

Stochastic shell model

— 乱流における anomalous スケーリングと非ガウス分布の一つのモデル —

東北大情報 高安 秀樹 (Hideki Takayasu)

東工大理 田口 善弘 (Y-h. Taguchi)

都立大理 勝山智男 (Tomoo Katsuyama)

一様発達乱流の時空構造 [1] は流体力学のみならず統計力学にとっても未解決の重要な課題である。多くのあたらしい概念、例えば、フラクタル [2]、カオス [3]、あるいは間欠性、といったものが発達乱流の特徴づけのために導入されたが、現在の我々の流体乱流の理解は完全とは程遠い状態にある。

実験的にも、数値的解法にとっても、乱流は非常に難しい課題である。実験的には、普通、ある空間に固定された一点の速度の時系列が得られるに過ぎない [4]。このようなデータでは流体乱流のグローバルな時空構造を研究するには不十分なのは言うまでもない。数値計算を用いれば、任意の点の局所速度を自由に得ることができるが [5]、今度は発達乱流をつくるには膨大な計算機資源が必要となり、スーパーコンピュータですら、十分ではない。乱流の挙動を理解するには取り扱いが簡単で、しかも、基本的な性質は流体乱流と同じ、というようなモデルが求められている。

乱流研究の歴史において、もっとも成功したアプローチの一つに、コルモゴロフのスケールリング理論 [1] がある。この理論の中で、コルモゴロフはエネルギースペクトル $E(k)$ が波数 k に対してべき則 $k^{-5/3}$ をとることを予言した。彼の予言は、保存量であるエネルギーが波数空間を高波数側へと切れ目なくカスケードしていくと言う非常に単純な仮定に基づいたものであった。彼の単純な仮定は発達乱流の最も基本的な性質をうまくとらえていたが、エネルギー散逸関数の空間的揺らぎ（いわゆる間欠性）を考慮に入れていなかった [6]。のちに彼自身、エネルギー散逸率の揺らぎが対数正規分布をとることを仮定して、コルモゴロフ理論を修正した。この対数正規分布仮説は、エネルギースペクトルのべき指数が $-5/3$ からずれることを予言した [7]。

間欠性を考慮するためのもう一つのやり方は渦度の空間分布にフラクタル性を持ち込むことであった [8]。このフラクタルを用いた方法は最近ではマルチフラクタル [9] に拡張され、構造関数に対して実験的に得られたアノーマラススケールリングを説明するいくつかのモデルを生んでいる [10]。

最近、実験家の興味は乱流の様々な物理量の確率密度関数 (PDF) に集中している。ある距離だけ離れた 2 点間の速度差の分布関数がガウス分布からずれており、そのずれは 2 点間の距離が近いほど大きくなることは、よく知られた事実である。フーリエ空間で表現すれば、この現象は、高波数成分ほどガウス分布からかけはなれた分布関数を持つことを意味する [4]。

マルチフラクタルと非ガウス分布は間欠性の 2 つの異なった側面に過ぎない。実際、両者を結合させることにより、She と Levesque [11] は実験値によく一致するマルチフラクタル指数の解析的な表式を得ることに成功した。彼らの理論の興味深いところは、他の理論とは異なり、Navier-Stokes 方程式を明示的には全く用いていない点にある。

一般的には、動力学方程式から出発していないということは理論が不完全であることを意味するが、この場合はこの理論の適用範囲が Navier-Stokes 乱流に限らない、ということの意味していると考えることができる。実際、ブジネ方程式を用いた数値実験でも同じような非ガウス分布やマルチフラクタル指数が得られることが報告されている [12]。

同じような間欠性は非常に簡単化された数値モデル (GOY モデルと呼ばれる [13]) にも見い出すことができる。このモデルはいわゆるシェルモデルの一つであり、このモデルでは Navier-Stokes 方程式が持っている無限の自由度を間引いて、シェルと呼ばれるごく小数の波数自由度のみを取り扱う。このモデルは複素フーリエ速度成分 $u(j, t)$ の以下のような非線形微分方程式の組で表される。ここに、 $u(j, t)$ は $k_j = b^j$ のような (b は正定数、 j は整数) 離散的な波数モードでの速度成分である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(j, t) = & -\nu k_j^2 u(j, t) + f \delta_{j,4} \\ & + i \{ C_j k_j u^*(j+1, t) u^*(j+2, t) \\ & + C_{j-1} k_{j-1} u^*(j-1, t) u^*(j+1, t) \\ & + C_{j-2} k_{j-2} u^*(j-1, t) u^*(j-2, t) \}. \end{aligned}$$

C_j, C_{j-1}, C_{j-2} などは定数である。右辺第一項は粘性散逸を、第2項は外力を表している。残りの3つの項は Navier-Stokes 方程式の非線形項を簡略化して表現したものである。この非線形項は、方程式系をカオスへ導き、現実の乱流と良く一致した統計的振る舞いをもたらし [15]。

本講究録では、この様な単純なモデルが、無限自由度をもつはずの現実の乱流と同じような間欠性を生み出すのかを論じる。答えは単純である。「間欠性は単純で普遍的過ぎて、流体乱流に限らず非常に広い範囲の非平衡系に見られるものではないか？」本質的なのは、局所的な揺らぎが波数空間を一方向に流れていくことであり、自由度の数や、非線形性の詳細、および、散逸の形は全く本質的では無いかも知れない。

この予想を確認するため、GOY モデルより更に簡単なシェルモデル、stochastic shell model を導入した。カオス的な非線形相互作用の代わりに、以下のような離散的な確率過程を導入する。

$$\begin{aligned} u(j, t+1) = & u(j, t) \\ & + \theta [R(j, j-1; t) u(j-1, t) - R(j+1, j; t) u(j, t)], \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 θ は 1 より小さい非負の定数、 $R(j, j-1)$ は k_j から k_{j-1} への運動量移送を表現する乱数であり、

$$R(j, j-1; t) = \begin{cases} \exp\{i\phi(j, t)\}, & \text{Prob } p \\ 0, & \text{Prob } 1-p \end{cases},$$

ここで、 ϕ は 0 と 2π の間の値をとるランダムな位相である。このモデルはランダム行列のマルチプリカティブ過程に他ならず、従って何らの非線形性も持っていないことに注意すべきである。この様なマルチプリカティブ過程は Deutsch [14] によって解析的に研究されており、マルチフラクタルの様な anomalous スケーリングの存在が報告されている。

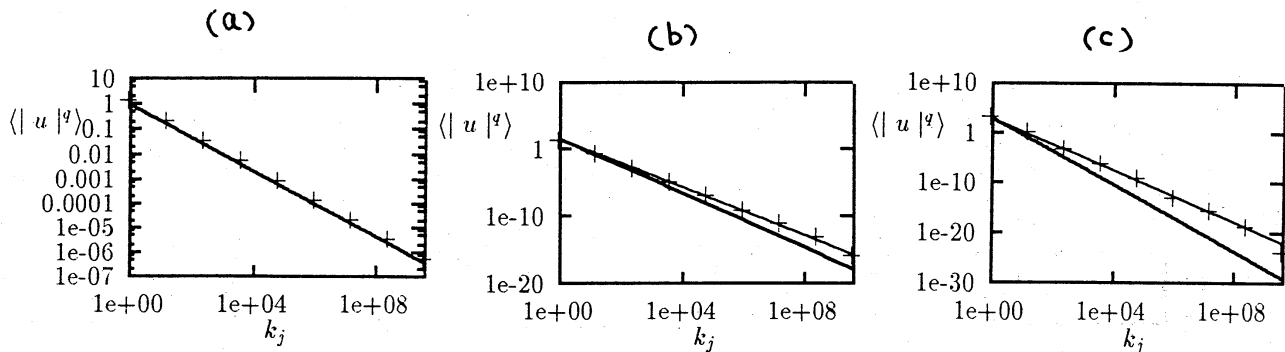


図 1: +: $u(j, t)$ の高次モーメント。(a) $q = 2$ (b) $q = 6$ (c) $q = 10$. 太線: $\zeta_q = q/3$, 細線: $\zeta_q = q/9 + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{q/3} \right]$.

以下では、我々は境界条件として $u(N, t) = 0$ を要請することにする（但し、 N はシェルの総数である）。高波数側での指数的な通常の粘性散逸に比べると、この様な人工的な境界条件の付け方は奇妙に思えるかも知れない。しかし、我々のモデルでは高波数方向への流れしかないので、高波数側での境界条件の付け方は途中の波数成分の挙動には影響を与えないのである。よって、この境界条件は単純に数値的な便宜上のものでしかない。更に、外力によるエネルギーの注入を表現するために、ゼロ番目のシェルにランダムな複素数を毎ステップ加えている。

特性関数 $Y_j(\rho, t) \equiv \langle \exp[ipu(j, t)] \rangle$ を定義すると、この確率過程モデルは解析的に取り扱うことができる（ $\langle \cdot \rangle$ は物理量 $\cdot$ の期待値を表す）。特性関数の時間発展は式 (1) より、

$$\begin{aligned} Y_j(\rho, t+1) &= \{(1-2p)Y_j(\rho, t) + 2pY_j[(1-\theta)\rho, t]\} \\ &\times \{(1-p) + pY_{j-1}(\theta\rho, t)\}. \end{aligned}$$

と書ける。この式より、システムは素早く定常状態（全ての平均値が時間によらず一定）に収束することを解析的に示すことができる。つまり、時間平均とアンサンブル平均は初期条件によらず同じ結果を与えるものとみなしてよい。特性関数を ρ の 2 次まで展開することにより、エネルギー $E_j (\equiv \langle |u(j, t)|^2 / 2 \rangle)$ が $E_j = \theta E_{j-1} / (2 - \theta)$ を満たすことを厳密に示せる。よって、エネルギースペクトルは良く知られたベキ則に従い、 $E_j = k_j^{-\zeta}$ と書くことができる（この時、 $\theta = 2/(1+b^2)$ である。）。コルモゴロフ則を満たすように $\zeta = 2/3$ と選ぶことにしよう。 p は 0 と 1 の間にある限り、ベキの指数の値と無関係であることが解ったので、以下では $p = 0.5$ と固定することにする。つまり、以下ではモデルはただ一つの任意定数 b を持つことになる。

間欠性を定量的に測るため、我々は $u(j, t)$ の高次のモーメントを計算し、指数 ζ の定義を $\langle |u(j, t)|^q \rangle \propto k_j^{-\zeta_q}$ の様に拡張した。図 1 は $q = 2, 6$ および 10 ($N = 10, b = 16$) に対する結果を示す。ここで、平均は 2×10^5 ステップに渡って取った。 ζ_2 は解析的な結果より期待される通り $2/3$ となった。一方、 $q = 6, 10$ の時の ζ_q の値は明らかにコルモゴロフのものとのスケール $\zeta_q = q/3$ からずれている。したがって、我々のモデルは間欠性を示しているといつてよいであろう。指数の値を実験値と比べるために、実験値と良く一致するこ

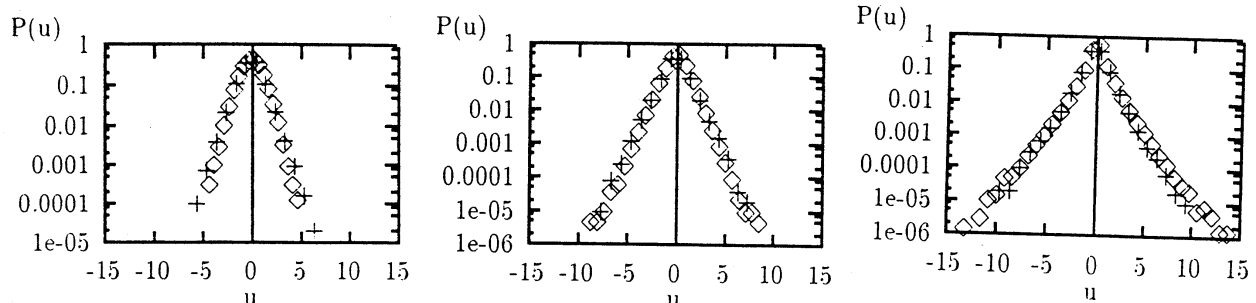


図 2: stochastic shell model (+) と実験 ($\diamond$) の分布関数の比較。比較のため、すべて分散が 1 になるように規格化してある。左: Experiment: 0.15kHz, model: $j = 1$. 中: Experiment: 3kHz, model: $j = 2$. 右: Experiment: 10kHz, model: $j = 3$.

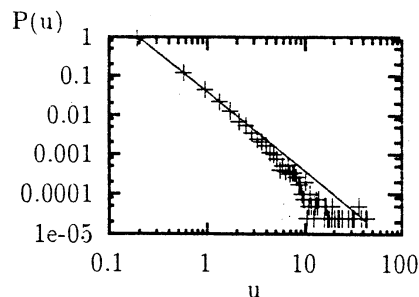


図 3: Stochastic shell model で得られたべき的な分布関数 ($j = 40$)。直線は $P(u) \sim u^{-2}$ を示す。

とが知られている経験的なマルチフラクタル指数の式、 $\zeta_q = q/9 + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{q/3} \right]$, を示した [11]。我々のデータは経験的な値と良く一致しておりマルチフラクタルスケーリングを定量的に再現できたと言って良いであろう。

次に、実験で観測されるような分布関数の波数依存性が再現されるかどうか確認しよう。図 2 は実験値と我々のモデル ($b = 64, N = 5$) の結果の比較である。乱流データの実験値は勝山によって得られたバンドパスフィルターをかけた速度信号である [4]。モデルのデータの方は $u(j, t)$ の実部を 2 ステップおきに 2×10^5 ステップに渡って計測し、分布関数を求めた。実験より得られた分布関数は大きい波数に対するものほどガウスからのずれがひどくなる傾向を持つ。モデルの分布関数はこの実験のデータに非常に良く一致している。したがって、我々のモデルは間欠性のもう一つの表現である非ガウス分布 [17] を再現することに成功したと言うことができよう。

高波数極限では、GOY モデルと Navier-Stokes 乱流がともにべき的な分布関数を持ち、 $P(u) \sim u^{-\beta}$, ($\beta = 1.6$) であることが知られている [16]。よって、高波数でべき的な分布が現れることも流体の間欠性の大事な性質の一つかも知れない。図 3 は高波数領域 ($j = 40, N = 50, b = 16$) での我々のモデルの結果である。データは 2 ステップおきに 2×10^5 ステップに渡って計測した。分布関数は指数がおおよそ -2 のべき則を示した。指数の決定はかなり微

妙な問題であることを考えると、この値は流体乱流の値 -1.6 にかなり近いと言えるであろう。よって、ベキ的な振舞いについても、我々のモデルは矛盾なく再現すると言うことができる。

我々のモデルは、線形であり、粘性も考慮されていないことを考えると、以上の結果は間欠性は非線形性や粘性とは直接関係がないことを示唆しているのかも知れない。これはいままで信じられてきたことと矛盾するように感じられる。当然、次のような大きな疑問が湧く「何が間欠性を引き起こすのか？」。

間欠性を引き起こすのに必要な最小限の条件を見究めるため、我々はモデルのさらなる簡略化を試みた。複素数速度の代わりに実数速度を用いたのである。結果は随分と異なったものであった。統計的に定常な状態は得られたし、分布関数は高波数成分の方がガウスからずれていた。しかし、エネルギースペクトルはもはや波数のベキではなく、マルチフラクタル性も当然、なくなってしまった。この結果は、現実の乱流でも位相の乱れた複素量の波数空間での流れが間欠性の出現に関係していることを示唆している。

結論は以下の通りである。波数空間でのカスケードをモデル化する stochastic shell model を導入した。これは本質的に線形のマルチプリカティブな過程であるにも関わらず、複素変数を用いると、間欠性を正しく再現するモデルであることが解った（但し、実変数ではうまくいかない）。この事実より、間欠性の本質が複素数カスケードプロセスにあることが解る。非線形性や粘性は無くてもよく、従って、これらの要素は間欠性に対して間接的な寄与しか持たないと思われる。我々のモデルのさらなる研究は間欠性の普遍的な出現について多くの知見をもたらすであろうと期待される。

高安秀樹は高安美佐子氏との議論に感謝します。田口善弘は山田道夫先生との有益な議論、及び、Linux の開発に寄与した人々に感謝します。Linux が無ければこの研究はできなかったでしょう。

(This manuscript is Japanese translation of preprint, `chao-dyn/9503004` submitted to preprint server, `chao-dyn@xyz.lanl.gov`.)

参考文献

- [1] A. Monin and A. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT press, Cambridge, 1971).
- [2] H. Takayasu, *Fractals in the physical sciences* (Manchester University Press, Manchester, 1990).
- [3] P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal, *Order within chaos : towards a deterministic approach to turbulence* (John Wiley & Sons/Hermann, New York, 1984).
- [4] T. Katsuyama, Y. Horiuchi, and K-i. Nagata, *Phys. Rev. E* **49** 4052 (1994), and references therein.
- [5] S. Kida and Y. Murakami, *Fluid Dyn. Res.*, **4** 347 (1989).

- [6] G.K. Batchelor, *Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).
- [7] A. M. Obukhov, J. Fluid. Mech., **12** 77 (1962); A. N. Kolmogorov, *ibid* 82.
- [8] U. Frisch, P. Sulem, and M. Nelkin, J. Fluid. Mech., **87** 719 (1978).
- [9] C. Meneveau and K.R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **2** 49 (1987).
- [10] F. Anselmet, Y. Gagne, F.J.Hopfinger, and R.A. Antonia, J. Fluid. Mech. **140** 63 (1984).
- [11] Z-S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett., **72** 336 (1994).
- [12] R. Benzi, F. Massaioli, S. Succi, and R. Tripiccone, Europhys. Lett., **28** 231 (1994).
- [13] E. B. Gledzer, Sov. Phys. Dokl., **18** 216 (1973); M. Yamada and K. Ohkitani, Phys. Rev. Lett., **60** 983 (1988).
- [14] J. M. Deutsch, Physica A **208** 433 (1994); *ibid* 445.
- [15] L. Kadanoff, D. Lohse, J. Wang, and R. Benzi, Phys. Fluids **7** 617 (1995); M.H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, Phys. Rev. A, **45** 7214 (1992).
- [16] M.Yamada, S. Kida, and K. Ohkitani, in *Unstable and Turbulent Motion of Fluid*, ed. S. Kida, (World Scientific, Singapore, 1993) p188.
- [17] H. Takayasu and Y-h. Taguchi, Phys. Rev. Lett. **70** 782 (1993); M. Takayasu, H. Takayasu, and Y-h. Taguchi, Int. J. Mod. Phys. B **8** 3887 (1994); Appendix C in Y-h. Taguchi and H. Takayasu, Physica D **69** 366 (1993); H. Takayasu and Y-h. Taguchi, in *Unstable and Turbulent Motion of Fluid*, ed. S. Kida, (World Scientific, Singapore, 1993) p220.