

概周期ポテンシャルをもった 1次元シュレーディンガー作用素のスペクトルについて。

東大理 小谷 真一

1° 序

おとしは

$$(1.1) \quad H(\varphi)u = -\frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \varphi(x)u \quad \text{on } L^2(\mathbb{R})$$

おとしは

$$(1.2) \quad H(\varphi)u_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + \kappa \varphi(n)u_n \quad \text{on } l^2(\mathbb{Z})$$

と考察の対象とするが、ポテンシャル φ は概周期的とする。
 φ が周期的な場合については Bloch 解が存在しスペクトル逆問題もまた正確に理論的に確立している。しかし、 φ が概周期的になると必ずしもそのような場合、必ずしも有限帯スペクトルに対応するエネルギーの場合と限らず一般の場合 Bloch 解は存在しない。
こゝで 10 年程、物理理論の観点から準結晶の研究の高まり等から、物理学者、数学者双方から (1.1) おとし (1.2) の作用素に類似したものとしてこの小論文ではその数々の側面について一般論的な事実を述べ最近の動向等を survey している。

2° Johnson-Moser の定理

$C_b(\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数全体とし $\sup\text{-norm } \|\cdot\|$ を Banach 空間にする。 $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ が概周期的であるとは $G_0(\varphi) = \{\varphi_z\}_{z \in \mathbb{R}}$ が $C_b(\mathbb{R})$ で有限 $\mathbb{Q}$ -スパンを成すことを意味する。但し

$\delta_z(\cdot) = \delta(z+\cdot)$ とする。 $G_0(\delta)$ の closure を $G(\delta)$ とする。

$q_0(\delta)$ には

$$\delta_1 = \delta_{z_1}, \delta_2 = \delta_{z_2} \rightarrow \delta_1 \cdot \delta_2 = \delta_{z_1+z_2} \quad (\text{well-defined})$$

2° 自然に abel 群の構造を λ したとき $G(\delta)$ は δ によって
 (2.2.1) $G(\delta)$ は compact abel 群となる。 δ の (2.2.2) により
 (2.2.2) Haar measure を μ とする。 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G(\delta)$ は

$$\phi(z) = \delta_z \quad 2^\circ \text{ def. } \delta$$

homomorphism 2° ϕ は $\mathbb{R}$ から $G(\delta)$ への dense 2°
 である。 (2.2.3) $G(\delta)$ の 逆元群 $G(\delta)^*$ は $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ となる。
 (2.2.4) $G(\delta)^*$ は $\mathbb{R}$ の 可算部分群と見做す。
 (2.2.5) δ は $\mathbb{R}$ の frequency module
 とする。 (2.2.6) $\delta(x)$ は

$$\delta(x) = \sum_{\xi \in G(\delta)^*} e^{i\xi x} \delta_\xi \quad \delta_\xi = \langle \delta, e^{i\xi \cdot} \rangle_\mu$$

の $L^2(\mu)$ -展開と見做す。 $G(\delta)$ には $\mathbb{R}$ から自然に $\mathbb{R}$ が作用する。
 (2.2.7) $(T_z f)(\cdot) = f(\cdot + z)$, $f \in G(\delta)$, $z \in \mathbb{R}$ とする。 T_z は
 μ を不変に保ち、 μ -可測性 T_z -不変な関数には δ が作用する。
 (2.2.8) δ は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ -モジュールと見做す。

$\delta = 2^\circ$ $f \in G(\delta)$ に対して $H(f)$ とする。 δ は Green 関数。

$(H(f) - \lambda)^{-1}(x, y)$ は $G_\lambda(x, y; f)$ とする。 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

に対して G_λ は x, y の連続関数で、 $\lambda \in \mathbb{R}$ ではない。

Stieltjes 1945 σ_f on $\mathbb{R}$ 12

$$G_\lambda(0, 0, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma_f(d\xi)}{\xi - \lambda}$$

と表現できる。 $\gamma = 2$

$$n(d\xi) \equiv \frac{\int \sigma_f(d\xi) \mu(dt)}{G(\lambda)}$$

とある。 $\mathbb{R}$ 上の

$$(2.1) \quad \int_{G(\lambda)} G_\lambda(0, 0, t) \mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} \frac{n(d\xi)}{\xi - \lambda}$$

とある。 $\bar{\sigma}$ は $\mathbb{R}$ 上の測度である。

$$\frac{1}{t} \int_0^t G_\lambda(0, 0, \tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n(d\xi)}{\xi - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

と $\bar{\sigma}$ は $\mathbb{R}$ 上の測度である。 $n(d\xi)$ は $H(\lambda)$ の density of states.
 (2.1) と $\mathbb{R}$ 上の測度 $n(d\xi)$ は $H(\lambda)$ の spectral
 measure Σ である。

$$\Sigma = \text{Supp } n$$

とある。

このとき Johnson-Moser [7] の次の定理が成り立つ。

Theorem 1 (Gap-labeling theorem). $n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} n(d\xi)$ とある。

n は連続関数で $\mathbb{R} \setminus \Sigma(\text{gap})$ 上では $n(\lambda)$ は $G(\lambda)^*$ の値である。

Theorem 4. (Chulaevsky-Delyon [2]).

(3.1) を仮定する。 $\exists k_0 > 0$, s.t. $\forall |k| \leq k_0$, (1.2)

2" (a.e. θ) $H(\theta)$ の λ^0 固有値は 絶対連続スペクトル

に属する。すなわち、一般化された固有関数は準周期的である。

この結果は Th. 2 と, $\delta \rightarrow 0$, 2" 意義で

一致する。(1.2) の k と k^{-1} との対偶性 (duality

(Aubry-duality) と関係づけられる。このため k の

大と小の対偶スペクトルは chaotic に変化する。(1.1) 2" は

この結果は最早も古典的である。

Theorem 5. (Dinaburg-Sinai [4]). θ は $G(\theta)^*$ の

有界な (i.e. 準周期的) 関数。この近傍では 2" の 2 次元

バージョンがある。このため k の対偶性, 7" の 2 次元

領域では (1.1) の $H(\theta)$ は 絶対連続スペクトルを持つ。

したがって, Th. 3 と 5 を含めたことは十分であることは

次の二つの場合と境界上の左と右の二つの状態の間に達する

ことができる。これは実際には pure point と pure absolutely

continuous とは異なるものであることを解決する, 新しい idea

が必要であるのである。

4° 有限個の値 (または有限個の値) である場合

この計算の二つの場合と 12 (1, 2) である

$$f(u) = 1_A(n\alpha + \theta)$$

が成り立つ。したがって $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である。またこの場合

$$A = [-\alpha^3, \alpha^2), \quad \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \alpha < 2$$

Kohmoto-Kadanoff-Tang [8], Ostlund et al. [10]

の論文から知られる, したがって Cantor 集合であることは

指摘されている。また, Jülicher [14] は $|k| \geq 1/6$

のとき $H(\delta)$ のスペクトルは特異連続スペクトル $\sigma_{sc} = \sigma$ であり、

すなわち Deljan-Petrakis [3]. (*) $\kappa = 2$ a.e., $\alpha, \theta = 2$

$H(\delta)$ は $\frac{1}{2}$ スペクトルと $\sigma_{sc} = \sigma$ であり、

筆者は $\sigma = \alpha$ の δ potential について $\sigma = \alpha$ の結果を得

た。すなわち $\sigma = \alpha$ である。

Theorem 6. (S. Kotani [9]).

$$f(x) = \lambda_1 I_{A_1}(n\alpha_1 + \theta_1) + \dots + \lambda_N I_{A_N}(n\alpha_N + \theta_N)$$

とする。 f は $\mathbb{R}$ 上の 2π -周期関数 $H(\delta)$ は (*) の条件

を満たすスペクトルと $\sigma_{sc} = \sigma$ (for a.e. $\theta_1, \dots, \theta_N$)。

したがって有限個の値 α_i と θ_i を用いて f を表現できる。

したがって α の場合、スペクトルは特異連続スペクトル $\sigma_{sc} = \sigma$ であり、

比較して α の場合、スペクトルは $\sigma_{sc} = \sigma$ である。

解法は α の場合と異なる。

註記 30 a 3A A survey 212 Spencer [12], [13]
 2020.

参考文献,

- [1] Bellissard - Lima - Testard ; "Mathematics + physics, Lectures on recent results" Vol. 1. L. Streit ed. World Sci. Pub. (1985) 1-64.
- [2] Chulaevsky - Delyon : preprint.
- [3] Delyon - Petritis : Comm. Math. Phys. 103 (1986)
- [4] Dinaburg - Sinai : Funct. Anal. Appl. 9 (1975)
- [5] Frischlich - Spencer : Comm. Math. Phys. 88 (1983).
- [6] Frischlich - Spencer - Wittwer : preprint.
- [7] Johnson - Moser : Comm. Math. Phys. 84 (1982)
- [8] Kohmoto - Kadanoff - Tang : Phys. Rev. Lett. 50 (1983).
- [9] Kotani : preprint.
- [10] Ostlund - Pandit - Rand - Schellnhuber - Siggia : Phys. Rev. Lett. 50 (1983).

- [11] Sinai : *J. of Statistical Phys.* 46 (1987).
- [12] Spencer : *J. of Statistical Phys.* 51 (1988).
- [13] Spencer : preprint.
- [14] Sütő : *Comm. Math. Phys.* 111 (1987).