

高速フーリエ変換を用いた全球浅水波モデルにおける極問題

野村鈴音

(京都大学大学院理学研究科)

榎本剛 (京都大学防災研究所／海洋研究開発機構 APL)

1 はじめに

スペクトル法を用いた全球数値モデルの力学コアには、一般的に球面上で完全に直交する球面調和関数が用いられている。南北方向にも行列積で計算されるルジャンドル変換に代えて高速フーリエ変換 (fast Fourier transform, FFT; Cooley and Tukey 1965) にも適用すれば、計算量を大幅に削減することが可能である。

極座標において緯度方向が周期境界でなく不連続であることにより、基底を三角関数としているフーリエ変換を適用するには、工夫が必要となる。また、経度方向に微分を行なうと緯度に依存した係数が掛かかることになり、微分量を得る際に基底の形を維持できないという問題もある。Orszag (1974) や Yee (1981), Cheong (2000a) は東西波数から南北方向の偶奇性を考慮して基底を工夫する手法を提案した。また、これらの手法を改良し浅水波方程式に適用した研究もある (Yoshimura 2022)。これは、極点にも格子点が配置することが可能である。

他のアプローチには、1次元フーリエ変換を用いた手法がある (Spotz et al. 1998, 以降 STS98)。STS98 では、微分を行う方向のみにフーリエ変換をして、微分量を求めることとした。また、経度方向の微分に掛かる係数は物理空間で掛け合わせることとした。これにより、実装が容易となる。しかし、経度方向の微分に掛かる係数は極点で無限大に発散する。そのために、極点に格子点を配置することができず、極点を避けて半格子ずれた格子を用いている。

本研究では、極問題を解消することで、STS98 の手法を極あり等緯度経度格子に適用した。

2 支配方程式

支配方程式は、下に示す渦度・発散を用いて時間変化傾向を計算する浅水波方程式系 (Swarztaruber 1996) を用いた。一般的な浅水波方程式系において風に関する時間発展方程式には、風成分の経度微分が現れる。これに対して、この定式化は緯度微分のみで記述される。極点で発散するような係数が掛からないため、極や赤道のある等緯度経度格子に適している。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -u\delta - \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + fv - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u\zeta - \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - fu - \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\phi\delta - \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、予報変数は緯度 φ 、経度 λ のみに依存するジオポテンシャル高度 ϕ 、東西風 u 、南北風 v である。 t は時刻、 a は地球半径、 f はコリオリパラメタである。渦度 ζ 、発散 δ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{\cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\cos \varphi u)}{\partial \varphi} \right] \\ \delta &= \frac{1}{\cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\cos \varphi v)}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}\quad (2)$$

式 (1), (2) を見ると、極点では $\cos \varphi = 0$ となり、ジオポテンシャル高度の経度微分や渦度・発散が定義できなくなってしまうことがわかる。この問題を本研究では極問題と呼ぶ。この定式のままでは極点に格子点を配置することはできない。経度方向の微分に極問題が生じていることに対して、緯度微分には極で発散するような係数が掛からないため、極問題は生じない。したがって、極問題の生じている物理量は、緯度

微分を用いることで、定義可能となる。

3 極問題の解消

3.1 スカラー関数の経度微分

スカラー関数 $f(\theta, \lambda)$ (θ は余緯度) の経度微分は勾配の成分であるため、ベクトル量である勾配の極問題を解消する方法を検討する。スカラー関数の勾配は、次のように表される。

$$\nabla f(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (3)$$

極点が特異点とならない絶対デカルト座標 (X, Y, Z) を導入する。球座標 (U, V, W) は変換行列 $\mathbf{Q}$ を用いて絶対デカルト座標から変換される (Swarztrauber 1981)。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、変換行列は次のように表現される正方行列である。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \lambda & \cos \theta \sin \lambda & -\sin \theta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

まず、北極点におけるスカラーの経度微分を定義するために、北極点 ($\theta = 0$) での変換行列 $\mathbf{Q}_{\theta=0}$ を得ると、3次から2次の正方行列にできる。

$$\mathbf{Q}_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (6)$$

したがって、式 (3) と (6) より、北極点における勾配は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \nabla f(\lambda, \mu)|_{\theta=0} &= \mathbf{Q}_{\theta=0} \nabla_x f|_{\theta=0} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} f \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\sin \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

ここで、 ∇_x は絶対デカルト座標における勾配を表す。式 (7) の結果は勾配の経度成分が緯度成分の回転で表現可能であることを意味している。よって、勾配の経度成分は緯度成分を用いて、

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \lambda=\lambda+\pi/2} \quad (8)$$

と表現できる。極問題が解消できる。これは、極点上に1つのベクトルがあったとき、その表現方法はその格子点の数だけあることに着目し、極問題を解消できることを示している。デカルト座標であればただ1つに決まる表現が、極座標では決まらない。そのために、ベクトル量の成分同士が $\pi/2$ ずれた関係になる。同様に、南極点についても考えれば、2つの極点について極問題を解消できる。

3.2 渦度

渦度 ζ は循環 C を微小面積 ΔS で割ったもので定義される。この微小面積 ΔS は、

$$\Delta S = \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \lambda \quad (9)$$

したがって、渦度 ζ は、球面上で次のように表される。

$$\zeta = \frac{\iint_D \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta u)}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right] \sin \theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_D \sin \theta \, d\theta \, d\lambda} \quad (10)$$

ここで、 ΔC は微小面積 ΔS に対する循環を意味する。北極点 ($\theta = 0$) での渦度 $\zeta_{\theta=0}$ は式 (10) の極限から得られる。

$$\zeta_{\theta=0} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\iint_D \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta u)}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right] \sin \theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_D \sin \theta \, d\theta \, d\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta \int_0^{2\pi} u \, d\lambda}{(1 - \cos \theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta) \int_0^{2\pi} u \, d\lambda}{\sin \theta}
\end{aligned} \quad (11)$$

ここで、ロピタルの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}
\zeta_{\theta=0} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi \cos \theta} \left[\sin \theta \int_0^{2\pi} u \, d\lambda \right. \\
&\quad \left. + (1 + \cos \theta) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \, d\lambda \right]
\end{aligned} \quad (12)$$

したがって、渦度は極点で

$$\zeta_{\theta=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \, d\lambda \quad (13)$$

となる。南極点でも同様に考えれば、2つの極で極問題を解消できる。

3.3 発散

発散 δ についても、渦度 ζ と同様に考える。

$$\delta = \frac{\iint_D \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta v)}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] \sin \theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_D \sin \theta \, d\theta \, d\lambda} \quad (14)$$

ここで、 ΔF は微小面積 ΔS に対する流束を意味する。北極点 ($\theta = 0$) での発散 $\delta_{\theta=0}$ は式 (14) の極限から得られる。

$$\begin{aligned}
\delta_{\theta=0} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\iint_D \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta v)}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] \sin \theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_D \sin \theta \, d\theta \, d\lambda} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{(1 - \cos \theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta) \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta) \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{\sin \theta}
\end{aligned} \quad (15)$$

ここで、ロピタルの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}
\delta_{\theta=0} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi \cos \theta} \left[\sin \theta \int_0^{2\pi} v \, d\lambda \right. \\
&\quad \left. + (1 + \cos \theta) \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \, d\lambda \right]
\end{aligned} \quad (16)$$

したがって、渦度は極点で

$$\delta_{\theta=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \, d\lambda \quad (17)$$

となる。南極点でも同様に考えれば、2つの極で極問題を解消できる。

4 Williamson et al. (1992) による標準実験

本手法を用いた浅水波方程式を実装し、コサインベルによる線型移流実験（テストケース 1）によって性能を評価した。また、スペクトル法で広く用いられている球面調和函数変換版と比較した。フーリエ変換には FFTW を用いた。球面調和函数変換には、SPHEREPACK を用いた。SPHEREPACK には、等緯度経度版の有面調和函数変換ルーチン群があり、2つの実験で格子を揃えるためにガウス緯度版ではなく等緯度経度版（Swarztrauber 1979）を用いている。

9.5 日後の結果を図 1 示す。

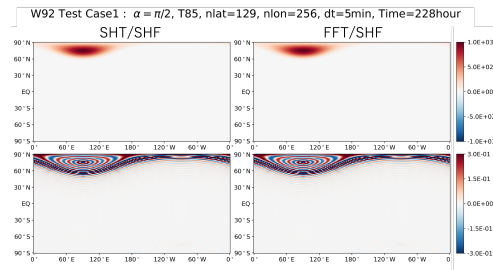


図 1: Williamson et al.(1992) のテストケース 1 の結果。上段は高度，下段は真値からのずれ。時刻は 9.5 日後

5 まとめ

本研究では、極を含む等緯度経度格子上の力学コアにフーリエ変換を適用するために極問題を解消する定式化を導出した。また、極問題の解消により極点を含む等緯度経度格子上で浅水波方程式を実装した。

極点において、絶対デカルト座標を用いることで、極座標におけるベクトル量は極点で回転の関係であることが示された。したがって、極問題を含まない、緯度微分を用いれば極でも値を求めることができる。スカラー量である渦度・発散に対しては、ロピタルの定理を用いることで、経度微分を消去し、緯度微分に書き換えることができた。極以外ではSTS98と同じ方法で微分量を得ることになるが、極に最も近い点は本研究の方がSTS98より2倍離れているため、ノイズを軽減することも示された。

この研究は、球面上で微分量を得るのにフーリエ変換がコスト削減の観点から有用であることを示している。極を含む等緯度経度格子で与えられる再解析データについて、本研究で実装した微分ルーチンは内挿等の前処理なしで入力とでき、微分量の出力を得ることができる。よって、時間発展がない診断方程式を得ことや、全球で微分量を得たいデータ解析にも有用であると考えられる。

参考文献

- Cheong, H.-B., 2000: Double Fourier series on a sphere: Applications to elliptic and vorticity equations. *J. Comput. Phys.*, **157** (1), 327–349.
- Cooley, J. W., and J. W. Tukey, 1965: An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, **19** (90).
- Enomoto, T., 2015: Comparison of computational methods of associated legendre functions. *SOLA*, **11**, 144–149.
- Orszag, S. A., 1974: Fourier series on spheres. *Mon. Wea. Rev.*, **102** (1), 56–75.
- Spotz, W. F., M. A. Taylor, and P. N. Swarztrauber, 1998: Fast shallow-water equation solvers in latitude-longitude coordinates. *J. Comput. Phys.*, **145** (1), 432–444.
- Swarztrauber, P. N., 1979: On the spectral approximation of discrete scalar and vector functions on the sphere. *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (6), 934–949.
- Swarztrauber, P. N., 1981: The approximation of vector functions and their derivatives on the sphere. *SIAM J. Numer. Anal.*, **18** (2).
- Swarztrauber, P. N., 1993: The vector harmonic transform method for solving partial differential equations in spherical geometry. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 3415–3437.
- Swarztrauber, P. N., 1996: Spectral transform methods for solving the shallow-water equations on the sphere. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 720–744.
- Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber, 1992: A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, **102** (1), 211–224.
- Yee, S. Y. K., 1980: Studies on Fourier series on spheres. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, 676–678.
- Yoshimura, H., 2022: Improved double Fourier series on a sphere and its application to a semi-implicit semi-Lagrangian shallow-water model. *Geosci. Model Dev.*, **15** (6), 2561–2597.