

標数 p の単有理橋円曲面について

東北大理 桂 利行

§0. Introduction.

X を 標数 p の代数的閉体 k 上定義された非特異射影曲面とする。 X は、函数体 $k(X)$ が k 上超越次数 2 の純超越拡大体に含まれるとき、単有理的といわれる。標数 $p=0$ のときには、単有理曲面と有理曲面の概念が一致することは周知の事実である。標数 p が正の場合には、1958年に Zariski が有理的でない単有理曲面の例を見出して以来、T. Shioda, M. Artin, M. Miyanishi, A.N. Rudakov 及び I. R. Šafarevič 等によって、同様な例が数多く見出され研究されてきた。本稿では、橋円曲面のある類に対し、同様の例を見出し分類することを示す。標数 p が小さい程興味深いのであるが、ここでは $p \geq 5$ の場合について証明の概要をのべ、 $p=3$ の場合には結果だけ

と記す。

§1. 結果

$\pi : S \longrightarrow C$ を、非特異完備な曲線 C 上の *relatively minimal* な楕円曲面とする。

定義 1. 楕円曲面 $\pi : S \longrightarrow C$ に対し、非特異完備な曲線 C' と正則写像 $f : C' \longrightarrow C$ があって fiber product $S \times_C C'$ が有理曲面 $\mathbb{P}^2(k)$ に双有理同型になるとき、 S は *base change* タイプの単有理曲面であるという。

定義 2. X を単有理曲面とする。 k 上の s 変数純超越拡大体 K で、 $K \supset k(X)$ かつ拡大 $K/k(X)$ が純非分離的拡大になるようなものが存在するとき、 X を純非分離的単有理曲面という。とくに $K/k(X)$ の拡大次数が p になるようにとれるとき、 X を *Zariski* 曲面という。

楕円曲面 $\pi : S \longrightarrow C$ が単有理的なら C は有理曲線 $\mathbb{P}^1(k)$ に同型である。 $\mathbb{P}^1(k)$ の無限遠点 ∞ をのぞいた部分の座標を t とかく。

次の2つのクラス、橋円曲面を考える。

$$\text{class (I)} \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3x, \\ \text{ii)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t-\alpha)x, \end{aligned}$$

$$\text{class (II)} \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^4, \\ \text{ii)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5, \\ \text{iii)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5, \\ \text{iv)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^4(t-\alpha)^5, \\ \text{v)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5, \\ \text{vi)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5, \\ \text{vii)} \quad & y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5(t-\gamma)^5, \end{aligned}$$

ただし, α, β, γ は $0, 1$ でではなく, かつおたがいに等しくない。

本稿の主定理は次のとおりである。

定理1. k の標数 $p \geq 5$ とする。

base change タイプの非有理単有理橋円曲面でセクションを持つものは次のように分類される。

1) $p \equiv 1 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は存在しない。

2) $p \equiv 5 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (II) で尽くされる。

3) $p \equiv 7 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (I) で尽くされる。

4) $p \equiv 11 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (I)(II) で尽くされる。

定理 2. k の標数 $p = 3$ とする。

base change タイプの非有理数有理橋円曲面でセクションを持つものは次のように分類される。

$$1) \quad y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^3x \\ + t^4(t-1)^4(a+bt + \varphi(t)t^2),$$

ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$\varphi(t)$ は任意の 2 次以下の多項式。

$$2) \quad y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t+1)^2x \\ + a(t-1)^6 + bt^3(t-1)^4 + (t-1)^4t^4\varphi(t),$$

ただし, a, b は k の任意の元,

$\varphi(t)$ は任意の 4 次以下の多項式。

$$3) \quad y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t+1)^3(t-\alpha)^3x \\ + (t-1)^6\{a+bt^3+ct^3(t+1)^3\} + t^3(t+1)^3(t-\alpha)^3(t-1)^4\varphi(t)$$

ただし, $\alpha \neq -1, 0, 1$, a, b, c は k の任意の元

$\varphi(t)$ は任意の 5 次以下の多項式。

Remark. 定理 1 に於ける class (I) i) 及び class (II) i) ii) iii), 及び定理 2 に於ける 1) は, k 3 曲面である。

系 1. k の標数 $p \neq 3$ とする。

base change タイプの非有理単有理橋円曲面でセクシヨンを持つものは Zariski 曲面である, さらに, 構造層のオイラー数 $\chi(\mathcal{O}_S)$ は, 5 以下である。

§2. 定理 1 の証明の大要。

補題 1. $\pi: S \rightarrow C$ が base change タイプの単有理橋円曲面であるならば, S は純非分離的橋円曲面である。

証明. 定義から, 曲線 C' と正則写像 $f: C' \rightarrow C$ で fiber product $S \times_C C'$ が有理曲面に双有理同型になるものが存在する。函数体 $k(C)$ の $k(C')$ の中での分離閉包を K とし, K を函数体とする曲線を C'' とする。容易にわかるように, C, C', C'' は有理曲線であるからそれぞれの局所座標 t, u, v を適当にとれ

り, その座標に関する C' から C への正則写像を g とかけば

$$(1) \quad t = f(u) = g(u^{p^n})$$

となる。 g の係数を p^n 乗根におきかえたものを $g^{(1/p^n)}$ とかけば (1) は

$$(2) \quad t = [g^{(1/p^n)}(u)]^{p^n}$$

とかける。すなわち, 次の図式をうる。

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} C'' & \xleftarrow{v = u^{p^n}} & C' \\ g \downarrow & & \downarrow g^{(1/p^n)} \\ C & \xleftarrow{v = \Delta^{p^n}} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

ここで, Δ は $\mathbb{P}^1$ の座標である。これから

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{h} & S \times_C \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\tilde{g}^{(1/p^n)}} & S \times_{C'} C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \xleftarrow{v = \Delta^{p^n}} & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{g^{(1/p^n)}} & C' \end{array}$$

なる図式をうるが, $S \times_{C'} C'$ は有理的で $\tilde{g}^{(1/p^n)}$ は分離的である。従って Enriques-Castelnuovo の criterion から $S \times_C \mathbb{P}^1$ は有理的になり, h が純非分離的故求める結果をうる。(証明終り)

補題 2. $\pi: S \rightarrow C$ をセクションをもつ relatively minimal な楕円曲面とする。

そのとき, $C_2(S) = 12 \iff S$ が有理的。

とくに S が singular fiber をもち,かつ有理的でないための必要充分条件は $C_2(S) \geq 24$ である。

以下, 標数 $p \neq 5$ とする。

補題 3. 次数 p の純非分離的な base change によって singular fiber のタイプは次のように変化する。

もとのタイプ	変換後のタイプ			
b_m	b_{pm}			
$C5_m$	$C5_{pm}$			
Char. k	$p \equiv 1 \pmod{12}$	$p \equiv 5 \pmod{12}$	$p \equiv 7 \pmod{12}$	$p \equiv 11 \pmod{12}$
もとのタイプ	タイプ	タイプ	タイプ	タイプ
C1	C1	C8	C1	C8
C2	C2	C2	C7	C7
C3	C3	C6	C3	C6
C4	C4	C4	C4	C4
C6	C6	C3	C6	C3
C7	C7	C7	C2	C2
C8	C8	C1	C8	C1

ここで，記号は Ogg [1] に従う。

補題 4. *base change* タイプの非有理単有理橋円曲面でセクションを持つものは *singular fiber* としてタイプ b_m のものも， $C5_m$ のものも含まない。

証明は，上記3つの補題を組みあわせればできる。

補題 5. 補題 4 の仮定の下に，橋円曲面 S は，Zariski 曲面である。

証明は，補題 1，補題 3 及び補題 4 の組み合わせで得られる。

以上から，次数 p の純非分離的な *base change* によって有理的になるような橋円曲面を分類すれば，定理 1 を示しうることかわかる。

これは，*singular fiber* の計算から得られる。

標数 p が 2 または 3 のときには，Wild ramification の問題があって複雑になるが，基本方針は上記と同様である。詳細はどこかに発表する予定である。

参考文献

[1] A.P. Ogg; Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89 (1967).