

Dihedral defect group をもつ integral block に 属する p -adic lattice の分類について

都立大・理 光田 義 (Tadashi Mitsuda)

p -adic lattice の分類は、整数表現における大きな問題であるが、よく知られているように有限表現型の群は非常に少ない。例えば $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とし、 G を有限群とする。このとき Heller - Reiner [3] によれば $\mathbb{Z}_p G$ が有限表現型となるための必要かつ十分条件は、 G の Sylow p 部分群が位数 p の巡回群 C_p か位数 p^2 の巡回群 C_{p^2} とすることである。そして、 $\mathbb{Z}_p C_p$ や $\mathbb{Z}_p C_{p^2}$ については、その直既約 lattices は分類されている。然し、 C_p や C_{p^2} についても、その係数環によっては無限表現型となる。例えば、 $\mathbb{Z}_5[\zeta_5]C_5$ は、無限表現型である (cf. [7])。そこで、群環そのものではなく、block について考えてみることにする。すなわち、 R を $\mathbb{Z}_p$ の有限次拡大とし、 G を有限群とする。このとき B が RG の (integral) block であるとは、 B が RG の環としての直和因子であって両側直既約なことであった。また、 $d(B)=D$ が B の defect

group であるとは. すべての B -lattice が (G, D) -projective
 であり. かつ互に互とも v と w の直既約 B -lattice に対し. v
 の vertex に付していることであつた. そうすると $d(B)$
 は. 共役を除いて一意的に定まる G の p 部分群である. さて
 π を R の素元とし. $F = R/(\pi)$ とおき. π による $\bmod \pi$ による
 reduction を一をつけて表わすことにする. そうすると $\bar{B}$
 は FG の (modular) block であり. π による $d(B) = d(\bar{B})$ であ
 る. さて. (integral) block の表現型についてその有限
 性の条件が知られている. R を $\mathbb{Z}_p$ の有限次拡大とし. π を
 R の素元. $(p) = (\pi)^A$ とおく. そして G を有限群とし. B を
 RG の block とするとす. Roggenkamp [7] によれば. B が
 有限表現型となるための必要十分条件は. $d(B) = C_{p^m}$, $m \leq 2$
 で. 更に $m=2$ の時には $A=1$, $m=1$ の時には. $p > 3$ なら
 $A \leq 2$, $p=3$ なら $A \leq 3$ となることである. 従つて. と
 くは. defect group が 非巡回的であつたり. たとえ巡回
 群でも位数が p^3 以上だと無限表現型となる. そこで defect
 group が C_p や C_{p^2} の時に lattice を分類することが問題と
 なるが. Bessenrodt [1] は. R が $\mathbb{Z}_p$ の不分岐拡大で F が
 十分多くの 1 のべき根を含むときこのような block に属する
 直既約 lattice の分類を与えている. 先の有限性定理によれば
 すべての lattice を直接分類できるのは. ほとんどこの場合

に限定されている。ところが一方、block の algebra としての構造に関する Broué - Puig [2] による興味ある結果がある。つまり、 G を有限群とし、 (K, R, F) を G の splitting p -modular system、 B を RG の block で $D = d(B) = \text{abelian}$ で $\bar{B}$ の inertial index $= 1$ とあるとき、 R -algebra として $B \simeq \text{Mat}_d(RD)$ なる同型が成立つ。この結果によれば、例えば、 $d(B) = C_{2^m}$ の時は、いつでも $B \simeq \text{Mat}_d(RC_{2^m})$ とすることがわかる。この結果は、block の構造を explicit に記述している点で重要であり、また上のような状況では、block に属する lattice の分類は p 群の群環上の lattice の分類に帰着された。このように block に属する lattice を考察するために block の algebra としての構造を調べるといふことが重要な手段となる。また、defect 1 の block については Roggenkamp が [7] に於いて調べているが、そこでは、block の整環としての構造を congruence を用いて記述している。さて、先の Broué - Puig の型の結果として、Külshammer [5] は、 p -可解群の p -modular block の構造を記述している。つまり、 G を p -可解群とし、 F を標数 p の代数閉体とすると FG の modular block $\bar{B}$ に対し、 F -algebra として $\bar{B} \simeq \text{Mat}_d(F^C \pi)$ なる同型が成立つ。但し、 $F^C \pi$ は、 C を factor set とする、有限群 π の F 上の twisted group ring

である。そこで我々は、 p -可解群の integral block について考察する。まず、この Külshammer の結果が integral block についても成立することを示し、その integral block に属する lattice について考える。定理 1 では今の Külshammer の結果の integral version を与え、定理 2 では $p=2$ で defect group が dihedral の時にもっと explicit な記述を与える。然し、この場合にも、block は無限表現型なので、すべての lattice を分類することは不可能である。そこで、既約 lattice つまり、商(本)で tensor して単純とけるような lattice のみを分類する。尚、詳しい証明は、[6] に述べられている。

定理 1. G を p -可解群とし、 (K, R, F) を G の splitting p -modular system とする。また、 B を RG の block とし $\delta(B) = D$ を defect group とする。この時、 D の正規部分群 P 及び $N_G(P)$ の部分群 H で、 $B \simeq \text{Mat}_\ell(R^c H / O_{p'}(H))$ とけるものが存在する。但し、 $R^c H / O_{p'}(H)$ は、 C を factor set とする、群 $H / O_{p'}(H)$ の R 上の twisted group ring である。

証明の outline: $|G|$ についての induction で Külshammer の議論を繰り返していく。

B の block idempotent を e とし、 $N = O_{p'}(G)$ とおく。 RN

の centrally primitive idempotent ε で $e\varepsilon \neq 0$ なるものをとる。 $T = C_G(\varepsilon)$ とおくと RT の block idempotent f で $\varepsilon f = f$ となるものがあるのでこの f に対応する block を b とする。 そうすると $d(b) = D$ で $B \simeq \text{Mat}_t(b)$ となることがわかる。 よって、もし $T \subsetneq G$ なら induction の仮定によって示される。 そこで $T = G$ の時が問題となるが、この時は $e = \varepsilon$ であり、また D が G の Sylow p -部分群となっていることがわかる。 従って RG -加群として $B \simeq (RN\varepsilon)^{\uparrow G}$ となる。 ところが $RN\varepsilon$ は極大整環なので直既約射影加群は同型を除いて唯一つつである。 これを U とする。 そうすると $U^{\uparrow G}$ は B の progenerator となり、 B と $E = \text{End}_{RG}(U^{\uparrow G})$ は Morita 同値で $B \simeq \text{End}_E(U^{\uparrow G})$ となる。 ところが $U^{\uparrow G}$ は自由 E -加群なので $B \simeq \text{Mat}_t(E)$ である。 一方、 $E \simeq RG/N$ となることがわかり、更に、 D が G の Sylow p -部分群であることより考えれば、 $P = D \cap O_{p',p}(G)$ とおくと $G/N \simeq N_G(P)/O_p(N_G(P))$ となる。 以上で証明された。

定理 1. では、 P 及び H が具体的に与えられている。 ために block の構造が完全に示されたいと言え、 $p=2$ で D が dihedral の時には、 explicit に記述することができ、つまり、次の定理 2 が成立つのだが、この結果は modular

の場合には. Külshammer [5] 及び Koshitani [4] に与えられている。

定理2. G を 2-可解群, (K, R, F) を G の splitting 2-modular system とする。 B を RG の block とし。 B の defect group D は dihedral とする。 この時。 次の成立つ。

- (i) $|D| > 8$ の時 $B \simeq \text{Mat}_e(RD)$
- (ii) $|D| = 8$ の時 $B \simeq \text{Mat}_e(RD)$ 又は $\text{Mat}_e(RS_4)$
- (iii) $|D| = 4$ の時 $B \simeq \text{Mat}_e(RD)$ 又は $\text{Mat}_e(RA_4)$

証明は定理1と同様に $|G|$ についての induction で行うが twisted group ring が実は。 通常の群環となることを示すのに少し工夫が必要である。

さて。 以下。 定理2 の状況で考える。 我々は。 B -lattice の分類について考えていたのだが。 上の定理によれば。 このためには。 RD, RS_4, RA_4 上の lattice の分類を考えればよいことになった。 そこで。 dihedral group の既約 lattice の分類を実行する。

$D = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ とし。 K を 1 の原始 2^{n-1} 乗根を含む $\mathbb{Q}_2$ の有限次拡大, R を整教環と

する。また、 π を素元とし、 $(2) = (\pi)^r$ とおく。

まず、1次元の既約表現内の既約latticeは、同型を除いて
 唯一とつしかついいことは、明らかである。従って、 $|D| \geq 8$ の
 時のみ考えればよい。この時、 D の K 上の既約表現は、1次
 元と2次元のものしかなく、我々は、2次元のものについて
 のみ考察すればよい。2次元の既約表現は、 $2 \leq l \leq n-1$ と
 すると $\chi^{(l)}: \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & \\ & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, $\tau \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ で与えられる。
 但し、ここで、 ζ は1の原始 2^l 乗根とする。この $\chi^{(l)}$ 内の
 既約latticeの同型類を決定せねばならない。そこで、次の
 ように定義される既約lattice L を固定する。 $L = Rv_1 \oplus Rv_2$
 $\sigma v_1 = \zeta v_1$, $\sigma v_2 = \zeta^{-1} v_2$, $\tau v_1 = v_2$, $\tau v_2 = v_1$ 。そうすると、
 L のfull RD-sublatticeで然も πL に含まれないものの
 全体が同型類の代表をなすことがわかる。従って、 L のfull
 sublatticeでかつ D -invariant なものをすべて教えあげ
 ればよいことになる。これを実行して、次を得る。

定理3. $D = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1, \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ を位数
 2^n の dihedral group とする ($n \geq 3$)。 K は1の原始 2^{n-1}
 乗根を含む $\mathbb{Q}_2$ の有限次拡大体、 R を整数環、 π を素元、 r
 を(2)の分岐指数とする。また、 $|R/(\pi)| = 2^f$ とおく。
 $\chi^{(l)}$ を $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & \\ & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, $\tau \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ によって定義される D の

K 上の既約表現とする。但し、 ζ は1の原始 2^f 乗根で、 $2 \leq l \leq n-1$ とする。このとき $\chi^{(l)}$ 内の既約 lattice の個数は同型を除いて $\frac{(2^f)^r \cdot 2^{-l+1} (2^f + 1) - 2}{2^f - 1}$ である。

また、 S_4 , A_4 については、次が成立つ。

命題 (1) K を $\mathbb{Q}_2$ の有限次拡大体、 R を整数環とし、 r を2の分岐指数とする。このとき、次が成立つ。

(i) S_4 の K 上の2次元の既約表現内の既約 lattice は、同型を除いて、唯一とつである。

(ii) S_4 の K 上の3次元の既約表現内の既約 lattice の個数は同型を除いて、いずれも $2r+1$ である。

(2) K を1の原始3乗根を含む $\mathbb{Q}_2$ の有限次拡大体とし、 R を整数環、 r を2の分岐指数とする。このとき、 A_4 の K 上の3次元の既約表現内の既約 lattice の個数は、同型を除いて $3r^2 + r + 1$ である。

定理3. 命題のいふことに於いても、同型類の個数のみではなく、具体的に lattice を構成することができる。

さて、定理2、定理3 及び上の命題を組み合わせる次を得る。

系 定理2の仮定の下で、 B に属する既約latticeがすべて分類された。

References

- [1] C. Bessenrodt: Indecomposable lattices in blocks with cyclic defect groups, *Comm. Alg.* 10(2) (1982) 135-170
- [2] M. Broué and L. Puig: A Frobenius theorem for blocks, *Inv. Math.* 56 (1980) 117-128
- [3] A. Heller and I. Reiner: Representations of cyclic groups in rings of integers I, II , *Ann. Math.* 76 (1962) 73-92, 77 (1963) 318-328
- [4] S. Koshitani: A remark on blocks with dihedral defect groups in solvable groups, *Math. Z.* 179 (1982) 401-406
- [5] B. Külshammer: On p -blocks of p -solvable groups, *Comm. Alg.* 9(17) (1981) 1763-1785
- [6] T. Mitsuda: Irreducible lattices belonging to integral blocks with dihedral defect groups in 2-solvable groups, to appear in *Comm. Alg.*
- [7] K. Roggenkamp: Integral representations and structure of finite group rings, *Séminaire de Mathématiques Supérieures*, Université de Montréal 71 (1980)