

局所有限な安定群について

九州歯科大学 田中 克己(Katsumi Tanaka)

1. はじめに

安定群の構造を決定することは、model theorist にとって、重大な関心事である。なぜ今群なのか--という質問への答えには別の機会に答えるとして。ここでは、純粹に群論的観点から安定群について眺めることにする。

群の構造を知ろうとすれば、群の拡大のことが分かったとすれば、単純群のことが分かりさえすればよい。その意味で有限単純群の分類により、原理的には、我々は有限群のことはすべて分かることになる。話しを無限群に移すと、無限単純群の分類などとても不可能に思えるし、群の拡大についても似たようなものに見える。そこで model theory の意味でよい性質を多く持つ群、 ω 安定群、超安定群、安定群等について考えるのは、安定性理論の一般論への貢献は言うに及ばず、群論的にも、あまりにも大きな対象である無限群へのアプローチとして意味のあることだと思う。

ここで最初に問題となるのが正規部分群の定義可能性である。例えば、 G を安定群、 N を G の正規部分群としたとき、 N が G の中で定義可能でなければ、 GN は安定とは限らない。これは安定群の構造を調べるにあたり大きな障害となる。少なくとも G の Morley rank が有限のとき、 G が定義可能な非自明正規部分群を持たなければ、 G は単純群となることが知られている。

そこで再び話しを有限群にもどすが、有限群では、各素数 p にたいし、 p シロー群、つまり極大 p 部分群はみな共役になることが知られている(シローの定理)。残念ながらこの定理は、無限群では一般になりたたないが、1978年に Felgner により ω -categorical な安定群については成り立つことが示された。最近 Nesin により、Morley rank 有限な連結な可解群について成り立つことが報告されている。Nesin はこの証明のなかで p シロー群が定義可能であることを示し上の結果を導いている。本稿では、Felgner の結果を少し拡張し、局所有限な安定群について p シロー群がみな共役になることを示す。ただし、ここで p シロー群の定義可能性は一切問題としない。

2. 証明

局所有限群については、Asar の定理により、可算部分群が p シロー群を高々可算個しか持たないことさえ示せばよい。したがって、ここでは、

可算部分群の p シロー群がみな共役になることを示すことにする。以後 G をある局所有限な安定群の可算部分群とする。少なくとも G は局所有限で、中心化群の DCC をみたす。

局所有限性から、 G はどの有限 p 部分群にたいしても、そのある共役をふくむような p シロー群 A を持つ。 G のどんな p シロー群 B についても、 A と B は共役になることを示すのが我々のゴールである。

p シロー群 B は局所ベキ零群であり、中心化群の DCC をみたすので、有限指数のベキ零部分群 B^* をもつ。

$B^*/Z(B^*)$ の exponent は有限だから、 $B/Z(B^*)$ の exponent も有限となり、

これを n とする。このとき、 $B^* \leq C_B(B^n)$ 。ここで自然数 n をうまく取り

直してやれば、 A と B にたいし、 $A^* \leq C_A(A^n)$ と $B^* \leq C_B(B^n)$ を同時にみた

す。中心化群の DCC より、 B のある有限部分集合 F にたいし、 $C_G(F^n) =$

$C_G(B^n)$ となる。ここで B を適当な共役で置き換えてやると、 F は A にふく

まれると仮定してよい。よって F^n は A^n にふくまれ $A^* \leq C_G(F^n) = C_G(A^n)$

となる。また B^* は $C_G(B^*)$ にふくまれるから、 B' を B^* をふくむ $C_G(B^n)$ の p

シロー群とする。また B'' を B' をふくむ G の p シロー群とする。

Claim. B' はベキ零。

B'' は $N_G(B^*)$ のある元により B と共役でかつ、 B^* は B'' のなかで指数有限となる。よってある自然数 m があって、 $(B')^m \leq (B^*)^n \leq B^n$ となるので、 $(B')^m \leq Z(B')$ となる。ここで B' は局所ベキ零でしかも中心化群のDCCをみたすので、 B' はベキ零となる。

このとき、 $C_G(B^n)$ の p シロー群はすべて共役となる。よって、 $C_G(B^n)$ のある元 g にたいし $(B^*)^g$ と A^* から生成される群 P は p 群となる。 D を P をふくむ G の p シロー群とすると、 $(B^*)^* = (B^*)^g \leq D$ が成り立つから、 B^g と D は共役になる。また A^* も D にふくまれるから、 A^* と D も共役となる。ゆえに A と B は共役となり証明が終わる。

参考文献

Ulrich Felgner, $\mathcal{A}_0$ -categorical stable groups, Mathematische Zeitschrift 160

(1978) 27-49.

Ali Nesin, *Nilpotent and Solvable groups of finite Morley rank*, preprint.