

Bornholdt のスピンモデルによる市場ダイナミクス

山野 拓也

東京工業大学物性物理専攻

1 はじめに

現代とは、世界が益々資本主義化（商業社会化）し、誰でも多少は経済的な利益を追求しなければ生きていけず、経済問題を理解しなければ生きていけない社会であり、それゆえ経済学を学ぶ必要に迫られている時代である [1] という。そうであるならば、物理のモデルを使ってそれらを理解しようとするのは統計物理の分野にいる者にとって自然なことのようと思われる。経済現象が物理現象と根本的に異なるのは、予測そのものが結果を変化させてしまうという性質を持っている点であろう。現在の情報に基づいて値上がりを予測し買い注文を出したとしても、市場関係者はそれに応じた行動をとるので、売る時には始めの予測と大幅に異なって値下がりし、損失を出したりすることなど当たり前に起きている。市場ダイナミクスの様々なモデルが考えられているが、本発表では、経済時系列データに見られる特徴のうち、Volatility clustering あるいは間欠的振る舞いを再現する Bornholdt によるスピンモデルのシミュレーション結果を取り上げた。本発表の内容は参考文献 [3, 4, 5] に基づいている。我々に求められているものは、ある要因がモデルに考慮されていないからといって、そのモデルが欠陥であると決め付けるような狭量な態度ではなく、そのモデルではどこまでが現象の本質を捉えているかを検証していく地道な精神で向かっていく態度であるように感じる。次に株価の変動や為替レートの変動のデータから得られている stylized fact [2] として認識されている事実を挙げる。

2 Stylized fact

- 価格変化の分布などに見られる非ガウス性、特に Fat tails と呼ばれる裾を引く形や正の kurtosis（4 次のモーメントに関係）を持つ。
- リターンの自己相関関数はほとんどゼロ
- しかし、リターンの絶対値の自己相関関数はゆっくりと減少する。
- リターンの時系列に見られる間欠的な振る舞い (irregular bursts)
- Volatility clustering (長時間相関の存在)

等が代表的なものとして挙げられる。これらの特徴のうち特に 3 つ目は、モデルに対する constraint を与える意味で重要と思われる。他の項目はそのデータ解析の範疇である。

3 モデルと結果

ここでは、モデルを簡単に説明する。トレーダは格子上にいて各時刻で売りと買いのどちらかの行動をするものとし、それをスピン変数 $S_i(t)$ に対応させる。ここでいう格子上のトレーダー同士の距離というのは、文字通りの地理的な距離というよりもむしろ”情報(コミュニケーション)”的な距離を表していると考えるといいかも知れない。すなわち、

$$S_i(t) = \begin{cases} +1 & \text{買い} \\ -1 & \text{売り} \end{cases} \quad (1)$$

更に、磁化 $M(t)$ を ”Price” の指標とみなし (Price 自体ではない)、リターンを log-return $Return(t) = \ln|M(t)| - \ln|M(t-1)|$ として定義する。各トレーダーの行動は、通常温度 β^{-1} の熱浴のダイナミクスに従って更新される。すなわち、

$$S_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{with } p = [1 + \exp(-2\beta h_i(t))]^{-1} \\ -1 & \text{with } 1-p \end{cases}, \quad (2)$$

ここで局所場 $h_i(t)$ は

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) - \alpha S_i(t) \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j(t) \right|, \quad J_{ij} = \begin{cases} J & \text{最近接のペア} \\ 0 & \text{その他のペア} \end{cases} \quad (3)$$

のように定義される。パラメータ α は、”全磁化”に対する結合定数で正の値を仮定する。この局所場の意味するところは、売り買いの注文は局所的には隣の人と同じ行動をとる(強磁性的)効果が働くとともに、グローバルにも各トレーダーは市場との結合によって相互作用するという二つの効果を取り入れたものと考えられる [3]。シミュレーションは 10^7 モンテカルロステップにわたって 4 次元まで行い結果を解析した。図 1 は、リターンの間欠的な振る舞いの様子を最初の 10000 ステップの window について示す。局所場の第

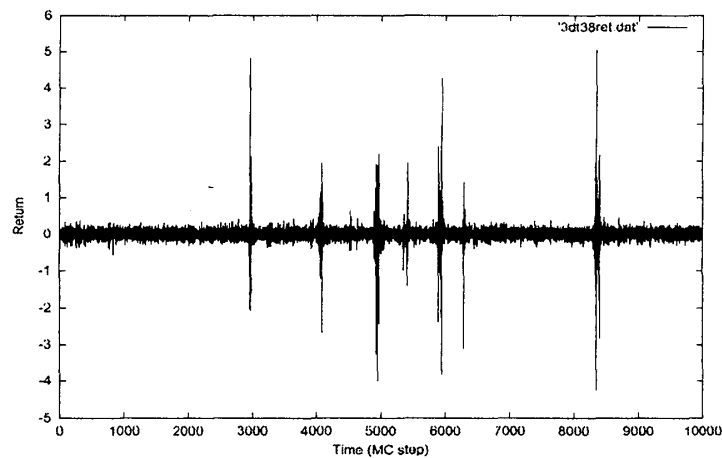


図 1: リターンの時間変化。3d 正方格子について、パラメータを $J = 1.0, \alpha = 4.0, T = 3.8$ とした。

二項において“磁化”の絶対値をとっているため、そこに非線形の効果が入り適切なパラメータにおいてこのようなバースト的振る舞いを出すと考えられる。同様な振る舞いは次元を上げても見られるが、(J/k_B を単位とした) 温度はいずれもゼロ磁場における臨界温度 T_c ¹ 以下で現れていることに注意をする必要がある。リターンの分布とその絶対値の自己相関関数の様子を図2、図3に挙げた。リターンの自己相関関数のべき指数もモデルの

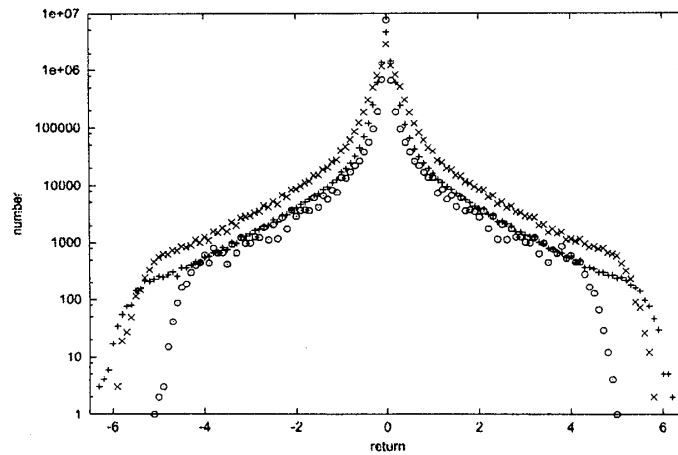


図2: リターンの分布. パラメータを $J = 1.0$, $\alpha = 4.0$ に固定し各次元 d に対して温度 T を $(d, T) = (2, 1.5), (3, 4.0), (4, 6.0)$ のように定めたときのもの。正の kurtosis で特徴付けられる尖鋭的な形になる。

妥当性を検証する上で重要なものと考えられているが、満足の行く指数を出すモデルはまだないようである。Lux-Marchesi モデル [6] のように、ノイズトレーダーとファンダメンタリストに分けてその割合を時間に対して追いかけることもできる。つまり、各格子にスピン $S_i(t)$ の他にストラテジースピン $C_i(t)$ を割り当てる。この値が +1 であればファンダメンタリスト、-1 であればノイズトレーダーとみなす。その場合、局所場の第二項は、 $-\alpha C_i(t) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j(t)$ のようにとることになり、もし、スピン $S_i(t)$ がグローバルなカップリングに対して反平行であれば、ストラテジースピンを反転させる。こうした更新を繰り返していくと、トレーダーの割合は激しく動いている様子がうかがえる [3, 4]。

4 まとめ

以上、市場の intermittency に着目した簡単な Ising スピンモデルによるモンテカルロシミュレーションの結果を述べた。2 節で述べた Stylized fact が観測されることを 4 次元までについて確認し、2 次元正方格子に対して報告 [3] されたものと同様な振る舞いを 4 次元まで確認した。このモデルは、リターンに intermittency を出すミニマムモデルではないようである [5]。また磁化を price の指標とみなすことや、全てのモンテカルロステップに渡って“温度”が一定であることは非現実的と思われる方もいるかも知れない。いろいろな

¹2d, 3d, 4d の各次元に対して $T_c = 2.269, 4.511, 6.680$

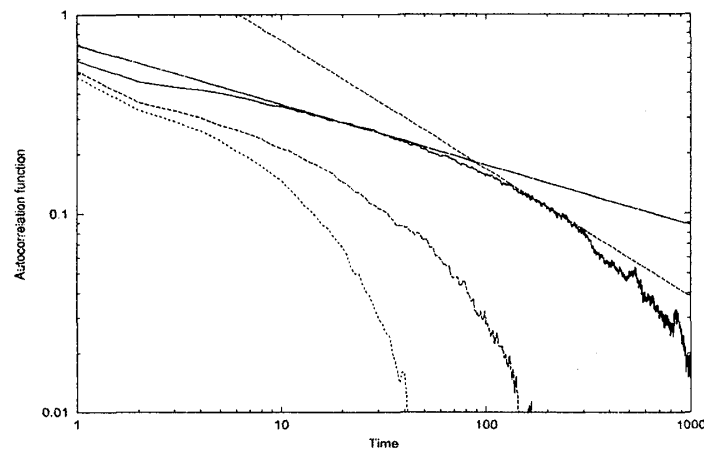


図 3: リターンの絶対値の自己相関関数。10⁶ ステップに対して計算。上から 2d, 3d, 4d。実線の直線は比較のため S&P500 のデータから求められている傾き -0.3 を表し、点線の直線はマイノリティーゲームのモデルからもとめた -0.64 の傾きを表す。

変形バージョンが考えられるので何に重きを置くかに応じて変えて調べることも面白いと思う。しかしこのモデルで筆者が興味深いと思っていることは、通常のスピン系で用いる処方箋に従って局所場 h_i から形式的にハミルトニアンを構成してもそれは、エネルギー関数とは呼べないことである。すなわち、ハミルトニアンは示量性を持たず ($O(N)$ ではない)、通常の Boltzmann-Gibbs 統計力学による取り扱いはできない。従って、この系に対しては、平均場近似やレプリカ計算といった従来の解析的なアプローチは出来ない。

参考文献

- [1] 岩井 克人, '経済学を学ぶ幸運', 文化, 思潮 21 (朝日新聞 2002 年 5 月 8 日夕刊) .
- [2] R. Cont, Quantitative Finance, **1**, 223 (2001).
- [3] S. Bornholdt, Int. J. Mod. Phys. C **12**, 667 (2001).
- [4] T.Yamano, Int. J. Mod. Phys. C **13**, 89 (2002).
- [5] T.Yamano, Int. J. Mod. Phys. C **13**, No. 5 (2002) in press.
- [6] T. Lux and M. Marchesi, Nature **397**, 498 (1999).