

氏 名 中 岡 明
なか おか あきら

学位の種類 理 学 博 士

学位記番号 論 理 博 第 558 号

学位授与の日付 昭 和 52 年 1 月 24 日

学位授与の要件 学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当

学位論文題目

On uniqueness of analytic solution for first order partial differential equations with degenerate principal symbols

(退化した主表象をもつ一階偏微分方程式の解析解の一意性について)

論文調査委員 (主 査) 教 授 溝 畑 茂 教 授 山 口 昌 哉 教 授 楠 幸 男

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の主論文は第1部と第2部からなっている。主論文の第1部は

$$(1) \quad a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y)u$$

をみたす解析的解 $u(x, y)$ の一意性に関するものである。 a, b, c の原点での vanishing order——以後簡単に order とよぶ——についてつぎの仮定を設ける： c の order を $m(\geq 1)$ とすれば、 a, b のそれは共に $m+1$ 以上である。

$u(x, y)$ の原点における逐次導関数を導く関係式をつぎの形におく。

$$S_N \vec{U}_N = F(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{N-1}) (N=1, 2, \dots)$$

ただし、 $\vec{U}_N = {}^t(\partial_x^N u, \partial_x^{N-1} \partial_y u, \dots, \partial_y^N u) | (x, y) = (0, 0)$

であり、 S_N は $(N+1)$ 次の正方行列である。

申請者の研究は、 S_N の構造の解明に向けられている。 a, b, c のそれぞれ斉次 $m+1, m+1, m$ 次の部分を A, B, C とし、 S_N を A, B, C の係数で表現することによって、次の2つの場合に分類した。

$$1) \quad xB(x, y) - yA(x, y) = 0$$

$$C(x, y) = 1$$

が根をもつ場合。(三角化可能の場合とよんでいる),

$$2) \quad xB(x, y) - yA(x, y) = 0 \quad \text{から} \quad C(x, y) = 0$$

がしたがう場合。(三角化不可能の場合とよんでいる),

得られた結果は次の通りである。

i) 三角化可能でない場合はつねに解の一意性になりつつ。

ii) 三角化可能の場合は、解の一意性になりつつ場合もあり、そうでない場合もある。一意性になりつつためには、 a, b, c のさらに原点での高階偏導関数の間の関数式になりつつことが必要である。また一つの十分条件も示されている。

主論文第2部では、第1部の結果が多変数の場合に拡張されている。

$$(2) \sum_{j=0}^{n+1} a_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_j} u = \omega(x_1, \dots, x_{n+1}) u$$

に対してつぎの仮定をおく： ω の原点での order を $m(\geq 1)$ とすると、 a_j のそれはすべて $m+1$ 以上である。 a_j, ω の $m+1$ 次、 m 次の斉次部分を A_j, Ω とし、(2)の代りに方程式

$$(3) \sum_{j=0}^{n+1} A_j(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_j} u = \Omega(x_1, \dots, x_{n+1}) u$$

を考える。まず(3)が解の一意性をもてば、(2)もそうであることが証明されている。目的を解の一意性になりたつための十分条件をみつけないことにし、(3)の解の一意性について研究を行っている。第1部の結果より、

$$V = \{x \in CP^n; x_i A_j(x) - x_j A_i(x) = 0, i, j = 1, \dots, n+1\},$$

$$W = \{x \in CP^n; \Omega(x) = 0\}$$

とおき、三角化可能でないとは、 $V \subset W$ によって定義する。

まず三角化可能である場合には、(3)が一意性をもつための必要十分条件が求められている。この場合、本質的には古典的な場合であるところの、 $\Omega = 1$ の場合に帰着される。

ついで三角化可能でない場合には、第1部でとり扱った2変数の場合と異り、無条件では解の一意性になりたないことが例によって示されている。申請者はさらにこの場合を深く追求している。 V の既約多様体への分解を $V = \bigcup_i V_i$ とする。 V_i を1つ固定して考える。作用素

$$\sum A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を V_i に tangential な部分と、transversal な部分の和として表現し、(3)の解が V_i 上で0あることを注意し、上の作用素はパラメーターを含む所の、transversal な方向にのみ作用する作用素に帰着される。結果的にはこの場合は $\Omega = 1$ と同様な取り扱いが可能であることが示されている。

論文審査の結果の要旨

特性面上にデータをおく初期値問題は Hadamard, Goursat 等によって簡単な場合に考察されたのに始まるが、一般に解析的係数をもつ単独高階方程式に対する考察は長谷川氏等により最近組織的に研究がなされつつある。ところで方程式が system になると、仮定には種々のものが考えられる。申請者は特性面の定義からはむしろ逆の結論であるところの、解析的解に限ると解の一意性になりたつ場合に注目し研究を行った。すなわち参考論文1において、

$$\begin{bmatrix} E_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} B_j & K_j \\ L_j & \phi_j \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \begin{bmatrix} C & P \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u$$

の形の system の解 u の一意性を考察した。まず $\phi_j(0, 0) = 0 (1 \leq j \leq n)$ が必要条件であることを示し、ついで十分条件としてつぎのものを得ている。

行列 $(\partial \phi_j(0, 0) / \partial x_i)_{1 \leq i, j \leq n}$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ としたとき、任意の整数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0$ に対して

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \neq 1.$$

主論文第1部では、古典的と考えられるこの結果を一般の1階方程式

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x)u$$

の場合に拡張することを考えた。ただし $n=2$, $c(0,0)=0$ の場合である。この論文の重要な点は、複雑な計算を通じて見通しを立て、三角化可能、不可能という重要な概念を非常に簡単な条件のもとに定義したところにある。このことによって、解の一意性の成立の判定条件が簡単な形で求まることを示した。

主論文第2部では、 n を一般として、三角化可能、不可能という条件を幾何学的にとらえることによって、作用素を分解することに成功し、多変数の場合の複雑性が何に起因しているかを明らかにしている。このことは開発された手法と共に今後この方面の研究に大きな寄与をするものと思われる。また興味のある具体例を種々挙げることによって、仮定をおくことの妥当性ならびに、一意性の条件を具体的な形でさらに完全な形で解決することの困難さを示唆している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。