

Generalized 4 manifold について

東大理 上 正明

(Masaaki Ue)

ENR (Euclidean neighborhood retract) X が次の条件を満たすとき n 次元 generalized manifold であるという。

(*) 任意の点 $x \in X$ に対して $H_*(X, X-x; \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z})$ for $\forall *$.

X に対しその nonmanifold set を $N(X) = \{x \in X \mid X \text{ は } x \text{ において locally euclidean でない}\}$ とおく。ここで次のことを示す。

定理 I. X を閉じた単連結 4 次元 generalized manifold で $X \times \mathbb{R}$ は 5 次元位相多様体と可。このときある 4 次元位相多様体 M が存在して $M \times \mathbb{R}$ は $X \times \mathbb{R}$ に位相同型である。

またこれを次のように relative form にするこゝができる。

定理 II. X を閉じた単連結 4 次元 generalized manifold で $\{ \}$ の non manifold set $N(X)$ は孤立点、かつ $X - N(X)$ は smooth manifold の構造をもつとする。このとき $N(X)$ の近傍 N で ∂N が連結な smooth submanifold of $X - N(X)$ なるものに対し、ある 4 次元位相多様体 M で $\overline{X - N} \cup_{\partial N} M_0$ なるものが存在し、位相同型 $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ で $f|_{\overline{X - N} \times \mathbb{R}} = \text{id}$ なるものがある。ただし M_0 は $\partial M_0 = \partial N$ なる 4 次元位相多様体。

位相多様体 M が 1 点を除いて smooth manifold の構造をもつとき almost smooth であるという。定理 I, II の M は almost smooth にとれる。また定理 II の X について $X \times \mathbb{R}$ は必然的に位相多様体である。何故なら X に対し $\dim N(X) = 0$ なので $X \times \mathbb{R}$ は DDP をもつ ([Cannon]) 即ち任意の D^2 から $X \times \mathbb{R}$ への ^{2つの} 連続写像は image が disjoint なるようにいくらでも近似することができる。すなわち Quinn の結果から $X \times \mathbb{R}$ は resolution をもつ。即ち、ある位相多様体 (5 次元) から $X \times \mathbb{R} \hookrightarrow E$ が線型にとれる。これは Edwards の近似的定理から位相同型で近似可能。よって $X \times \mathbb{R}$ は多様体で

ある。[Freedman]により 単連結で "almost smooth" な 4次元多様体の分類がなされたので。定理 I, II とともにその結果を利用して示すことができる。特に 1-connected end in dimension 5 に関する Freedman と Quinn の結果 (これは F-manifold なる概念によって記述された) は TOP manifold version にあてはまることを示すことができるので。上記の定理 I はその証明と類似の方法で示すことができる。以下証明の outline を示す。簡単のため定理 I の証明を重点的に述べる。

次の proposition を用いる。

Proposition. (W, M, M') を compact 単連結 ($\pi_1 W = 1$, $\pi_1 M = \pi_1 M' = 1$) TOP cobordism で W の次元 = 5, M, M' は almost smooth な 4次元位相多様体とする。

(i) M と M' の non smooth points を総して W の arc k を適当にとると $W-k$ 上に $M-k, M'-k$ の与えられた smooth 構造を拡張することができる。

(ii) 上記の k を flat にとることができる ($W-k, M-k$) は locally finite (一般には infinite な) handle decomposition で 1つの 2 handle の層とその上にある 1つの 3 handle の層のみからなるものが存在する。

}

(i) は $M-k \cup M'-k$ の smooth structure を $W-k$ 上に拡張する為の障害 $\theta \in H^4(W-k, \partial W-k; \mathbb{Z}_2)$ が 0 である (実際 $H^4(W-k, \partial W-k; \mathbb{Z}_2)$ 自体が 0) ことを示す。また (ii) は Quinn の ε -geometrical connectivity に他ならない。 k が flat にとれることは [Freedman] の主定理の証明におけるのと同様である。 117"れも既知の結果である。

さらに [Freedman] の結果中次のことを使う

[Freedman] の 5次元の Proper h cobordism 定理. (W, M, M') が 5次元 smooth 単純連結な proper h cobordism ならば W の end は有限個あり W の end は 1 connected とする。 このとき (W, M, M') は product cobordism に homeo である。

[11] ②. 位相的横断正則性定理. 特に最も単純な場合に限定して述べると次のようになる。

M^5 を 5次元多様体, $f: M^5 \rightarrow \mathbb{R}$ 連続写像とする。 このとき f と近似する写像 f' を適当にとると $f'^{-1}(0)$ は almost smooth な 4次元多様体となるようにできる。

まず $X \times \mathbb{R}$ に横断正則性定理を利用して、写像 $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{-1}(m)$ が almost smooth な位相多様体であるものとする。

$(W, M) = (f^{-1}(-\infty, \infty), f^{-1}(0))$ において, surgery により (W, M) の connectivity を上げること考える。まず index ≤ 2 の handle の trade により $\pi_1 M \cong \pi_1 W = 1$, $H_*(W, M) = 0 \quad * \leq 2$ とできる。このとき, trade する handle は M に "smooth" に attach されることよい。実際横断正則性定理の証明 ([Scharlemann] の方法の改変) において $X \times \mathbb{R}$ の中の locally flat arcs と circles の union L を適当にとると $X \times \mathbb{R} - L$ は smooth manifold の構造をもち, $\eta(L)$ を L の tub nhd とすると $(X \times \mathbb{R} - \eta(L)) \cap M$ が smooth in $X \times \mathbb{R} - L$ であるように M をとれる。そこで attach される handle は L と交わらないように (general position) とっておけばよい。そこで改変後の pair も (W, M) とかくことにすると M almost smooth としてよい。(一般に M に non smooth points が有限個生じてもこれを適当に arc でつなぎ shrink することから almost smooth としてよい)。すると duality により

$$H_*(W, M) = H_*(\bar{W}, M) \subseteq H^{5-*}(\bar{W}, X) = 0 \quad \text{for}$$

$* \geq 4$ となる. ただし $X \times \mathbb{R} \approx X \times (0, 1) \subset X \times (0, 1]$

とし, $\overline{W} = W \cup X \times [1] \subset X \times (0, 1]$ とおいてゐる. ここで

結局, $H_*(W, M) = 0 \quad * \neq 3$

$H_3(W, M)$ は 有限生成 free module

である. ここで問題は $H_3(W, M)$ を消すことである. H_3

(W, M) は有限生成なので, 十分大きい m に対し

$U = \overline{W} - f^{-1}(m, \infty)$ とおくと $H_3(U, M) \rightarrow H_3(W, M)$

は onto となる. 特に $(f^{-1}(m, \infty), f^{-1}(m))$ に対しても

上記の条件を満たすようにとれるので exact seq を計算すると $H_3(U, M) \cong H_3(W, M)$ となることばかりである.

このとき $(U, M, f^{-1}(m) = M')$ に Proposition を適用して

適当な arc k に対し $(U-k, M-k, M'-k)$ は smooth

cobordism で, 2, 3 handle のみからなる locally finite

な handle decomposition をもつと (2.5.11). このとき $(U-k,$

$M-k)$ の chain の構造から $H_3(U, M)$ の生成元として,

$(U-k, M-k)$ の有限個の 3 handles をとれることばかりである.

(これは高次元の場合と同様). それらを $h_1, \dots, h_p$ とおく.

これらが M に直接 attach されるよう改変で"きかぬ". H_3

(W, M) を消すことのできるが. これを保障するためには

Whitney トリッ? を利用しなくてはならない. まず $U-k$

6

のハンドル分解の中身のレベル V をとると V 上は

$\beta_i = \partial h_i$ (h_i の attaching 2 spheres) $i=1, \dots, p$ と

2 handles の cocore の boundary α_j がのびている。

handle 分解が locally finite ならば β_i 's と交わるのは有限個。 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ であるとしてよい。今 V -k 2 handles と 3 handles の dual である 2 handles は、すべて trivial に attach されているので

$$\pi_1(V - \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_j) = \pi_1(V - \bigcup_{i=1}^p \beta_i) = \pi_1 V = 1$$

である。さらに $H_1(V - \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_j - \bigcup_{i=1}^p \beta_i) = 0$ であるから。

[Freedman] におけるのと同様、Casson trick を施して、(特にここでは $\bigcup \beta_i$ と $\bigcup \alpha_j$ との交わりを増やし、自己交わりは必要ない) $\pi_1(V - \bigcup \alpha_j - \bigcup \beta_i) = 1$ にできる。ここで上記の

条件 $H_1 = 0$ は $\partial: H_3(W, M) \rightarrow H_2(M)$ が

$H_2(M)$ の direct summand への injection であることを使って証明される。このことは (W, M) の connectivity の条件及び (W, M) の homology の exact seq から従う。さらに

$$\beta_i \cdot \alpha_j = 0 \quad (\forall i, j)$$

であることは chain complex の構造から従う。これらのことから β_i と α_j の合計の交わりに対して immersed Whitney disk を作ることにできる。(1 かも $\bigcup \alpha_i \cup \bigcup \beta_j$ と交わらない

様に)。 11.3 (Freedman) の定理から immersed Whitney
 disk を直接 flat TOP disk に変換できることからできる
 から TOP Whitney trick で $h_1 \sim h_p$ を直接 M に attach
 するようにできるが (proper h -cobordism の証明にも同
 様の論法が使われた) この場合 handle trade 後の多様体
 (やはり M と書く) は almost smooth かどうかはわから
 ない。これを almost smooth になるように改変するこ
 とは $V-K$ における V のカラー $V \times [0, 1]$ の中に、次の
 ような h -cobordism をこのことにより達成される。す
 なわち V とある 4次元多様体 V' の間の h -cobordism
 W' で $\alpha_j \cup \beta_j$ の近傍 $\subset V$ 上 W' は product かつ V'
 における $(\cup \beta_j) \cap (\cup \alpha_i)$ に対応する Whitney disk は smooth
 in V' にとれる。(しかも $\cup \beta_j \cup \cup \alpha_i$ と交わるが)。このよう
 な W' は V に付随いくつかの $S^2 \times S^2$ を連結和をとる
 の中で immersed Whitney disk を smooth に改変) 次に
 余剰の $S^2 \times S^2$ に対応する homology class を $\cup \alpha_j \cup \cup \beta_i$ 及び
 Whitney disks と交わらばい TOP 2 handle で表わしそれを
 surgery することによりとられる。 W' は surgery の trace を改変
 して作られる。(Freedman-Quinn の定理に於けるのとほぼ同
 様) 新たに生成される V' は almost smooth になること

たとえば Bing の shrinking criterion にもとづいて
証明される。この $V \times I$ の中にうめられた V' を利用し、

$\cup \alpha_j$ と $\cup \beta_j$ の合計な交又に対し V' に π_1 smooth
Whitney disk を使って Whitney trick を行ない。これは h_2
3 handles $h_1 \sim h_p$ を改変すると、上記の新たな出来た M は
almost smooth になりことがわかる。しかも trade される
3 handles の dual は trivial に attach されたため新たな
 M の基本群はやはり 1 である。新たな (W, M) に対して
 $H_*(W, M) = 0$ for V_* , また $W' = \overline{X \times R - W}$ に対しても
 $H_*(W', M) = 0$ が示される。よって 5 次元の TOP engulfing
定理によって定理 I が証明される。定理 II を示すためには、
 $N(X)$ の各点の近傍系 N_i $i=0, 1, 2, \dots, \infty$; $N_i \subset \text{Int } N_{i-1}$
 N_{i-1} 中 $N_i \simeq 0$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} N_i = 1 \text{ 点} \in N(X)$ かつ $\{N_i\}$ が与えられる
ことに注意し。Propositions, (Freedman) の定理を π_1 かつ
relative form に改変する。たとえば proper h cobordism 定理
は次の形になる。

(W, M, M') 5 次元 C^0 proper h cobordism で codim
0 の submanifold の列

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2, \dots \supset M_L \text{ が存在して}$$

$\pi_1 M_i \rightarrow \pi_1 M_{i-1}$ はすべて 0 map. かつ W は
 $\overline{M - M_L}$ と smooth product と等しい。このとき W は

product cobordism とする。ただし L は manifold
 (W, M, M') によらない整数である。

その他定理 I の証明も然るべく変更する必要があるが、定理 II の証明も基本的には定理 I のそれと共通である。

参考文献

[Freedman] M.H. Freedman. The topology of four dimensional manifolds, preprint

[Freedman, Quinn]: M.H. Freedman, F. Quinn, Slightly singular 4 manifolds, TOPOLOGY 20(1981)161-173

[Scharlemann] M.G. Scharlemann, Transversality theorems at dimension four, Invent. Math. 33(1976), 1-14