

S^3 の Heegaard 分解 による π_1 の表示について

東教大理 金戸 武司

§ 1 序

1. 動機

連結な向き付け可能な 3 次元多様体 M の Heegaard 分解は、自然にその基本群 $\pi_1(M)$ の表示を与える。一般に、 M の幾何的な構造が、代数的な側面として、この $\pi_1(M)$ の表示に、どのように反映するかという問題が考えられる。この方向について、Birman - Hilden [1], H. Komuro [2] は、「Heegaard genus 2 の多様体 M は、分解の仕方を工夫して、対応する $\pi_1(M)$ の表示が対称性をもつようにできる」を示した。Birman - Hilden [1] は、又、特に、 $M \approx S^3$ の場合について、常に、 $\pi_1(S^3)$ の「良い」表示 (i.e. relations が conjugate primitive set をなす。) が対応し、これが S^3 の判定法になるという W. Haken の予想に対する反例を

示した。T. Homma - M. Ochiai は, genus 2 の homology sphere M の例をコンピュータで構成し, その中から, homology sphere を選り出す過程で, 典型的な現象として, $M \approx S^3$ の場合は, $\pi_1(M)$ の表示 $\langle a, b : \text{generators}; r_1, r_2 : \text{relations} \rangle$ は, 一方の relation が他方の relation に word として含まれ, この相互代入を繰り返すことによって, triviality が判定できることを指摘した。この報告では, このことが, ある意味で, genus 一般の場合で成立することを示めす。証明に於いて, 最近の S. Suzuki [4] の結果を本質的に使った。当初, D. Myer [3] に依って, genus 2 の場合のみであった。

2. 結果

定理を述べるために, 群の表示について, ニ, 三, 定義しよう。 a_i ($i=1, 2, \dots$) を generator, r_i ($i=1, 2, \dots$) を relation とし, 表示を $\langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n \rangle$ 等と表わすことにする。

定義 1. (relation の変形). 次の type の relations の変形を simple deformation と呼ぶ。

1) cyclic cancelation.

$$r = a_1 \cdots a_i a a_i^{-1} a_{i+1} \cdots a_n \Rightarrow r' = a_1 \cdots a_i a_{i+1} \cdots a_n$$

$$r = a a_1 \cdots a_n a^{-1} \Rightarrow r' = a_1 \cdots a_n$$

2) cyclic change of order

$$r = a_1 a_2 \cdots a_n \Rightarrow r' = a_2 \cdots a_n a_1$$

3) inversion

$$r = a_1 a_2 \cdots a_n \Rightarrow r^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$$

4) substitution

$$\begin{cases} r_1 = a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1} \cdots a_n \\ r_2 = a_1 \cdots a_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1' = a_{m+1} \cdots a_n \\ r_2' = r_2 = a_1 \cdots a_m \end{cases}$$

relations $\{r_i\}$ に simple deformation を繰り返して, $\{r_i'\}$ となるとき, $\{r_i\} \xrightarrow{S} \{r_i'\}$ と書くことにする。

定義2. (「相互代入」で trivial)

表示 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ が simply trivial
 $\Leftrightarrow_{\text{def}} \{r_i\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$

定義3. (表示の equivalence)

(1) 表示 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ が irreducible
 $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ どの relation r_i ($i=1, 2, \dots, n$) も, cyclic cancel-

-ation ができない。

(2) 二つの表示 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle, \langle a_1, a_2, \dots, a_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ が equivalent

$\Leftrightarrow$ それぞれの set of relations $\{r_i\}_{1 \leq i \leq n}, \{r'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を cyclic cancellation によって, irreducible にしたものの $\{\bar{r}_i\}_{1 \leq i \leq n}, \{\bar{r}'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ が cyclic change of order と inversion によって, 一致する。

以上により, 結果は, 次のように述べられる。記号 $\sim$ は 同相 を表わす。

定理 $M \sim S^3$ ならば, M の Heegaard 分解に対応する $\pi_1(M)$ の表示 $\langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n \rangle$ に equivalent な表示 $\langle a_1, \dots, a_n; r'_1, r'_2, \dots, r'_n \rangle$ で simply trivial なものが存在する。

直感的に言えば, $\pi_1(S^3)$ の Heegaard 分解による表示は, cancel pair を適当に挟み込んで, relation を一旦ふくませることによって, 後は, 単調に relations の長さが減少する simple deformations だけによって, trivial となるようにできる。

§2. 準備としての定義と補題

1. 接合空間としての Heegaard 分解

T を genus n の solid torus とし, T_i ($i=1,2$) をその copy とする. M を連結で向き付け可能な 3 次元多様体とする。

定義 4: triple $(M; M_1, M_2)$ が M の genus n の Heegaard 分解とは, 1) $M_i \approx T$ ($i=1,2$), 2) $M = M_1 \cup M_2$ でかつ $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 \cap \partial M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$ を満たすことである。

Heegaard 分解 $(M; M_1, M_2)$ に対して, 条件 1) より, homeomorphism $f_i: T_i \rightarrow M_i$ ($i=1,2$) が存在し, $\varphi := f_1^{-1} f_2|_{\partial T_2}: \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$ とすると, 接着空間 $T_1 \cup_{\varphi} T_2$ は M に同相で, 更に, $(M; M_1, M_2) \approx (T_1 \cup_{\varphi} T_2; T_1, T_2)$ である。必要なら f_i を取り直せば, φ は orientation preserving としてよい。以下, Heegaard 分解の代りに, attaching map φ が与えられたとみなし, その対応する $\pi_1(M) \approx \pi_1(T_1 \cup_{\varphi} T_2)$ の表示を $\pi_1(\varphi)$ で表わす。

2. $\pi_1(\varphi)$ の定義

∂T 上に longitude 系 $\{a_i\}$, meridian 系 $\{b_i\}$ を図 1 のようにとる。 $\{a_i, b_i\}$ は, $\bigcap_{i=1}^n (a_i \cap b_i) = \{*\}$ を基点とする $\pi_1(\partial T)$ の生成系となる。(便宜上, loop と loop の homotopy class を同じ記号で表わすことにする。) $R: T \rightarrow |\bigcup_{i=1}^n a_i|$ を T から longitude 系のな

す bouquet の retraction とする。 $\pi_1(|\bigcup_{i=1}^n a_i|)$ の生成系を同じく, $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ で表わすことにする。

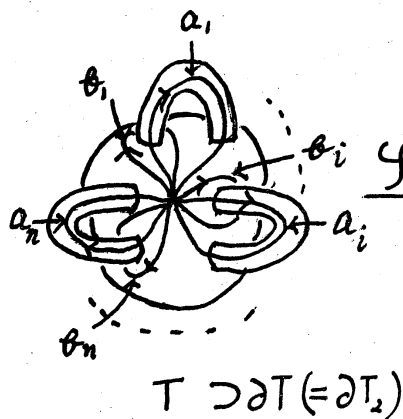


図 1.

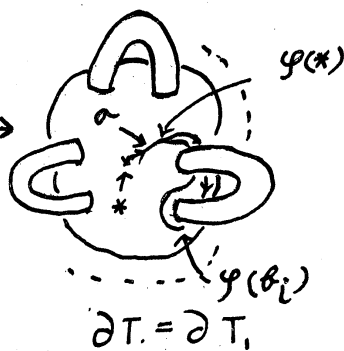


図 2.

$\varphi: \partial T \rightarrow \partial T$ を orientation preserving homeomorphism とし, $*$ と $\varphi(*)$ を結ぶ arc を σ とする。

(図 1, 図 2 参照.)

定義 5. $\pi_1(\varphi) := \langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n \rangle$, $=$
 π_1 , $r_i = r_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = [R(\sigma \cdot \varphi(\theta_i) \cdot \sigma^{-1})] \in \pi_1(|\bigcup_{i=1}^n a_i|)$
 $= \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. T ある。

注意。 r_i は, 又, $\pi_1(|\bigcup_{i=1}^n a_i|) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \approx \langle a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n; \prod_{i=1}^n a_i \theta_i^{-1} a_i^{-1} \theta_i, \theta_1, \dots, \theta_n \rangle \approx \pi_1(\partial T) / \theta_i = 1 (i=1, \dots, n)$
 だから, $\bar{r}_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n) = [\sigma \cdot \varphi(\theta_i) \cdot \sigma^{-1}] \in \pi_1(\partial T)$
 によって, $r_i = r_i(a_1, \dots, a_n) := \bar{r}_i(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)$
 と表わせる。

Van Kampen の定理から, この $\pi_1(\varphi)$ は, $\pi_1(T_1 \cup T_2)$

の表示である。

補題1. $\pi_1(\mathcal{Y})$ は, *equivalence* の範囲で, α の取り方に依らない。

証明. もう一つの arc α' に対応する relation r_i' は,

$$r_i' = [R(\alpha \cdot \mathcal{Y}(\beta_i) \cdot \alpha^{-1})] = [R(\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha \cdot \mathcal{Y}(\beta_i) \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \alpha'^{-1})] = [R(\alpha \cdot \alpha')] [R(\alpha \cdot \mathcal{Y}(\beta_i) \cdot \alpha')] [R(\alpha \cdot \alpha'^{-1})]$$

$$= [R(\alpha \cdot \alpha')] r_i [R(\alpha \cdot \alpha')]^{-1}$$
 だから, r_i, r_i' は, *cyclic cancelation* による *irreducible form* は一致。

補題2. $\mathcal{Y} \underset{\text{isotopic}}{\sim} \mathcal{Y}'$ ならば, $\pi_1(\mathcal{Y}) \underset{\text{equi}}{\approx} \pi_1(\mathcal{Y}')$ 。

証明. $\mathcal{Y}(\beta_i)$ と $\mathcal{Y}'(\beta_i)$ は *free homotopic* だから,
 $[R(\alpha \cdot \mathcal{Y}(\beta_i) \cdot \alpha^{-1})]$ と $[R(\alpha \cdot \mathcal{Y}'(\beta_i) \cdot \alpha^{-1})]$ の違いは,
inner automorphism だけ。従って, r_i と r_i' は, *irreducible form* で一致。

2. $\{\mathcal{Y} \mid T_1 \cup \mathcal{Y} T_2 \approx S^3\} / \underset{\text{isotopic}}{\sim}$ について

genus n の solid torus T 上の *orientation preserving* は *isotopy group* $I^+(T) := \{[h] : \text{isotopy class} \mid h : T \rightarrow T, \text{orientation preserving homeomorphism}\}$ の a finite set of generators は, S. Suzuki [4] により, $\mathcal{V}_n = \{P, P_1, W_1, \tau_1, \theta_{12}, \varepsilon_{12}\}$ を represent-

ative homeomorphisms とする isotopy classes τ 与えられる。便宜上, $\mathcal{V}_n^\pm := \{h, h^{-1} \mid h \in \mathcal{V}_n\}$, $\dot{\mathcal{V}}_n^\pm = \{h \mid \partial T \mid h \in \mathcal{V}_n^\pm\}$ とする。

補題3. $T_1 \cup_{\mathcal{Y}} T_2 \approx S^3$ ならば, $f_i, g_j \in \dot{\mathcal{V}}_n^\pm$ が存在して, $\mathcal{Y} \underset{\text{isotopic}}{\sim} f_{n_1} \cdots f_1 \mathcal{Y}_0 g_1 \cdots g_{n_2}$ である。ここに, $\mathcal{Y}_0$ は meridian と longitude を入れ換える standard attaching map である。

証明. homeomorphism $g: T_1 \cup_{\mathcal{Y}} T_2 \rightarrow S^3$ により, $(S^3; g(T_1), g(T_2))$ は, S^3 の Heegaard 分解を与える。Waldhausen [5] により, 分解は一巻であるから, homeomorphism $h: (S^3; g(T_1), g(T_2)) \rightarrow (T_1 \cup_{\mathcal{Y}} T_2; T_1, T_2)$ が存在する。 $h_i := h \circ g|_{T_i}$ ($i=1, 2$) とすると, $\mathcal{Y} = h_1^{-1} \mathcal{Y}_0 h_2|_{\partial T_2}$ である。 h_i は orientation preserving としてよい。(必要なら, h の取り方を変えればよい)。よって, S. Suzuki [4] により, $\hat{f}_i, \hat{g}_j \in \dot{\mathcal{V}}_n^\pm$ が存在して, $h_1^{-1} \underset{\text{isotopic}}{\sim} \hat{f}_{n_1} \cdots \hat{f}_1$, $h_2 \underset{\text{isotopic}}{\sim} \hat{g}_1 \cdots \hat{g}_{n_2}$ と表わせる。即ち, $f_i := \hat{f}_i|_{\partial T}$, $g_j := \hat{g}_j|_{\partial T}$ をうる。

4. $\pi_1(\mathcal{Y})$ について

補題4. $\dot{\mathcal{V}}_n^\pm \ni f$, $B\mathbb{Z}^n$, $\mathcal{Y}_0^\pm$ により induce

された $\pi_1(\partial T)$ 上の isomorphism f_* は、次の通り。但し、 $\pi_1(\partial T)$ の fixed generators を 前図 1 のようにとる。

1) cyclic translation of handles : $\dot{p} = f$

$$\dot{p}_\# : \begin{cases} a_i \rightarrow a_{i+1} & 1 \leq i \leq n \pmod{n} \\ b_i \rightarrow b_{i+1} & 1 \leq i \leq n \pmod{n} \end{cases}$$

$$\dot{p}_\#^{-1} : \begin{cases} a_i \rightarrow a_{i-1} & 1 \leq i \leq n \pmod{n} \\ b_i \rightarrow b_{i-1} & 1 \leq i \leq n \pmod{n} \end{cases}$$

2) Interchanging knobs : $\dot{p}_{12} = f$

$$\dot{p}_{12\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow (b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1) a_2 (b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1)^{-1} \\ a_2 \rightarrow a_1 \\ a_i \rightarrow a_i & 3 \leq i \leq n \\ b_1 \rightarrow (b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1) b_2 (b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1)^{-1} \\ b_2 \rightarrow b_1 \\ b_i \rightarrow b_i & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\dot{p}_{12\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_2 \\ a_2 \rightarrow (a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2) a_1 (a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2)^{-1} \\ a_i \rightarrow a_i & 3 \leq i \leq n \\ b_1 \rightarrow b_2 \\ b_2 \rightarrow (a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2) b_1 (a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2)^{-1} \\ b_i \rightarrow b_i & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

3) Twisting a knot : $\dot{w}_1 = f$

$$\omega_{\#} \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1^{-1} (\theta_1^{-1} a_1 \theta_1 a_1) \\ a_i \rightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ \theta_1 \rightarrow a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1 \\ \theta_i \rightarrow \theta_i \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\omega_{\#}^{-1} \begin{cases} a_1 \rightarrow \theta_1^{-1} a_1^{-1} \theta_1 \\ a_i \rightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ \theta_1 \rightarrow \theta_1^{-1} a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1 \theta_1 \\ \theta_i \rightarrow \theta_i \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

4) *Twisting a handle* : $\tau_i = f$.

$$\tau_{\#} \begin{cases} a_1 \rightarrow \theta_1^{-1} a_1 \\ a_i \rightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\tau_{\#}^{-1} \begin{cases} a_1 \rightarrow \theta_1 a_1 \\ a_i \rightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i \end{cases}$$

5) *Sliding a handle* : $\theta_{1,2}, \theta_{1,2}^{-1} = f$.

$$\theta_{1,2\#} \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 \theta_2^{-1} a_2^{-1} \theta_2 \\ a_i \rightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i \quad i \neq 2 \\ \theta_2 \rightarrow a_2 \theta_2 (a_1^{-1} \theta_1 a_1) (\theta_2^{-1} a_2^{-1} \theta_2) \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_{12}^{-1} \# \begin{cases} a_1 \rightarrow \theta_1 a_1 (\theta_2^{-1} a_2 \theta_2) (a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1) \\ a_i \rightarrow a_i & 2 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i & i \neq 2 \\ \theta_2 \rightarrow \theta_2 a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1 \end{cases}$$

$$\ddot{\pi}_{12} \# \begin{cases} a_1 \rightarrow \theta_1 a_1 \theta_2^{-1} a_2^{-1} \theta_2^{-1} a_2 \theta_2 a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1 \\ a_2 \rightarrow a_2 \theta_2 a_1^{-1} \theta_1^{-1} a_1 \theta_2^{-1} \\ a_i \rightarrow a_i & 3 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\ddot{\pi}_{12}^{-1} \# \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 \theta_2^{-1} a_2^{-1} \theta_2 a_2 \theta_2 \\ a_2 \rightarrow \theta_2^{-1} a_2 \theta_2 a_1^{-1} \theta_1 a_1 \theta_2^{-1} a_2^{-1} \theta_2 a_2 \\ a_i \rightarrow a_i & 3 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

6) standard attaching map for S^3 : $\mathcal{G}_0$
(cf. [3] の map μ)

$$\mathcal{G}_0 \# \begin{cases} a_i \rightarrow \theta_i & 1 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow \theta_i a_i^{-1} \theta_i^{-1} & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_0^{-1} \# \begin{cases} a_i \rightarrow a_i^{-1} \theta_i a_i & 1 \leq i \leq n \\ \theta_i \rightarrow a_i & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

この補題から、次が成り立つ。

系 1. 1) $\{f_{\#}(a_i), \theta_i\}_{1 \leq i \leq n} \xrightarrow{S} \{a_i, \theta_i\}_{1 \leq i \leq n}$
2) $\{f_{\#}(\theta_i)\}_{1 \leq i \leq n} \xrightarrow{S} \{\theta_i\}_{1 \leq i \leq n}$, 3) (i) $\{g_{0\#}(a_i)\}_{1 \leq i \leq n} = \{\theta_i\}_{1 \leq i \leq n}$

$$\{\varphi_0^{-1\#}(\theta_i)\} = \{a_i\}, \quad (\text{ii}) \quad \{\varphi_0\#(\theta_i)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}, \\ \{\varphi_0^{-1\#}(a_i)\} \xrightarrow{S} \{\theta_i\}.$$

この系1を用いて, 合成による *simply trivial* の継承性について以下が成り立つ。

補題5. *orientation preserving homeomorphism*

$\varphi: (\partial T, *) \rightarrow (\partial T, *)$ は 次を満たす。 $[\varphi(\theta_i)]$ を表わす $\Pi_1(\partial T)$ の *fixed generators* $\{a_i, \theta_i\}_{1 \leq i, \theta \leq n}$ による word $r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ が存在して, $\{r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)\}_{1 \leq i \leq n} \xrightarrow{S} \{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ となる。 二のとき, 任意の $f \in \mathcal{H}_n^\pm$ に対して, *homeomorphism* $\varphi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}: (\partial T, *) \rightarrow (\partial T, *)$ も, 又, 同じ性質をもつ。

証明. 今, $\hat{f} := \varphi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ とおき, *induced isomorphism* を $\hat{f}_\#$ とする。 仮定より, $[\varphi(\theta_i)] = r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ だから, 各 $\hat{f}_\#(a_i), \hat{f}_\#(\theta_i)$ を *fixed* した word で表わせば, $[\hat{f}_\# \varphi(\theta_i)] = r_i(\hat{f}_\#(a_1), \dots, \hat{f}_\#(a_n), \hat{f}_\#(\theta_1), \dots, \hat{f}_\#(\theta_n)) (= r'_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n))$ とおく。 *simple deformation* は, *homeomorphism* で不変だから, $\{r'_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)\} \xrightarrow{S} \{\hat{f}_\#(a_i)\}$ である。 更に, $\hat{f}_\# = \varphi_0\# \circ f_\# \circ \varphi_0^{-1\#}$ だから, 系1より, $\{\hat{f}_\#(a_i)\} \xrightarrow{S} \{\varphi_0\# \circ f_\#(\theta_i)\} \xrightarrow{S} \{\varphi_0\#(\theta_i)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$ 。

系2. $g_i \in \mathcal{U}_n^\pm$ とすると, $\Pi_1(\varphi \circ g_1 \cdots g_m)$ は, simply trivial up to equivalence.

証明. 今, $[\varphi \circ g_1 \cdots g_m(\theta_i)]$ を表わす word $r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ が存在して, $\{r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)\}_{1 \leq i \leq m} \xrightarrow{S} \{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ であれば, 補題5により, $(\varphi \circ g_1 \varphi^{-1}) \varphi \circ g_2 \cdots g_m = \varphi \circ g_1 \cdots g_m$ についても, $[\varphi \circ g_1 \cdots g_m(\theta_i)]$ を表わす word $r'_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ が存在し, $\{r'_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$ となるので, 定義5の注意より, $\Pi_1(\varphi \circ g_1 \cdots g_m) \xrightarrow{\text{equi}} \langle a_1, \dots, a_n; r'_1(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1), \dots, r'_n(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1) \rangle$ であり, これは simply trivial. $m=0$ のとき, 系1より, $[\varphi(\theta_i)]$ を表わす word $r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ とし $\varphi \circ g_1(\theta_i)$ とすれば, $\{r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$ であるから, 帰納法により, $m \geq 1$ で成立。又, $m=0$ のときも, $\Pi_1(\varphi) \xrightarrow{\text{equi}} \langle a_1, \dots, a_n; r_1(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1), \dots, r_n(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1) \rangle$ は simply trivial で成立。

補題6. orientation preserving homeomorphism $\varphi: (\partial T, *) \rightarrow (\partial T, *)$ は次を満たす。

$[\varphi(\theta_i)] \in \Pi_1(\partial T)$ を表わす word $r_i(a_1, \dots, a_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ ($i=1, \dots, n$) が存在して, $\{r_i(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$ である。このとき, $\mathcal{U}_n^\pm \ni \forall f$ に対して, homeomorphism

$f\varphi$ も同じ性質をもつ。

証明. $[f\varphi(b_i)]$ を表わす word $r'_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ として, $r_i(f_{\#}(a_1), \dots, f_{\#}(a_n), f_{\#}(b_1), \dots, f_{\#}(b_n))$ をとると, f は extension $\hat{f}: T \rightarrow T$ をもつから, $b_i = 1$ ならば $f_{\#}(b_i) = 1$, また, $f_{\#}$ は homomorphism だから,
 $\{r_i(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)\} \xrightarrow{S} \{f_{\#}(a_i)\}$, 更に系1より
 $\{f_{\#}(a_i), a_i\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$ だから, $\{r'_i(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$.

この補題から, 次の系は容易にでる。

系3. $\pi_1(\varphi)$ が simply trivial up to equivalence ならば, $\bigcup_n \mathcal{U}_n^{\pm} \ni \forall f$ に対して, $\pi_1(f\varphi)$ も然り。

§3. 定理の証明.

定理の証明. $S^3 \simeq T_1 \cup_{\varphi} T_2$ だから, 補題3より $f_i, g_i \in \mathcal{U}_n^{\pm}$ が存在し, $\varphi \underset{\text{isotopic}}{\sim} f_n \cdots f_1 \varphi_0 g_1 \cdots g_n$ となる。補題2より $\pi_1(\varphi) \underset{\text{equi.}}{\sim} \pi_1(f_n \cdots f_1 \varphi_0 g_1 \cdots g_n)$ と=3で, 系2より $\pi_1(\varphi_0 g_1 \cdots g_n)$ は simply trivial up to equivalence, したがって, 系3より $\pi_1(f_n \cdots f_1 \varphi_0 g_1 \cdots g_n)$ も然り。(証明終)

§4. 検討.

上記の定理は、一種の存在定理である。 *simply trivial* をより強めて、 *simple deformation* を行う順序について、まず、 *cyclic cancelation* によって *irreducible* にしてから、他の変形をすることにし、(これを *strongly simply trivial* と呼ぼう。) *up to equivalence* によって *relations* を一旦、長くするのを、認めぬ形として、

問題. $S^3 \approx T_1 \cup_g T_2$ ならば、 $\pi_1(Y)$ の *irreducible form* は *strongly simply trivial* か。

は、興味深い。肯定的ならば、 S^3 であるための必要条件の能率的な *algorithm* となる。否定的ならば、上記の定理が、この方向での *best possible* となる。

参考文献.

- [1] Birman - Hilden : *Heegaard splittings of branched coverings of S^3* . Trans.A.M.S. vol. 213 (1975) P315-352.
- [2] H. Kamuro : 種数2の closed orie. 3-mfd の基本群の特徴づけ. T.I.T. vol 2. P.67-.
- [3] D. Myer : *Homeomorphisms on the solid*

double torus. Can. J. 1975. P797-804.

- [4] S. Suzuki: On Homeomorphisms of a 3-dimensional handle-body. to appear in Can. J. 本講究録.

- [5] F. Waldhausen: Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7. (1968) P197-203.