

マクロ経済学の景気循環モデルに対する不安定周期軌道解析

東京大学大学院・数理科学研究科 斉木 吉隆 (Yoshitaka Saiki)

石山 健一 (Ken-ichi Ishiyama)

Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo

概要 一般にカオス力学系には無数の不安定な周期軌道が埋め込まれていることが知られている。本報告では、マクロ経済学において重要な話題である景気循環の骨組みをモデル化した低次元連続カオス力学系を取りあげ、周期の短いものから 500 個程度の不安定周期軌道を数値的にほぼ網羅した。そして、それらの周期軌道に基づいてカオスダイナミクスの如何なる特徴がどの程度捉え得るかについて考察した。また、適当なケインズの財政政策を行なう地域とより積極的なケインズの財政政策を行なう地域との間に存在するある形の投資の相互作用が弱まったときに、2 地域の景気循環は安定性という観点においては、カオスからリミットサイクルへの遷移が認められるにも関わらず、景気循環の根幹のメカニズムは変わらないという結論をアトラクタに埋め込まれた周期軌道に着目することによって与えた。

1 導入

自然科学, 社会科学を問わず, 様々な分野においてカオス力学系¹は出現する。カオス力学系の数学的な定義はひとつに定まっていないが, 初期値敏感性に代表される「不安定性」とアトラクタの有界性に由来する「回帰性」の二つの特徴が概念的に様々なカオスに関する定義の中に組み込まれている。そして, 不安定周期解は, これら二つの特徴を持ち合わせたカオス力学系の特殊解であり, 力学系の特徴づけにおいて本質的な役割を果たすことが容易に想像される。実際, Devaney(1989) によるカオス的な不変集合の数学的定義においては「周期点集合が不変集合において稠密である」という条件が存在するし, その他にも公理 A 力学系 (Smale(1967)) の定義をはじめとして力学系の理論研究において周期軌道は頻繁に用いられている。一方, 応用科学においては, カオス制御に関連して不安定周期軌道を用いたいくつかの研究 (Ott, Grebogi and Yorke(1990), Pyragas(1992)) は存在したものの, 具体的にカオス力学系を考察する目的で不安定周期軌道が用いられることはほとんどなかった。その最大の理由は, 不安定周期軌道がその不安定性ゆえに数値的にも検出困難であることであろう。しかし, この数年の間に流体力学の分野において, ナヴィエ・ストークス方程式や乱流シエルモデルの不安定周期軌道を数値的に検出 (Kawahara and Kida(2001), Kato and Yamada(2003)) して乱流における秩序構造を捉える非常に興味深い研究が始まっている。ただ, これらの研究においては, 力学系の次元が極めて高いために, 当然のことながら検出される不安定周期軌道の個数は高々数個に留まっている。一方, カオスアトラクタの不安定周期軌道による特徴づけに関連していくつかの理論研究が存在する (Bowen(1978), Cvitanović(2004)) が, これらは一般に極限操作を伴うもので, 現実問題として十分多くはない有限個の周期軌道しか検出し得ない具体的な系への応用の有効性は明らかになっていない。本報告では, 具体的な力学系に対して, 十分多くはない有限個の周期軌道に基づいてどのような解析が可能となるかを明らかにする目的でいくつかの考察を行なう。

ところで, 失業とインフレーションの経済学と言われているマクロ経済学において, 景気循環は最も重要な話題のひとつである。景気は極めて多くの要因によって変動していると考えられるし, さまざまな偶然に支配されていることも想像に難くない。しかし, マクロ的要素の強い景気循環にはミクロレベルでの確率的要素の影響は直接及ぼされていないと考えることは自然である²。また, 景気の循環を生み出す基本的メカニズムは少数の要因に基づいていると考えることも自然であり, 景気循環を少数自由度の力学系として捉える研究は盛んに行なわれてきた (Kaldor(1940), Goodwin(1967), Pohjola(1981))。その際, 安定な解 (周期解, 固定点) をもつ力学系モデルとカオス的な解をもつ力学系モデルの双方が取りあげられてきたが, しばしば, ダイナミクスに大きな違いがないと思われる場合にもそれらの間には大きな隔たりがあるように受け止め

¹本報告では力学系と言えば, 特に言及しない限り散逸力学系を念頭に置いている

²流体もミクロスケールでみると確率運動と捉えられるが, 流体粒子という大きな要素でみると決定論的方程式で記述される

られてきた。しかし、景気循環とは、その言葉のとおり景気の周期的な変動であり、安定周期軌道をもつ力学系ばかりでなく、カオス的な解をもつ力学系モデルを考察する際にも、系に無数に埋め込まれた周期軌道に着目することは極めて自然であると考えられ、それに基づく解析はその隔たりを埋める上で非常に有効に働くと予想される。本報告では、労働者、雇用者、ケインズの財政政策を行なう政府、の三主体が経済を織りなす地域と、より強いケインズ政策を行なう政府をもつ地域が投資のやりとりを行なうことでカオス的な景気変動を生じさせている2地域景気循環モデルを系の不安定周期軌道に焦点をあてて考察する。

次節では、本報告で考察するケインズ・グッドウィン型の景気循環連続力学系モデルを構成する。第3節では、本モデルの数値計算における誤差の見積もりおよび不安定周期軌道を数値的に検出するために用いるニュートン・ラフソン・ミーズ法について述べる。一般にカオス力学系の時間発展の近似としての数値計算は、系がもつ指数的不安定性により短い有限時間で破綻するが、本手法に基づいて数値的に検出された不安定周期解は、数値計算の観点でも適切な解になっている。第4節では、数値的に検出された不安定周期軌道とカオス軌道の詳細な対応関係を確認する。カオス軌道のある特徴的な構造はあるクラスに属する短い周期をもつ周期軌道のみで捉えることができ、また、より詳細な構造も数値的に検出可能な周期軌道によって十分捉えられることがわかる。続いて、不安定周期軌道を周期の長さに応じて分類してその個数の増大度を見積もり、その増大度は極めて速く収束していくことを確認する。これは応用上非常に有意義な結果であると考えられる。この増大度に基づいて力学系がもつ位相的な複雑さを捉えることができるが、本景気循環モデルはカオス力学系ではあるものの複雑さの低い系であることがわかる。また、第7節では、2地域間の投資の相互作用パラメタを変えて、系が安定化してリミットサイクルをもつ状態まで周期軌道の分岐追跡を行なう。それによれば、ある一つの周期軌道は大きな構造の変化もなく、常にアトラクタに埋め込まれ続けていることが確認できる。この事実およびダイナミクスの複雑さが極めて低いことから、2地域カオス的な景気循環は、カオス状態のときもその周期軌道と本質的に異なるダイナミクスはもっており、それらの間の投資の相互作用の強さによって安定性という側面では変化が見られるが、景気循環を生み出す基本メカニズムには変化は見られないと結論づけることができる。

2 モデル

マクロ経済学はインフレーションと失業の経済学とも言われ、それらの時間変動である景気循環は極めて重要な問題である。本報告においては、労働者、雇用者、ケインズ政策を採用する政府の三主体の相互作用する経済地域が、より強いケインズ政策を採用する政府をもつ経済地域との間に資本移動(投資の相互作用)がある状況をモデル化した6次元力学系モデルを扱う。本モデルは、2地域ケインズ・グッドウィン型の成長循環をあらわす連続力学系であり、第*i*地域(*i* = 1, 2)の経済量の時間発展は、以下の様に記述される(Ishiyama and Saiki(2005))。

$$\frac{du_i}{dt} = (\hat{w}_i - (\alpha_i + \hat{p}_i))u_i, \text{ 労働分配率の動学} \quad (1)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = (\hat{Y}_i - (\alpha_i + \beta_i))v_i, \text{ 雇用率の動学} \quad (2)$$

$$\frac{d\pi_i^e}{dt} = \theta_i(\hat{p}_i - \pi_i^e), \text{ インフレ期待の動学} \quad (3)$$

変数

- $u_i (\equiv (w_i L_i)/(p_i Y_i))$: 労働分配率
- $v_i (\equiv L_i/N_i)$: 雇用率
- π_i^e : インフレ期待
- w_i : 名目賃金率
- L_i : 雇用水準
- p_i : 価格(物価水準)
- Y_i : 実質総産出 (= 実質総所得 = 実質総支出)
- N_i : 労働供給

定数

- $\alpha_i (\equiv \widehat{(Y_i/L_i)})$: 技術進歩率
- $\beta_i (\equiv \hat{N}_i)$: 労働人口成長率
- θ_i : 労働者の適応期待調整速度

但し、変数についている $\dot{}$ は、その変数の変化率（成長率）をあらわしており、特に、 $\dot{p}_i$ はインフレ率（物価水準の上昇率）を意味する。本モデルは伝統的な成長循環モデル（Goodwin(1967)）の拡張であり、アドホックな仮定をすることによって集約された経済変数の動学として記述されている。名目賃金成長率 $\dot{w}_i$ は、資本家階級と労働者階級の賃金交渉によって決定される。労働市場において、需給関係が逼迫している場合、もしくは労働者がインフレーションが今後高い水準で進行すると予想している場合には、労働組合は名目賃金率の改善を強く要請するが、失業が蔓延している場合や物価水準が下落すると予想される場合には、名目賃金率の下落を受け入れざるを得ない。したがって、名目賃金成長率は雇用率 v_i とインフレ期待 π_i^e に次の様に依存している。

$$\text{賃金交渉 } \dot{w}_i = f_i(v_i, \pi_i^e), \quad \frac{\partial f_i}{\partial v_i} > 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \pi_i^e} > 0 \quad (4)$$

この f_i は、フィリップス曲線とよばれている³。不完全競争的な財市場における各地域の物価水準は、資本家によって次の様に制御されている。

$$\text{価格変動 } \dot{p}_i = \gamma_i(\dot{w}_i - \alpha_i) \quad (5)$$

γ_i は各地域の財市場における価格の硬直性（の逆数）をあらわす係数、 α_i は技術進歩率である。このモデルでは、技術の進歩は労働生産性の上昇と解釈されており、したがって1単位の効率労働の投入によって生産される財の量は一定率 α_i で上昇することになる。(5)は、賃金交渉による生産コストの上昇（下落）に価格の引き上げ（引き下げ）によって対応しようとする企業家の行動を定式化したものである。 γ_i が大きい程、市場価格が企業家（資本家）にとって望ましい価格水準に至るまで費やす時間が短いことを意味する。ここで、資本家にとって望ましい価格とは、その財の限界費用（本モデルでは労働生産性 Y_i/L_i に対する名目賃金率 w_i の比 $(w_i L_i)/Y_i$ ）に一定のマークアップ率を掛けた値とする（Sportelli(1995)）。国内生産成長率 $\dot{Y}_i$ は、次の様にあらわされる。

$$\text{産出計画 } \dot{Y}_i = \varepsilon_i \left(\frac{I_i + G_i + C_i - Y_i}{Y_i} \right) \quad (6)$$

ここで、 ε_i は、生産水準の調整速度を意味するパラメタである。企業家（資本家）は、現行の経済状態に基づいて生産計画の見直しを行なう。(6)の右辺の括弧内の分子は、超過需要の予測値を意味する。この生産計画に則して各地域における労働需要および既存の資本設備の稼働率が調整される。ここでは、需要予測に組み入れられている投資関数 h_i を次の様に仮定する。

$$\text{民間投資 } I_i = h_i(u_i, u_j)Y_i, \quad j \neq i \quad (7)$$

なお、 h_i は、両地域の収益割合に非線形に依存している。

$$\frac{\partial h_i}{\partial u_i} < 0, \quad \frac{\partial h_i}{\partial u_j} > 0, \quad j = 1, 2, j \neq i \quad (8)$$

これはスコットの投資関数の拡張になっている。Skott(1989)において、投資関数は総産出資本率に加えて総収入に対する総利益の比率の関数でもあるが、本モデルでは、さらに2地域間の相互投資も考慮している。このようなスコット型の投資行動がモデルにおいてマクロ経済学的な成長循環を引き起こす一因になると考えられる⁴。また、公共需要は、

$$\text{政府支出 } G_i = \delta_i Y_i + \mu_i(v_i^* - v_i)Y_i \quad (9)$$

とあらわされる。 δ_i は所得税率で μ_i は経済状況に対する各地域の政府の反応係数⁵、 v_i^* は均衡雇用率である。なお、総消費は

$$\text{消費 } C_i = c_i \left((1 - \delta_i)((1 - u_i)Y_i + r_i B_i) - q_i \frac{dB_i}{dt} \right) + (1 - \delta_i)u_i Y_i \quad (10)$$

とあらわされる。 c_i は資本家の消費性向であり、労働者は全収入を消費財の購入にあてている。 B_i 、 q_i 、 r_i は、それぞれ新しく発行された債券の量、相対価格、実質利子率であり、政府の予算制約は以下の様になる。ここ

³Phillips(1958)は、名目賃金成長率と失業率の関係を指摘した

⁴本モデルは生産計画に対する投資需要の影響を強調しているが、資本の蓄積や減耗は特に表現していない

⁵Wolfstetter(1982)は、グッドウィン型景気循環モデル（Goodwin(1967)）において裁量的財政政策を行なう政府を導入した

で、資本家は政府の発行する債券のすべてを購入すると仮定している。したがって、政府は支出に対する税収の不足分を新たな債券の発行によって常に補うことができる。

$$G_i + r_i B_i - \delta_i(Y_i + r_i B_i) = q_i \frac{dB_i}{dt} \quad (11)$$

(9) と (11) から

$$\mu_i(v_i^* - v_i)Y_i = q_i \frac{dB_i}{dt} - (1 - \delta_i)r_i B_i \quad (12)$$

を得る。以上の式から要約された次の式が導かれる。

$$\dot{Y}_i = \varepsilon_i(h_i(u_i, u_j) + (1 - c_i)\mu_i(v_i^* - v_i) + (\delta_i - 1)(1 - c_i)(1 - u_i)) \quad (13)$$

生産計画は、雇用率 v_i と両地域の総収入における総利益の比率によって定まる。本報告では、これらの仮定から構成されるモデルを以下の様に定数、関数形を設定して解析を行なう。

先に述べた定数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.02$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.01$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.8$, に加えて、次のものも時間を通じて一定値, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $c_1 = c_2 = 0.3$, $\delta_1 = \delta_2 = 2/7$, $v_1^* = v_2^* = 0.8$, $\mu_1 = 1.25$, $\mu_2 = 6$ を取るものとする。また,

$$\text{フィリップス曲線 } f_i(v_i, \pi_i^e) = 0.1\left(\frac{1}{1 - v_i} - 4.8\right) + \pi_i^e \quad (14)$$

$$\text{投資曲線 } h_i(u_i, u_j) = 1.5(1 - u_i)^5 + \eta(u_j - u_i)^3, \eta > 0 \quad (15)$$

と定める。このときモデルは具体的に以下の様に書き下せる。

第1地域

$$\frac{du_1}{dt} = 0.5\left(\frac{0.1}{1 - v_1} + \pi_1^e - 0.5\right)u_1 \quad (16)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = 0.1(1.5(1 - u_1)^5 + \eta(u_2 - u_1)^3 + 0.5u_1 - 0.875v_1 - 0.1)v_1 \quad (17)$$

$$\frac{d\pi_1^e}{dt} = \frac{v_1(0.4\pi_1^e + 0.2) - 0.4\pi_1^e - 0.16}{1 - v_1} \quad (18)$$

第2地域

$$\frac{du_2}{dt} = 0.5\left(\frac{0.1}{1 - v_2} + \pi_2^e - 0.5\right)u_2 \quad (19)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = 0.1(1.5(1 - u_2)^5 + \eta(u_1 - u_2)^3 + 0.5u_2 - 4.2v_2 + 2.56)v_2 \quad (20)$$

$$\frac{d\pi_2^e}{dt} = \frac{v_2(0.4\pi_2^e + 0.2) - 0.4\pi_2^e - 0.16}{1 - v_2} \quad (21)$$

ただし、2地域間の投資の相互作用の強さを支配するパラメタ η は基本的には3.5に固定するが、後に変化させて分岐追跡を行なう。

3 数値計算

本研究では、モデル力学系の時間発展は倍精度数値計算で4次のルンゲクッタ法を採用しており、時間刻みは0.003程度⁶としている。

⁶周期軌道の計算では、当然ながら時間刻みを可変にしている

3.1 数値計算の誤差の見積もり

一般にカオス力学系の時間発展数値計算は、力学系の指数的不安定性によって、十分長くない有限時間で時間発展としての意味を失うことが知られているが、以下では、本モデルにおいて数値計算が時間発展として破綻する時刻を見積もる。

倍精度計算の丸め誤差： δ

不安定性指数の上限： λ_{max}

時間発展が破綻していないとみなす最大誤差： err

として、

$$\delta \exp(\lambda_{max} t) \leq err \quad (22)$$

をみたす最大の $t (= t_{max})$ を求めればよいが、本モデルの場合、 $\delta = 10^{-16}$, $\lambda_{max} = 0.04$, $err = 10^{-8}$ として

$$t_{max} = \frac{\log(err) - \log(\delta)}{\lambda_{max}} = \frac{\log(10)^{-8} - \log(10)^{-16}}{0.04} \approx 200 \times 2.30 = 460$$

と見積もることができる。すなわち、時間発展として信頼できるのは、およそ $t = 460$ 程度までということがわかる。なお、この程度の時間のカオス軌道を観察しても、ダイナミクスの特徴は十分に得られないことに注意されたい⁷。

3.2 不安定周期軌道検出方法 (ニュートン・ラフソン・ミーズ法)

本報告において、我々はモデル力学系がもつ多数の不安定周期解を数値的に検出するが、その検出手法として、ニュートン・ラフソン・ミーズ法を採用した。以下では、その計算手法について述べる。 n 次元力学系 ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbf{R} \quad (23)$$

の $t = 0$ のときに $\mathbf{x}$ を通る軌道を $\{\phi_t(\mathbf{x}) | t \in \mathbf{R}\}$ として、周期軌道の検出は、

$$H(\mathbf{x}, t) = \phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}. \quad (24)$$

のゼロ点 $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{X}, T)$, すなわち、周期軌道上の一点 $\mathbf{X}$ と周期 T の $n+1$ 個の未知数を定めることに対応する。具体的な計算アルゴリズムは以下の様になる。

$\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, t)$ を線形化すると、

$$\Delta \mathbf{y} = D_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t) \Delta \mathbf{x} + D_t H(\mathbf{x}, t) \Delta t \quad (25)$$

$$= \{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\} \Delta \mathbf{x} + f(\phi_t(\mathbf{x})) \Delta t. \quad (26)$$

となる。但し、 $\Phi_t(\mathbf{x})$ は、 $\phi_t(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ に関して変分をとった $n \times n$ 行列、 I は $n \times n$ の単位行列である。ここで、線形補間により $H(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) \approx 0$ となるように、 $\Delta \mathbf{x}$ と Δt に対して $H(\mathbf{x}, t) + \Delta \mathbf{y} = 0$ なる条件を課すと、

$$\{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\} \Delta \mathbf{x} + f(\phi_t(\mathbf{x})) \Delta t = -H(\mathbf{x}, t). \quad (27)$$

となる。ただ、これは n 本の条件であり、 $n+1$ 個の未知数 $\Delta \mathbf{x}$ と Δt は、一意に定まらない。そこで追加の制約条件として修正ベクトル $\Delta \mathbf{x}$ が軌道に直交するという条件

$$\langle f(\mathbf{x}), \Delta \mathbf{x} \rangle = 0. \quad (28)$$

を課す (Mees(1981)) ことで、 $n+1$ 個の未知数に対して $n+1$ 本の条件式とする。この作業を反復することによって周期軌道の検出を行なう。すなわち、添字 i を反復回数として、適当な初期予測 $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})$ の下、

$$\begin{pmatrix} \Phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - I & f(\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)})) \\ f(\mathbf{X}^{(i)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{X}^{(i)} \\ \Delta T^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(i)} - \phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁷通常は、時間発展として破綻する時刻より長い時間発展数値計算を行なっても、考察する性質が時間刻み依存性がないもの場合にはある程度妥当な結果が出ていると期待することは多いし、実際本報告でも行なっている

を解いて,

$$(\mathbf{X}^{(i+1)}, T^{(i+1)}) = (\mathbf{X}^{(i)} + \Delta\mathbf{X}^{(i)}/m, T^{(i)} + \Delta T^{(i)}/m) \quad (29)$$

とする作業を繰り返し行なう。なお, m は, 減速係数であり, 検出しようとしている周期軌道の不安定性および周期に応じた値 m を採用することが多くの周期軌道を効率良く求める上で極めて重要となる。

そして, 周期軌道の収束判定条件としては,

- $|H(\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})| = |\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - \mathbf{X}^{(i)}|$ (実質誤差)
- $|(\Delta\mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)})|$ (相対誤差)

が共に十分小さくなるというものを採用する。本研究においては, 実質誤差が 10^{-8} 以下でかつ相対誤差が 10^{-6} 以下というものを収束条件としている。このアルゴリズムによって数値的に収束させて求めた「周期軌道」は, その十分近傍の点も「周期軌道」の近接軌道を通るという意味で数値的に妥当な軌道であると考えることができる。また, 初期予測が極めて周期軌道に近い場合を除いて一般にアトラクタに埋め込まれた周期軌道のみを検出するという特徴を持っている。

なお, 周期軌道の検出の際も時間発展計算を実行しているため, 数値的には 3.1 節で見積もった程度 (≈ 460) までの周期をもつ周期軌道しか原理的に網羅検出することはできない。すなわち, これ以上の長さの周期をもつ周期軌道のうち, 不安定性が高いものは検出し得ない⁸。

4 モデルのカオスと不安定周期軌道の対応

本節では, 第2節で導入した2地域景気循環モデルのカオスと不安定周期軌道 (UPO(unstable periodic orbit)) に関して考察する。まず, 本モデルのカオスアトラクタ, カオス軌道の特徴を捉える。

4.1 カオス的景気循環

本モデルの生み出す景気循環は, 各地域ごとに射影して (図1) 労働分配率と雇用率のみに着目すると, 循環の方向は OECD 加盟国の景気循環の実証研究 (Harvie(2000)) でも指摘され, また, 通常のグッドウィンモデルで再現されているものと同様であることがわかる。

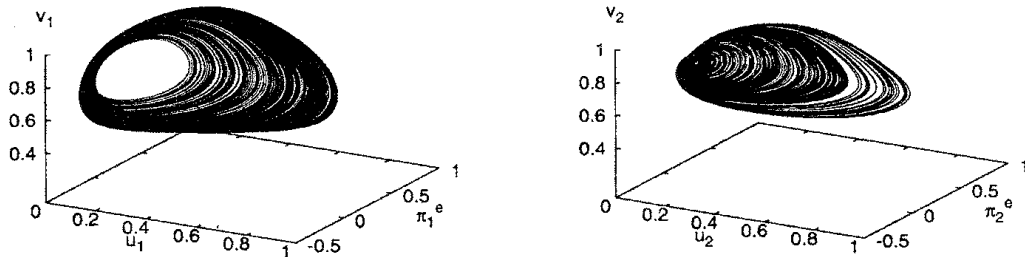


図1: カオスアトラクタの概形の各地域への射影 (左: 第1地域 右: 第2地域)

また, モデルのカオス的景気循環の時間発展 (図2) を見ることによって, 各変数は景気循環に対応する上下振動を繰り返しており, どの変数で見ても1回の(上下)振動に要する時間はおよそ25で, また各変数の振動は多少の時間差で同調していることが確認される。

なお, 経済学的に意味のある領域に存在する特異点 (均斉成長経路) はただひとつ

$$(u_1^*, v_1^*, \pi_1^*, u_2^*, v_2^*, \pi_2^*) = (0.133356, 0.8, 0, 0.133356, 0.8, 0) \quad (30)$$

であるが, それはカオスアトラクタから分離されている (埋め込まれていない) ことに注意されたい。

⁸周期軌道の検出計算において, 実質誤差, 相対誤差がともに 10^{-5} のオーダーになると必ず収束する傾向があるので, 現実的には上述の収束判定条件からややみ出しても, 本報告で定義した数値的な周期軌道となり得るか否かの判断をつけることは可能である

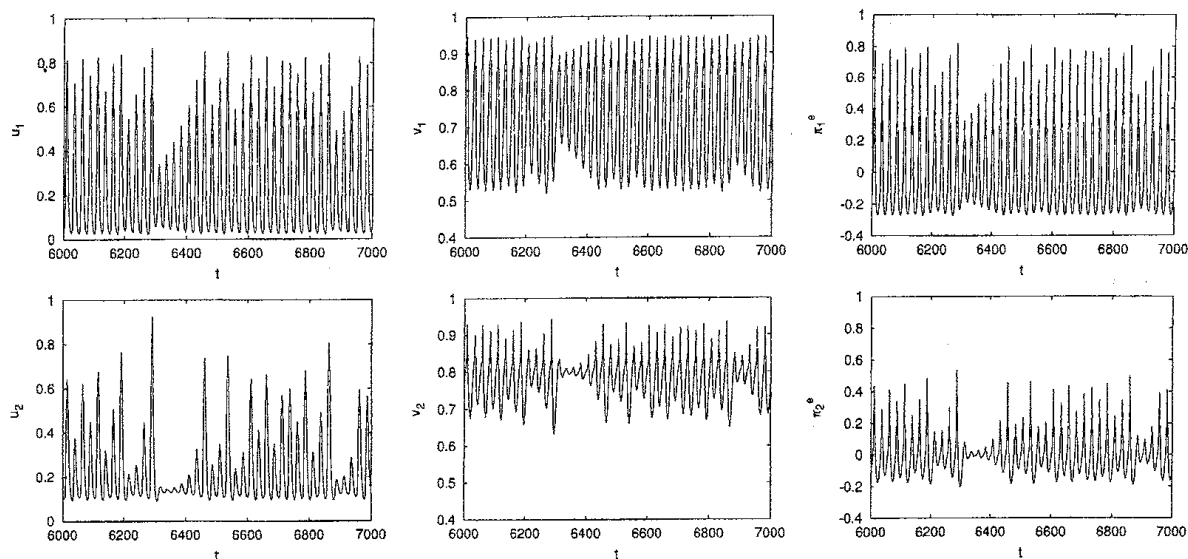


図 2: 各経済変数のカオス的景気変動の例（上：第 1 地域 下：第 2 地域）

4.2 典型的構造 (レジーム) の定義

モデルの景気循環の時間発展は、各変数の相関が極めて高いことが見受けられたが、そこで、1つの変数の時間発展に着目して景気循環がもつ典型的構造を捉える。そこで、まず言葉の定義を行なう。

定義 第 1 地域の労働分配率 u_1 の時間発展を時間正方向に見る中で隣り合った二つの極大値に着目して、それが減少傾向を示す間に存在する極小を示す時間から、次に減少傾向を示す間に存在する極小を示す時間までの極大値が上昇傾向にある区間を一区切りとみなして**レジーム**と呼び、その区間に n 個の極大が存在するときに、そのレジームを **Regime n** と定義する。また 2 つのレジームの連なりを**レジーム遷移**と呼ぶ。

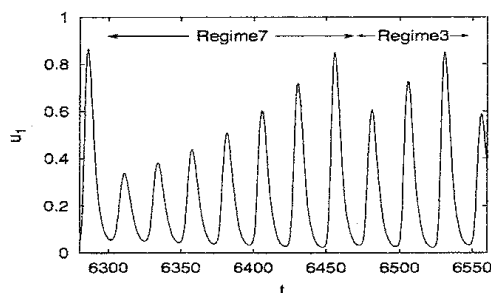


図 3: 第 1 地域の労働分配率の時間発展に基づくレジームの識別例 (Regime 7 と Regime 3 の二つのレジームが存在し、Regime 7 から Regime 3 への遷移が観測される)

さて、モデルのカオス的景気変動は図 3 の様に、上で定義したレジームによって分類可能であるが、表 1 で示される様に、実際のカオス的景気循環においては、Regime 1, ..., Regime 8 が出現し、そのほとんどは Regime 1, ..., Regime 7 が占めることがわかる。

Regime	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probability	0.11	0.34	0.23	0.12	0.08	0.05	0.06	0.01	0.00

表 1: カオス的景気循環における各レジームの出現頻度

4.3 主要レジーム単独で構成される不安定周期軌道

景気循環は言葉のあらわすとおり循環する景気変動であり、安定な周期軌道を生み出す景気循環モデルを考察する際には、循環を代表する周期解は非常に大切な役割を果たしてきたが、力学系モデルがカオス的なものであっても同様であることが期待される。

我々はカオストラクタに埋め込まれている多数の周期軌道を数値的に検出したが、その中に第1地域の労働分配率がただひとつのレジーム Regime 1, ..., Regime 7 で構成されている不安定周期軌道、それぞれ UPO1, UPO2, UPO3, UPO4, UPO5, UPO6, UPO7 (図5において第1変数の時間発展で示されている) が存在する。これらは、カオスの時間発展で主に現れるレジームの種類(表1)と合致しており、検出されたこれらの単純な構造をもつ短い周期軌道によってレジームという典型的構造の存在を捉え得ることを示している。なお、カオス的景気変動において存在する Regime 8 のみで第1地域の労働分配率が構成される周期軌道は検出できなかった。これに関しては後に考察する。

また、不安定周期軌道 UPO1, UPO2, UPO3, UPO4, UPO5, UPO6, UPO7 の各変数の平均、分散は、カオス軌道の平均、分散にそれぞれ類似している(表2)が、このことは、これらの周期軌道が本質的に異なるダイナミクスではないことを示唆させるものである。

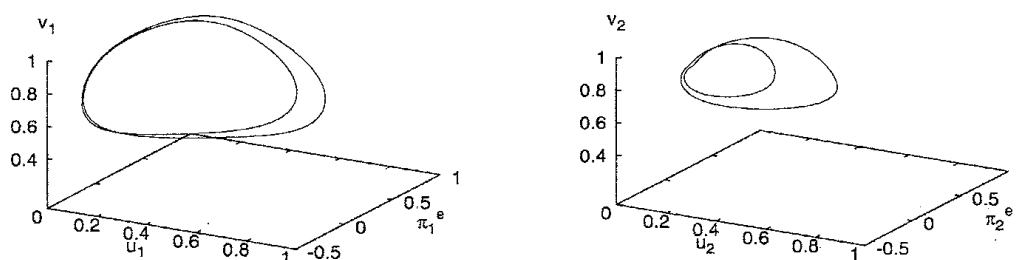


図4: 不安定周期軌道 UPO2 の各地域への射影図 (左: 第1地域 右: 第2地域)

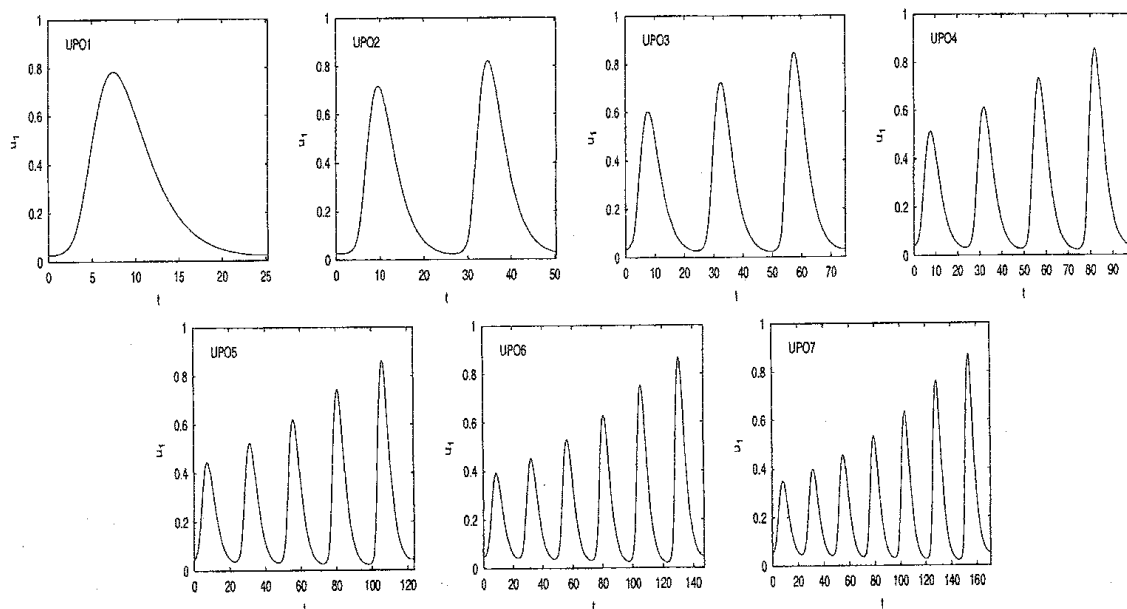


図5: 不安定周期軌道 UPO n ($n = 1, \dots, 7$) の第1地域労働分配率 (u_1) の時間発展 (UPO n の第1地域労働分配率は、Regime n のみによって構成されている)

	$\bar{u}_1$	$\bar{v}_1$	$\bar{\pi}_1^c$	$\bar{u}_2$	$\bar{v}_2$	$\bar{\pi}_2^c$
UPO1	0.265	0.694	0.000	0.264	0.772	0.000
$T = 25.2211$	(0.067)	(0.020)	(0.099)	(0.026)	(0.005)	(0.027)
UPO2	0.262	0.697	0.000	0.253	0.775	0.000
$T = 50.3443$	(0.065)	(0.020)	(0.097)	(0.026)	(0.004)	(0.024)
UPO3	0.254	0.704	0.000	0.229	0.781	0.000
$T = 75.0586$	(0.059)	(0.019)	(0.090)	(0.026)	(0.004)	(0.018)
UPO4	0.244	0.711	0.000	0.213	0.785	0.000
$T = 99.4127$	(0.053)	(0.018)	(0.083)	(0.025)	(0.003)	(0.014)
UPO5	0.236	0.718	0.000	0.202	0.787	0.000
$T = 123.4528$	(0.048)	(0.016)	(0.076)	(0.024)	(0.003)	(0.012)
UPO6	0.228	0.724	0.000	0.194	0.788	0.000
$T = 147.2005$	(0.044)	(0.015)	(0.071)	(0.023)	(0.002)	(0.011)
UPO7	0.221	0.729	0.000	0.189	0.789	0.000
$T = 170.7045$	(0.041)	(0.015)	(0.066)	(0.022)	(0.002)	(0.010)
Chaos	0.246	0.710	0.000	0.224	0.782	0.000
	(0.055)	(0.018)	(0.085)	(0.025)	(0.003)	(0.017)

表 2: 不安定周期軌道 UPO n ($n = 1, \dots, 7$) とカオス軌道の平均値と分散値の比較 (括弧内は分散値)

4.4 様々な不安定周期軌道とレジーム遷移

我々は, 第 1 地域労働分配率がただ一つのレジームによって構成されている周期軌道の他に, 複数のレジームによって構成されている数多くの周期軌道を数値的に検出した. その例は, 図 6 の様なものであり, カオスの景気変動でわずかに出現した Regime 8 をもつ周期軌道は, 複数のレジームで構成される周期軌道の中に存在していることがわかる (図 6 (右)). なお, n 個のレジームで構成されている周期軌道は n 個のレジーム遷移を持っていることに注意されたい.

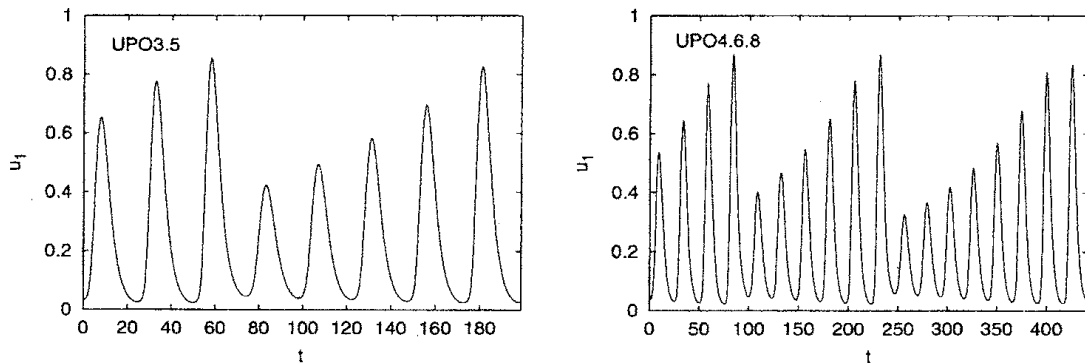


図 6: 第 1 地域の労働分配率が複数レジームで構成される不安定周期軌道の例 (UPO 3.5 (Regime 3 → Regime 5, Regime 5 → Regime 3 のレジーム遷移をもつ) (左), UPO 4.6.8 (Regime 4 → Regime 6, Regime 6 → Regime 8, Regime 8 → Regime 4 のレジーム遷移をもつ) (右))

カオスの景気変動において, 8 種類のレジームが出現することを示した (表 1) が, 表 3 ではレジーム遷移の存在の有無をあらわしている. これによれば, 各レジームからは任意のレジームに遷移するわけではなく, 特別なレジームにのみ遷移し得ることがわかる. また, この表 3 によると, カオスの景気変動で観測された各レジーム遷移をもつ周期軌道が, 数値的に検出された周期軌道の中に存在する (但し, Regime 7 から Regime 2 への遷移を除く) ことがわかる. さらに, カオスの景気変動で観測されていないレジーム遷移をもつ周期軌道は検出された不安定周期軌道の中には存在していない. なお, Regime 8 のみで第 1 地域労働分配率が構成される周期軌道は検出されなかったことを指摘したが, それは Regime 8 から Regime 8 への遷移がカオスの景気変動において存在しないことと対応している. この様に, 長い周期をもつ周期軌道を考慮しなくても, 数値的に検出し得る周期の短い不安定周期軌道によってカオスの景気変動の詳細な性質を十

分捉えられることがわかる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1) 3465	(2) 19706	(3) 3343	0	0	0	0	0	0
2	(2) 12570	(1) 51752	(3) 22321	0	0	0	0	0	0
3	(3) 2992	(3) 5155	(1) 19794	(2) 19786	(2) 9202	(3) 4035	0	0	0
4	(3) 2604	(4) 4241	(2) 4499	(1) 3777	(2) 3367	(2) 3790	(2) 7453	0	0
5	(3) 2488	(3) 2941	(2) 2745	(2) 2381	(1) 2164	(2) 2210	(2) 3639	(3) 848	0
6	(4) 972	(4) 1343	(3) 1805	(2) 2151	(2) 2744	(1) 2252	(2) 2008	(3) 631	0
7	(4) 1431	1510	(3) 4115	(2) 2133	(2) 1565	(2) 1613	(1) 2343	(3) 761	0
8	0	0	(4) 571	(3) 1316	(3) 357	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 3: 適当な時間のカオス的景気循環において観測されたレジーム遷移回数（括弧なしの数字）と検出された不安定周期軌道がもつレジーム遷移の有無（括弧付きの数字の有無）（左端の列の数字が遷移前のレジームをあらわし、一番上の行の数字が遷移後のレジームをあらわす。例えば Regime5 から Regime8 への遷移は 848 回観測されており、(3) は、少なくとも 3 つのレジームで構成される周期軌道の中に Regime5 から Regime8 への遷移をもつものが確認されていることを意味する。）

5 不安定周期軌道の個数の周期に伴う増大度

カオス軌道は「周期無限大の不安定周期軌道」と捉えることもできるため、周期に伴う周期軌道の個数の増大度は、カオス軌道の多様性を測る指標となる。我々は、3.1 節の数値計算の誤差の見積もりによって原理的に網羅検出可能であると考えられる周期（ ≤ 375 ）をもつ 5000 個以上の周期軌道を検出し、重複を除去することによってほぼ網羅した。そして、本モデルの周期軌道は、軌道に含まれる振動（循環）の回数によって区分できる（図 7（左））ことに着目して、1 回の振動を 1 回の写像とみなして振動回数 N_T に基づいて周期軌道の個数を数えあげた（図 7（右））。図 8（左）を見ると、周期軌道の個数は N_T に対して指数的に増大（増大指数はおおよそ 1.385）していくことが観察され、さらに、図 8（右）により、 N_T に対する周期軌道の個数の増大指数が極めて速い収束傾向を示す様子がわかる。すなわち、

$$\#\{N_T \text{ 回写像の周期軌道} \} \rightarrow 1.385^{N_T} \quad (N_T \rightarrow \infty)$$

であるばかりでなく、任意の N_T に対して

$$\#\{N_T \text{ 回写像の周期軌道} \} \approx 1.385^{N_T}$$

であることがわかる。これは、カオスダイナミクスのもつ複雑さが、極めて短い周期軌道の網羅によって捉え得ることを示唆している。増大指数は、 N_T が 8 以下（周期軌道の個数が 37）の段階ですでに 1.3 以上 1.45 未満、 N_T が 10 以下（周期軌道の個数が 67）の段階で 1.35 以上 1.4 未満であると十分見積もることができる（表 4）。

ところで、Bowen(1970) 他によって、適当なクラスの力学系⁹において、系の位相エントロピー λ は、

$$\lambda = \lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{\log (\#\{N_T \text{ 回写像の周期軌道} \})}{N_T}$$

であることが証明されている。本モデルから構成した写像が、それらの仮定を満たしているとする、写像の位相エントロピーは、 $\log 1.385$ であることになる。

これは、本モデルが極めて複雑さの低い系であり、また 6 変数間の相関も極めて高いことをあらわしており、景気変動をただ一つの変数の変動（例えば、第 1 地域の労働分配率の変動）のみによって捉えても、このモデルの景気変動の多くの部分を捉えられるということを実証する結果になっている。

⁹仮定には双曲力学系もしくは一部の非双曲力学系という条件が組み込まれているが、具体的な力学系に対して、例えば双曲力学系であることを証明することは、ほとんど不可能である。ごく最近、極めて単純な力学系に対して精度保証つき数値計算によってそれを証明する研究がはじまったばかりである。ただし、本モデルは定義域を経済学的に意味のある領域に制限したときには、しばしば系の双曲性を崩す要素となる条件を持ち合わせていないため、双曲力学系である可能性は高いと考えられる。

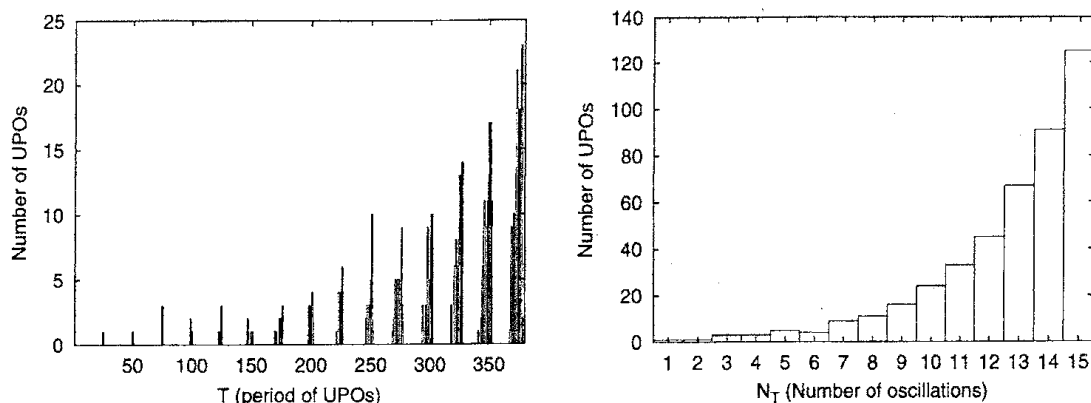


図 7: 周期軌道の周期 (1 刻み) に対する個数 (周期軌道の周期は 25 の倍数の前後に局在) (左) 周期軌道の振動回数 ($N_T \approx T/25$) に対する個数 (右)

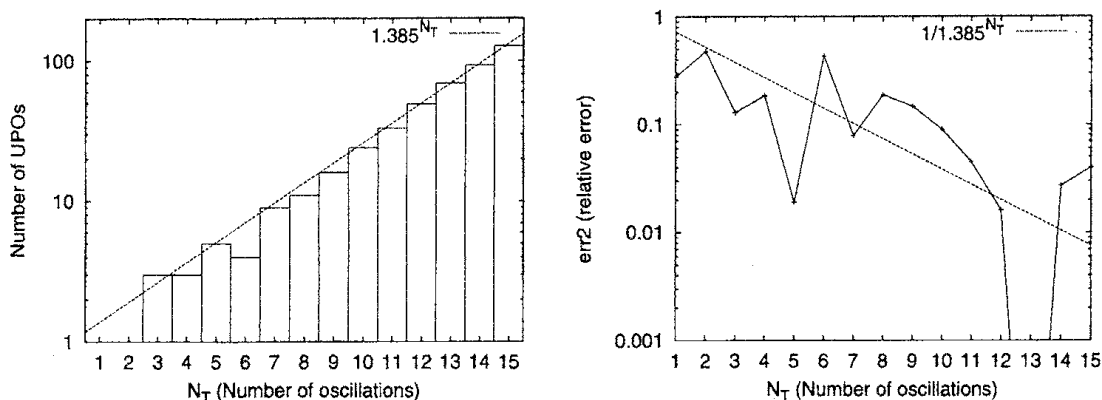


図 8: 周期軌道の振動回数 ($N_T \approx T/25$) に対する個数と $y = 1.385^{N_T}$ (左) 周期軌道増大度の見積もり値 (1.385^{N_T}) との相対誤差と漸近線 ($1/1.385^{N_T}$) の比較 (右) ($err2$ は表 4 の説明を参照)

N_T	個数	1.385^{N_T}	$err1$	$err2$	1.30^{N_T}	1.35^{N_T}	1.40^{N_T}	1.45^{N_T}
1	1	1.385	0.385	0.278	1.300	1.350	1.400	1.450
2	1	1.918	0.918	0.479	1.690	1.823	1.960	2.103
3	3	2.657	0.343	0.129	2.197	2.460	2.744	3.049
4	3	3.680	0.680	0.185	2.856	3.322	3.842	4.421
5	5	5.096	0.096	0.019	3.713	4.484	5.378	6.410
6	4	7.058	3.058	0.433	4.827	6.053	7.530	9.294
7	9	9.776	0.776	0.079	6.275	8.172	10.541	13.476
8	11	13.539	2.539	0.188	8.157	11.032	14.758	19.541
9	16	18.752	2.752	0.147	10.604	14.894	20.661	28.334
10	24	25.972	1.972	0.090	13.784	20.107	28.925	41.085
11	33	35.971	2.971	0.045	17.922	27.144	40.496	59.573
12	49	49.819	0.819	0.016	23.298	36.644	56.694	86.381
13	69	69.000	0.000	0.000	30.287	49.470	79.371	125.252
14	93	95.565	2.565	0.027	39.374	66.784	111.120	181.615
15	127	132.357	5.357	0.040	51.186	90.158	155.568	263.342

表 4: 数値的に検出された振動回数 $N_T (\approx T/25)$ をもつ周期軌道の個数と見積もり値 (1.385^{N_T}) の比較 (見積もり値との絶対誤差 $err1 = |(\text{検出された個数}) - 1.385^{N_T}|$, 見積もり値との相対誤差 $err2 = err1/1.385^{N_T}$)

6 不安定周期軌道とカオスの統計量

カオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道の平均、分散といった統計量は、カオスのそれに類似しているが、近似という観点にたつと、数値的に検出されたどの様な周期軌道がどの程度精度良く近似するのか応用の立場において興味深い。まず、数値的に検出された周期軌道のうち、周期の短いものから 500 個に関して、周期の順に並べていくつかの集団に分類した。そして、その集団に属する各周期軌道の平均値の集団内平均値を計算して、それらとカオス軌道の平均値との比較、また、集団における周期軌道の平均値のカオス軌道の平均値からの偏差を計算した。図 9 は周期の短いものから 25 個ずつ 20 の集団にわけた場合、図 10 は周期の短いものから 50 個ずつ 10 の集団にわけた場合の計算結果である。集団内平均値に関しては、どちらの場合も周期の長いもので構成される集団と短いもので構成される集団は、カオス軌道の平均値との比較において有為な差はなく、カオス軌道の平均値からの集団内の各周期軌道の平均量の偏差は長い周期をもつ集団の方が小さい可能性がやや高い程度の差であることがわかる。

一般にカオスの統計性質を数値計算で求めることは、そのカオス軌道の極めて近傍の周期軌道の統計性質を計算していることと事実上等価である。そう考えると長い周期をもつ周期軌道を用いた場合、その統計量がカオスのそれを近似する度合は高くなることは自然である。しかし、数値的に検出可能な周期軌道の周期の差異は、平均、分散などの統計量の近似という観点に立つと有為な差を生み出さないことを示唆している。少なくとも本モデルに関しては、カオスの統計量の近似の目的で数値的に検出された一つの周期軌道を取り出すときに長い周期をもつ周期軌道を取り出す利点はないと結論づけられる。

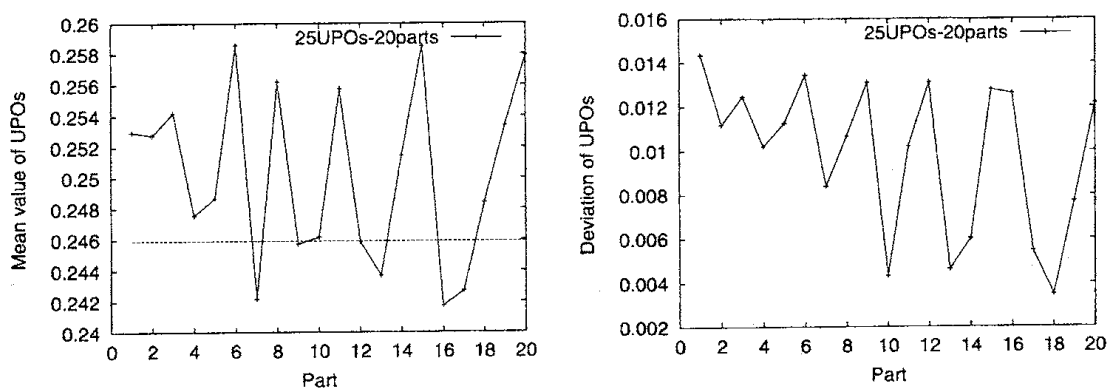


図 9: 500 個の周期軌道を短い周期から 25 個ずつ 20 個の集団に分けた場合の各周期軌道の第 1 変数平均値の各集団内での平均値 (点線はカオスの平均値) (左) カオスの平均値からの偏差 (右)

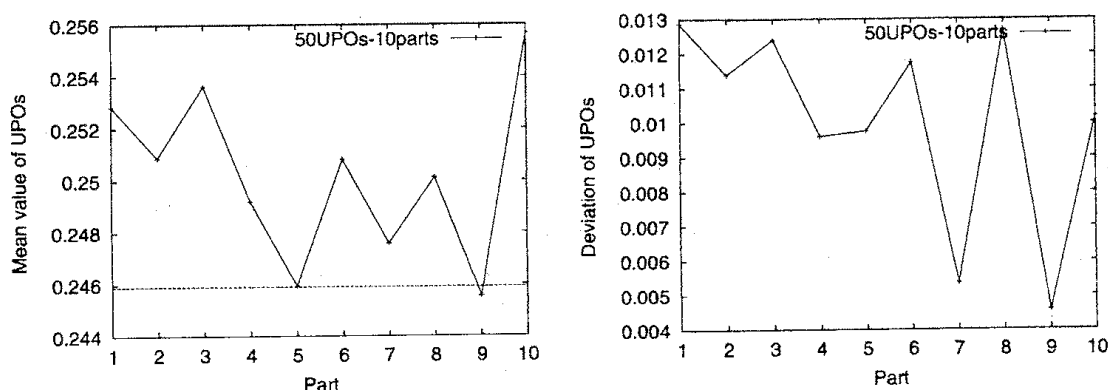


図 10: 500 個の周期軌道を短い周期から 50 個ずつ 10 個の集団に分けた場合の各周期軌道の第 1 変数平均値の各集団内での平均値 (点線はカオスの平均値) (左) カオスの平均値からの偏差 (右)

7 不安定周期軌道の分岐

本節では1つのレジームによって構成される第4節で取りあげた7つの周期軌道 (UPO1, UPO2, UPO3, UPO4, UPO5, UPO6, UPO7) に対して, 2地域間の投資の相互作用の強さを決めるパラメタ η を現状の3.5から0まで減らしていく状況において分岐追跡 (図11) を行なった。

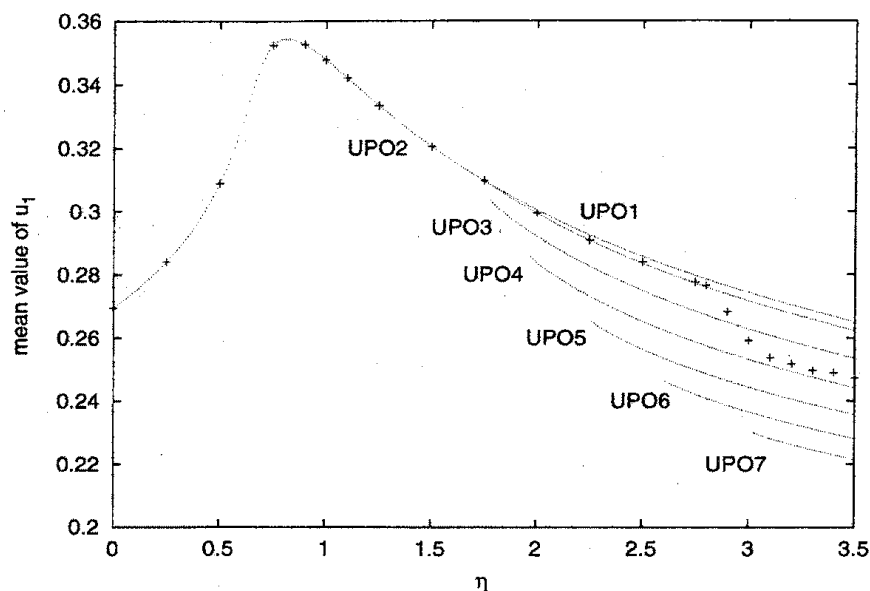


図 11: 周期軌道 UPO n ($n = 1, \dots, 7$) の η に対する分岐 (+ はカオス軌道の平均値をあらわす)

第4節において, カオスの景気循環において観測される主要レジームと, 数値的に検出された単独レジームで構成される周期軌道の存在が対応づけられることを指摘したが, 系がカオスの景気循環を示す $\eta = 2.6$ における時間発展において観測される主要レジームは Regime 1, Regime 2 であるにも関わらず, 分岐追跡によると UPO1, UPO2, UPO3, UPO4, UPO5 の5種類の単独レジームで構成される周期軌道の存在が確かめられた。これは, 第4節の議論と一見矛盾しているが, UPO3, UPO4, UPO5 はカオスアトラクタに埋め込まれていないことが確認された (図12 (左))。なお, $\eta = 3.5$ においては, UPO1, UPO2, UPO3, UPO4, UPO5, UPO6, UPO7 の7つの周期軌道はすべてカオスアトラクタに埋め込まれていることが確認されている (図12 (右))。これらの結果は, 当然のことではあるが, カオスアトラクタの特性がカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道によってのみ捉え得ることを裏付けている。また, この分岐追跡に基づく結果は, 追跡途中でカオスアトラクタから外れた周期軌道もそのまま追跡し得るということを実証しており, ある状況でカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道を検出して真に検出したいパラメタまで追跡していくという検出方法によって得られた周期軌道は, アトラクタに埋め込まれていないことが大いにあり得るという意味で注意を要することを示唆している。

なお, η を減らしていく分岐追跡を通じて, これら7個の周期軌道のうち UPO2 の枝のみが, 系が安定化していく過程においても常にアトラクタに埋め込まれ続けており, しかも軌道の形状を大きく変えずにいることが確認された。第5節において周期軌道の個数の増大度に基づいてカオスの複雑さが極めて小さいことを明らかにしたが, その事実と併せて, 本モデルにおける景気循環の基本的メカニズムに関しては, 系の安定性とは異なり, 2地域間の投資の相互作用の大小に依らず一貫して UPO2 の枝のみによって捉え続けることができ, 本質的な構造変化をおこさないと解釈することができよう。

Regime	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probability	0.14	0.86	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表 5: カオスの景気循環における各レジームの出現頻度 ($\eta = 2.6$)

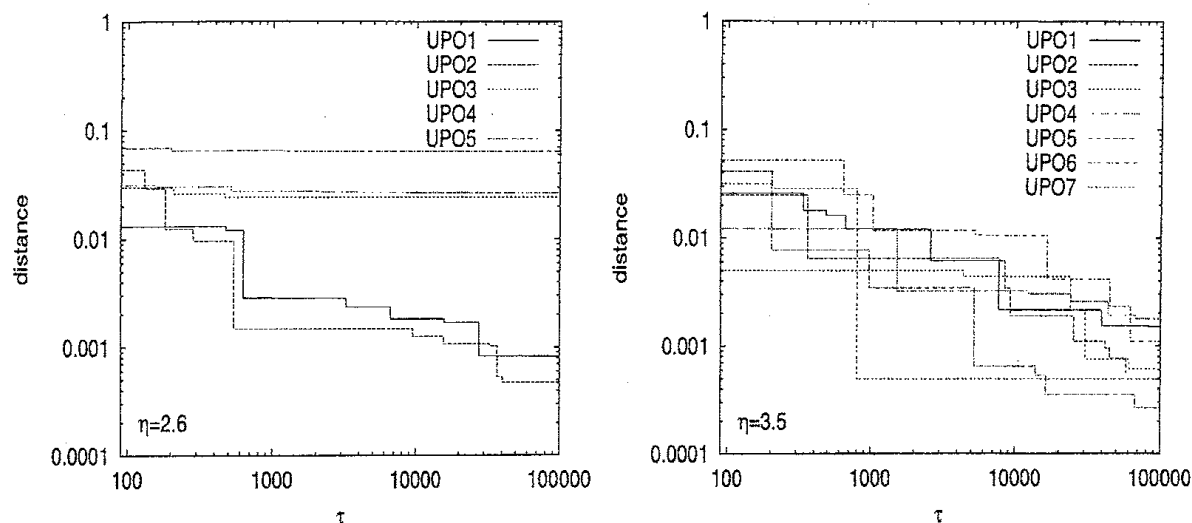


図 12: 周期軌道 UPO_n がカオスアトラクタに埋め込まれているか否かを考察する図（周期軌道の 1 点と適当な初期値から時間 τ だけ発展させたカオス軌道の最近接距離をプロットしており、埋め込まれていない場合にはある正定数に収束していく様子が観察される）（左: $\eta = 2.6$, 右: $\eta = 3.5$ ）

8 まとめと議論

8.1 まとめ

本報告では、ひとつの低次元連続カオス力学系の周期の短い不安定周期軌道を数値的に網羅して、それらによって得られる様々な結果を考察することにより、応用科学におけるカオス力学系の不安定周期軌道解析に対する知見を深めた。

まず、我々は 2 地域景気循環モデルの生み出すカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道を、数値的に網羅可能な周期をもつものに関してほぼ網羅した。そして、一般的な解のふるまいにおける様々な特徴が数値的に検出する周期軌道によって十分に捉えられることを確認した。また、系がもつ位相的な性質であるダイナミクスの複雑さ (e.g. 位相エントロピー) をあらかず、周期軌道の周期に対する増大度は、詳細に見積もり可能であり、しかもそれは、極めて収束が速いことが確認された。これは、短い周期をもつ周期軌道においても位相的な骨格形成が十分なされていることの証である。また、単独の周期軌道によってカオスを近似するという目的において周期軌道を選ぶとき、長い周期をもつ周期軌道の方が理論上適しているが、数値的に検出可能な周期軌道に限れば、短い周期軌道で十分であるという結論を得た。本報告では 2 地域間の投資相互作用をもつ景気循環モデルを考察したが、投資の相互作用を弱めて系の安定性に変化が生じて、ある周期軌道はほぼ形を変えずに常にアトラクタ (安定な不変集合) に埋め込まれ続けていた。この事実、および系の複雑さが極めて低いことに着目して、このパラメタ領域を通じて景気循環の本質的構造は一貫してその周期軌道によって十分捉え続けることができる、すなわち系の安定性とは裏腹に景気循環の基本的メカニズムは 2 地域間の投資の相互作用の強弱によって変化していないという結論を与えた。このような議論は、注目する経済のダイナミクスにおいて本質的な役割を果たす経済変数を絞っていく際に有効となると考えられる。

8.2 議論

本報告は、ある特定のカオス的景気循環モデルを対象にして、不安定周期軌道に着目した解析を行なったものであり、任意のカオス系で同種の議論が成立する保証は全くないが、この種の議論の適用範囲は広いと予想される。本報告で議論されたモデルは、経済学的に意味がある領域に定義域を限定した場合には特異点とカオスアトラクタは分離しており、また方程式に内在する対称性はない。すなわち、双曲性の崩れにしばしば伴う要因は持ち合わせておらず、双曲力学系に属する可能性は高いと思われる。なお、経済モデルは物

理系とは異なり、方程式に内在する対称性をもたないことが多いため、ダイナミクスにおいて様々な典型的な構造があらわれやすく、しかもそれが重要となるが、この点が不安定周期軌道解析との相性を高める要素となる。

ところで、第5節において、不安定周期軌道はカオスアトラクタの位相的な性質を捉える目的に非常に適しているという示唆を与えたが、非位相的な統計性質を捉える目的においても、カオスアトラクタに埋め込まれた周期軌道はカオスの近似としての役割を果たすことは間違いなく、不安定周期軌道の数値計算が数値的に妥当であることと併せると、不安定周期軌道解析はカオス解析における数学的厳密化の手段としても非常に有望であると考えられる。

参考文献

- Bowen, R., *On axiom A diffeomorphisms*, Regional conference series in mathematics **24** (Amererican Mathathematical Society, The United States of America, 1978) .
- Cvitanović, P., R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, *Chaos classical and quantum*, ver. 11 (<http://ChaosBook.dk/> , 2004) .
- Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, (Westview Press, The United States of America, 1986).
- Goodwin, R. M., A growth cycle, in: C. H. Feinstein, ed., *Socialism, capitalism, and economic growth* (The United States of America, 1967).
- Harvie, D., Testing Goodwin : Growth Cycles in Ten OECD countries, *Cambridge Journal of Economics*, **24**(3) (2000) 349–376.
- Ishiyama, K. and Y. Saiki, Unstable periodic orbits and chaotic economic growth, *Chaos, Solitons and Fractals* **26** (2005) 33–42.
- Kaldor, N., A Model of the Trade Cycle, *Economic Journal* **50** (1940) 78–92.
- Kato, S. and M. Yamada, Unstable periodic solutions embedded in a shell model turbulence, *Physical Review E* **68** (2003) (2) 25302–25305.
- Kawahara, G. and S. Kida, Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *Journal of Fluid Mechanics* **449** (2001) 291–300.
- Mees, A. I., *Dynamics of Feedback Systems* (John Wiley and Sons, New York, N. Y. ,1981) .
- Ott, E., C. Grebogi and J. A. Yorke, Controllong Chaos, *Physical Review Letters* **64** (1990) 1196–1200.
- Phillips, A. W., The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957, *Economica* **25** (1958) 283–299.
- Pohjola, M. J., Stable and Chaotic Growth: the Dynamics of a Discrete Version of Goodwin's Growth Cycle Model, *Journal of Economics / Zeitschrift für Nationalökonomie* **41** (1981) 27–38.
- Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A* **170** (1992) 421–428.
- Smale, S., Differential dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society* **73** (1967) 747–817.
- Skott, P., Effective demand, class struggle and cyclical growth, *International Economic Review* **30** (1) (1989) 231–247.
- Sportelli, M. C., A Kolmogoroff generalized predator-prey model of Goodwin's growth cycle, *Journal of Economics / Zeitschrift für Nationalökonomie* **61** (1995) 35–64.
- Wolfstetter, E., Fiscal policy and the classical growth cycle, *Journal of Economics / Zeitschrift für Nationalökonomie* **42** (1982) 375–393.