

極大過剰決定系と その解層の対応について

京大数研 柏原正樹

与えられたモノドロミーに対して integrable connection を構成せよ、というのが有名な Hilbert の第 21 問題である。

ここでは、その拡張として、極大過剰決定系 (holonomic systems) と constructible sheaves が 1-1 に対応する事を述べる。

§1 問題の定式化

X を n 次元複素多様体, $\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{D}_X^\infty$) を X 上の有限階 (resp. 無限階) 微分作用素のなす層とする。

定義 1.1 $\mathcal{D}_X^\infty$ -Module $\mathcal{N}$ が holonomic であるとは、局所的に、holonomic $\mathcal{D}_X$ -Module $\mathcal{M}$ が存在して $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\infty (\varinjlim_{\text{def.}} \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M})$ が成立する事である。

[1] によれば、次の事実が知られている。

命題 1.2. $\mathcal{R}$ が holonomic $\mathcal{D}^\infty$ -Module
 なら $\mathcal{R}$ は R.S. (regular singularity)
 の場合) をもつ holonomic $\mathcal{D}$ -sub-Module
 $\mathcal{M}$ を含み、 $\mathcal{R} \simeq \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}$ が成立する。
 しかもこのような $\mathcal{M}$ は 1 つしかない。

この命題によれば、holonomic $\mathcal{D}^\infty$ -Modules
 のつくる category と R.S. をもつ holonomic
 $\mathcal{D}_X$ -Modules のつくる category は 1-1 に
 対応する。

さて、 $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ において、 $\mathcal{D}_X$ -Modules の
 つくる abelian category を、 $\text{Mod}(\mathcal{D}_X^\infty)$
 による $\mathcal{D}_X^\infty$ -Modules のつくる abelian category
 をあらわそう。更に、 $D(\mathcal{D}_X)$ で $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ の
 derived category をあらわす。即ち、 $D(\mathcal{D}_X)$
 の object とは $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ の complex

$$\mathcal{M}^\bullet : \cdots \rightarrow \mathcal{M}^{-1} \rightarrow \mathcal{M}^0 \rightarrow \mathcal{M}^1 \rightarrow \cdots$$

であり、 $\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N}^\bullet \in \text{Ob}(D(\mathcal{D}_X)) (= D(\mathcal{D}_X)$
 の objects の集合) の時、

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N}^\bullet) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet & & \mathcal{N}^\bullet \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \mathcal{L}^\bullet & \end{array} \right\} ; g \text{ は} \\ \text{quasi-isomorphism} \} / \sim$$

但し g が quasi-isomorphism とは
 任意の k に対して $H^k(\mathcal{N}^\bullet) \rightarrow H^k(\mathcal{L}^\bullet)$ が同型
 となることである。又、 $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet & & \mathcal{N}^\bullet \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \mathcal{L}^\bullet & \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet & & \mathcal{N}^\bullet \\ f' \searrow & & \swarrow g' \\ & \mathcal{L}'^\bullet & \end{array} \right\}$

という同値関係 $\sim$ 、或る $\mathcal{L}''^\bullet$ と $h: \mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{L}''^\bullet$,
 $h': \mathcal{L}'^\bullet \rightarrow \mathcal{L}''^\bullet$ という2つの quasi-isomorphisms
 が存在して、 $hg = h'g'$, $hf = h'f'$ が成立する
 という条件でいれる。

$D_{\text{hol}}^b(\mathcal{O}_X)$ により、有限個の j を除いて
 $H^j(\mathcal{M}^\bullet) = 0$ が成立し、任意の j に対して
 $H^j(\mathcal{M}^\bullet)$ が R.S. をもつ holonomic $\mathcal{O}_X$ -Module
 となるような $\mathcal{M}^\bullet$ からなる $D(\mathcal{O}_X)$ の full
 subcategory をあらわす。

$D(\mathcal{O}_X)$ と同様に、 $\text{Mod}(\mathcal{O}_X^\infty)$ の derived
 category $D(\mathcal{O}_X^\infty)$ も定義できる。 $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{O}_X^\infty)$ に
 よって、有限個の j を除いて $H^j(\mathcal{N}^\bullet) = 0$ が成立
 し、任意の j に対して $H^j(\mathcal{N}^\bullet)$ が holonomic

$\mathcal{D}_X^{\text{co}}$ -Module とするよすた $\mathcal{N}^*$ からなる $D(\mathcal{D}_X^{\text{co}})$ の full subcategory をあらわす。

$\text{Mod}(X)$ によて X 上の $\mathbb{C}$ -vector spaces の sheaves からよす abelian category とし, $D(X)$ を $\text{Mod}(X)$ の derived category をあらわす。

定義 1.3. X 上の $\mathbb{C}$ -vector spaces の層

F が $\mathbb{C}$ -constructible とは, ある X の 局所解析集合の減少列 $\{X_j\}_{j=0,1,\dots}$ が存在して 次の二条件を満足することである。

(1) $X = X_0$, $\bigcap X_j = \emptyset$

(2) $F|_{X_j - X_{j+1}}$ は $X_j - X_{j+1}$ 上の有限階の locally constant sheaf (即ち, 局所的には $F|_{X_j - X_{j+1}} \cong \mathbb{C}_{X_j - X_{j+1}}^r$)

よて, 前の構成法と同様にして, $D_c^b(X)$ を, 有限個の j を除いて $\mathcal{H}^j(F^*) = 0$ が成立し, 任意の j に対して $\mathcal{H}^j(F^*)$ が $\mathbb{C}$ -constructible とするよすた F^* からなる $D(X)$ の full

subcategory とする。

こうして 3つの category $D_c^b(X)$, $D_{rs}^b(\mathcal{O}_X)$, $D_h^b(\mathcal{O}_X^\infty)$ が定義された。その間の関連を次にしらべよう。

$\mathcal{M}^\bullet \in \text{Ob}(D_{rs}^b(\mathcal{O}_X))$ に対して,

$$(1.1) \quad \Phi(\mathcal{M}^\bullet) = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{O}_X)$$

とおく。 $\mathcal{O}_X$ の任意の $\mathcal{O}_X$ -injective resolution $I^\bullet$ をとり, double complex

$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}^\bullet, I^\bullet)$ に associate した

$\mathcal{O}_X$ simple complex が, (1.1) の右辺の意味である。これは、 $D(X)$ における同型を除いて, $I^\bullet$ のとり方によらない。

同様に $\mathcal{N}^\bullet \in \text{Ob}(D_h^b(\mathcal{O}_X^\infty))$ に対して

$$(1.2) \quad \Phi^\infty(\mathcal{N}^\bullet) = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_X^\infty}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{O}_X)$$

と定義する。

更に $F^\bullet \in \text{Ob}(D_c^b(X))$ に対して

$$(1.3) \quad \Psi^\infty(F^\bullet) = R\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F^\bullet, \mathcal{O}_X)$$

とおく。その時、次の定理が知られている ([1], [2])。

定理 1.4. (1) Φ (resp. Φ^∞) は

$D_{rs}^b(\mathcal{O}_X)$ (resp. $D_h^b(\mathcal{O}_X^\infty)$) から $D_c^b(X)$ への contravariant functor, Ψ^∞ は $D_c^b(X)$ から $D(\mathcal{O}_X^\infty)$ への contravariant functor である。

(2) $\Phi = \Phi^\infty \circ J$. 但し J は $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{O}_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ で定義される $D_{rs}^b(\mathcal{O}_X)$ から $D_h^b(\mathcal{O}_X^\infty)$ への functor。

(3) $\Psi^\infty \circ \Phi^\infty = \text{id}$.

(4) 任意の $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \text{Ob}(D_{rs}^b(\mathcal{O}_X))$ に対して

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = \text{Hom}_{D(\mathcal{O}_X^\infty)}(J(\mathcal{M}), J(\mathcal{M}'))$$

我々の目標は $D_c^b(X)$ から $D_{rs}^b(\mathcal{O}_X)$ への contravariant functor Ψ を構成して

$$\Psi\Phi = \text{id}, \quad \Phi\Psi = \text{id}$$

を示すことにあつて。この目標が達成されれば、 $\Phi, \Phi^\infty, \Psi, \Psi^\infty, \mathcal{J}$ はすべて category の equivalence で、3つの category $D_c^b(X), D_{rs}^b(\mathcal{O}_X), D_h^b(\mathcal{O}_X^\infty)$ は互に同型となる。

直観的にいへば、 Φ は微分方程式系に対してその解を対応させる functor であり、

Ψ は与えられた monodromy をもつ微分方程式系を構成する functor である。

§2 Ψ の構成

以下に述べる Ψ の構成法を理解する為、 Ψ^∞ を具体的にあらわしてみよう。

Ψ^∞ は、 $\mathcal{O}_X$ の flabby $\mathcal{O}_X^\infty$ -Modules による resolution I を勝手にとって

$$\Psi^\infty(F^\bullet) = \text{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^\bullet, I^\bullet)$$

で定義される。 $I^\bullet$ として例えば Daulbeault complex

$$\mathcal{B}_X^\bullet : \mathcal{B}_X^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{B}_X^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{B}_X^n$$

をとることができる。但し、 $\mathcal{B}_X^p$ は、 X 上の hyperfunction を係数とする $(0, p)$ -form のなす層、 $\bar{\partial}$ は antiholomorphic な変数に関する外微分である。ここで hyperfunction の層が flabby である事に注意しよう。

従って

$$\Psi^\infty(F^\bullet) = \text{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^\bullet, \mathcal{B}_X^\bullet)$$

である。

さて $\Psi(F^\bullet)$ は $\Psi^\infty(F^\bullet)$ の sub-complex で $\mathbb{Q}_X$ -Module からなるものでなければならない。

そこで $\mathcal{B}_X$ のかわりに、distribution を係数とする $(0, p)$ -form の層 $\mathcal{D}\mathcal{B}_X^p$ からなる

Daulbeault complex

$$\mathcal{D}\mathcal{B}_X^\bullet : \mathcal{D}\mathcal{B}_X^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}\mathcal{B}_X^1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \rightarrow \mathcal{D}\mathcal{B}_X^n$$

ともちいて $\text{Hom}(F, \mathcal{O}_X) \in \Psi(F)$ として
 とる事が考えられる。しかしながら、これは
 うまくいかない。というのは、 $F \rightarrow G$
 が quasi-isomorphism としても
 $\text{Hom}(F, \mathcal{O}_X) \leftarrow \text{Hom}(G, \mathcal{O}_X)$ は、
 quasi-isomorphism であるとは限らぬ
 からである。($\mathcal{O}_X$ でなく $\mathcal{B}_X$ の時は、
 各 $\mathcal{B}_X^p$ が flabby 故 このようにならない)。従って、正しい $\Psi(F)$ を
 定義するにはこの $\Psi(F)$ を修正する必要がある。

§3 Moderate homomorphism

まず、先中によつて導入された subanalytic
 set の概念を復習しよう ([3])

定義 3.1 実解析的多様体 M の subset
 X が M の subset として subanalytic とは、
 実解析的多様体 N_j^ν ($\nu=1, 2, j=1, \dots, m$)
 及び、 N_j^ν から M への proper real analytic

map $f_j^\vee$ があって, x の或る近傍 U に対して

$$\Sigma \cap U = \bigcup_j (f_j^{-1}(N_j^1) - f_j^{-1}(N_j^2))$$

となる事である。任意の x について subanalytic の時, 単に subanalytic と呼ぶ。

先に導入した $\mathbb{C}$ -constructible sheaf の定義において analytic と subanalytic におきかえる事によって 次の定義を得る。

定義 3.2 M 上の $\mathbb{C}$ -vector spaces の層 F が R -constructible とは, M の closed subanalytic subsets $\{M_j\}_{j=0,1,\dots}$ の減少列があって 次の諸条件を満たすことである。

- (1) $M_0 = M$, $M_j \cap M_{j+1} = \emptyset$ 且つ $\{M_j\}$ は局所有限
- (2) $F|_{M_j - M_{j+1}}$ は locally constant sheaf.

さて F を R -constructible sheaf とした時 $M\text{-Hom}(F, \mathcal{O}_M)$ を次のように定義する。但し以下 $\mathcal{O}_M$ は M 上の distributions の層である。 M 上の集合 U に対して

$$\Gamma(U; M\text{-Hom}(F, \mathcal{O}_M))$$

$$= \{ \varphi \in \Gamma(U; \text{Hom}(F, \mathcal{O}_M)) ;$$

任意の U の relatively compact open subanalytic subset V と $s \in F(V)$ に対して 或る U 上定義された distribution u があって $\varphi(s) = u|_V$ となる $\}$

上のように定義した時、次の命題が成立する（本質的には Łojasiewicz の不等式が subanalytic set に対しても成立する事による）

命題 3.3

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

は $\mathbb{R}$ -constructible sheaves からなる exact sequence とする時

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M\text{-Hom}(F'', \mathcal{D}_M) &\rightarrow M\text{-Hom}(F, \mathcal{D}_M) \\ &\rightarrow M\text{-Hom}(F', \mathcal{D}_M) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

は exact sequence である。

即ち, $M\text{-Hom}(*, \mathcal{D}_M)$ は $\mathbb{R}$ -constructible sheaves のつくる abelian category $\mathcal{I}$ で exact なる functor である。従って $\text{Hom}(*, \mathcal{D}_M)$ のかわりに $M\text{-Hom}(*, \mathcal{D})$ をもちいて前述の $\Psi(F')$ を修正すれば正しい Ψ の定義を得るだろう。

さて, X を複素多様体, $F^\bullet \in D_c^b(X)$ の object とする。その時, 或る $\mathbb{R}$ -constructible sheaves からなる bounded complex $G^\bullet$ と $D_c^b(X)$ における isomorphism $F^\bullet \simeq G^\bullet$ が存在する。

$$\Sigma = \Sigma^*$$

$$\Psi(F^\bullet) = M\text{-Hom}(G^\bullet, \mathcal{O}_X^\bullet)$$

と定義する。但し, $M\text{-Hom}(G^p, \mathcal{O}_X^q)$ は $M\text{-Hom}(G^p, \mathcal{O}_X)$ と同様に Σ として定義された $\text{Hom}(G^p, \mathcal{O}_X^q)$ の subobject である。

$\mathcal{O}_X^p$ が $\mathcal{O}_X$ -Module であり, Σ が $\mathcal{O}_X$ -linear となることから $M\text{-Hom}(F^\bullet, \mathcal{O}_X^\bullet)$ は $\mathcal{O}_X$ -Module のつくる complex となる。

一方 $M\text{-Hom}(*, \mathcal{O}_X^p)$ は命題 3.3 と同様の性質 (exactness) を満足するから,

$M\text{-Hom}(G^\bullet, \mathcal{O}_X^\bullet)$ は $D(\mathcal{O}_X)$ の同型を除いて $G^\bullet$ によらば定まる。従って Ψ は

well-defined な $D_c^b(X)$ から $D(\mathcal{O}_X)$ への contravariant functor となる。

こうして構成された Ψ は所期の性質

質をみたす。即ち次の定理が成り立つ。

定理 3.4 $\Psi(D_c^b(X)) \subset D_{rs}^b(\mathcal{D}_X)$

[且つ $\Psi\Phi = \text{id}, \quad \Phi\Psi = \text{id}$]

従って既に述べた様に上の定理から次の定理が導かれる

定理 $D_c^b(X), D_{rs}^b(\mathcal{D}_X), D_h^b(\mathcal{D}_X^\infty)$

[は $\Phi, \Phi^\infty, \Psi, \Psi^\infty, J$ によつて互に同型である。]

定理 3.4 は 文中の 特異点解消定理 をもちいて 特異点が normal crossing の場合に帰着させることによつて証明される。その詳細は略す。

文献 [1] On holonomic systems of microdifferential equations III — Systems with regular singular —

arities , Preprint (with T. Kawai).

[2] On the maximally overdetermined system of linear differential equations , I. Pubbl. RIMS, 10, 563-579, 1975.

[3] 中平 裕 Introduction to real analytic sets and real analytic map ,
Istituto Matematico "L. Tonelli" dell
Universita' di Pisa , 1973.