N$  に関する特異点, 既に  $\Sigma$  の解  $S \subset q_2(N)$  は非特異であるが  $p(S)$  が特異点を持つ場合.

(iii) 独立変数の空間への射影に関する特異点. 即ち  $M = J^1(N; X)$  と表わされたとき, fibering  $J^1(N; X) \rightarrow X$  に関連して現れる特異点.

$M$ - $A$  系の解は特に Legendre variety でもあるが, 方程式の解であることが, 特異点の表し方にどのような制約を与えるか. また相異なる  $M$ - $A$  系が種々沢山あるが, この違いは特異点の表し方にどのような違いを生じるか, など, 色々な問題が考えられる.

ここで石川氏による結果を1つ紹介しよう.

$(x, y, z; p, q) \circ f = (u, v^2, uv^3; v^3, \frac{3}{2}uv)$  と定義される map-germ  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^5, 0$  を考えよう. これは  $\mathbb{R}^5$  の接触形式  $\omega = dz - p dx - q dy$  に

図1で isotropic,  $\mathbb{R}P^3$   $f^*\omega = 0$  が成立つ。接触多様体  $M$  上の isotropic map-germ  $g: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow M$  が上の  $f$  と parametrization と除いて接触同値のとき  $g$  を open umbrella とする。

命題. open umbrella は " $rt - s^2 = 0$ " 型の  $M$ - $A$  系の解になるが, " $s = 0$ " 型の  $M$ - $A$  系の解にはならない。

なお  $PT^*P(V)$  上の " $rt - s^2 = 0$ " 型の  $M$ - $A$  系  $\Sigma_0$  について,  $P(V^*)$  内の曲線の  $PT^*P(V)$  への lift (projective conormal bundle) は常に  $\Sigma_0$  の解になることに注意すると, 石川氏の射影曲線に関する研究 ([2], [3]) から, この方程式の解の特異点についてさらに詳しい情報が得られる。

### References

- [1] E. Goursat, "Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, I, II," Hermann, Paris, 1896, 1898
- [2] G. Ishikawa, Determinacy of envelope of the osculating hyperplanes to a Curve, Hokkaido Univ. Preprint series #150, 1992.

- [3] G. Ishikawa, Developable of a curve and  
determinacy relative to osculation-type,  
Hokkaido Univ. Preprint series #151, 1992.
- [4] 松田道彦, Monge-Ampère方程式について, 数学,  
24-2 (1972), 100 - 118.
- [5] T. Morimoto, La géométrie des équations de Monge-  
Ampère, C.R. Acad. Sci. Paris 289 (2 juillet  
1979), A-25 - A-28.
- [6] T. Morimoto, Geometric structures on filtered  
manifolds, Hokkaido Univ. Preprint series  
#142, 1992.