

# $S^1$ の同相写像の半共役について

日本大理工 松元重則

(Matsumoto, Shigenori)

## §1 半共役と有界コホモロジー

本録を通して次の記号を用いる。

$G = S^1$  上の保向的自己同相のなす群

$$\bar{G} = \{ \bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \bar{f} \circ T = T \circ \bar{f} \}$$

$$\text{ここに, } T(x) = x + 1$$

$\bar{G}$  は  $G$  の普遍被覆群であり、その標準射影を  $p: \bar{G} \rightarrow G$  で表す。

(定義)  $f: S^1 \rightarrow S^1$  が、位数1単調写像であるとは  $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して、

- 1)  $\bar{f} \circ T = T \circ \bar{f}$ 。
- 2)  $\bar{f}$  は  $f$  を cover する。
- 3)  $\bar{f}$  は単調。

をみたすこととする。

(注)  $f$  は不連続でもよく、狭義単調でもよい。従って一般に  $1:1$  でもなく、非 onto でもない。

(定義) 離散群  $\Gamma$  と, 順同型  $\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$  について  $\phi_1 \sim \phi_2$  (半共役) とは, 位数 1 単調写像  $h$  が存在して  $\phi_1(\gamma) \circ h = h \circ \phi_2(\gamma)$  ( $\forall \gamma \in \Gamma$ ) を満たすこととする。

(注) 半共役は, 同値関係である。(証明は難しくない。)

$G$  のふたつの元の間には, 半共役という概念が同様に定義されるが, これは, 微分可能力学系理論で, 同じ名前が使われている概念と一致する。また, よく知られているように, ふたつの同相写像が半共役であることと, それらの回転数 (rotation number) が一致することとは同値である。

本録の主たる目的は, 一般の離散群に対し, ふたつの表現  $\phi_1, \phi_2$  がいつ半共役になるか, そのための不変量を与えることである。これは, 有界コホモロジー群の元としてとらえられる。ここでは, しばらくの間 有界コホモロジーを復習しよう。

係数  $A$  は  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{Z}$  である。  $\Gamma$  を群とする。

$$C^n(\Gamma; A) = \{u: \Gamma^n \rightarrow A\}$$

$$\delta: C^n \rightarrow C^{n+1}$$

$\delta$  は, 例えは,  $n=1$  のとき

$$\delta(u)(\gamma, \gamma') = u(\gamma') - u(\gamma\gamma') + u(\gamma)$$

いま,  $C_b^n(\Gamma; A) = \{u \in C^n; \text{Im}(u), \text{有界集合}\}$

とおけば, これは  $\{C^n, \delta\}$  の subcomplex となる。

また,  $C_b^n$  上 norm  $\|\cdot\|$  が普通に定義され, Banach 空間となる。この cohomology 群を  $H_b^n(\Gamma; A)$  で表わす。

計算例(1)  $H_b^1(\Gamma; A) = 0$  ( $\Gamma$ : 任意の群) - 後述

(2)  $H_b^n(\Gamma; \mathbb{R}) = 0$   $\Gamma$ : amenable. [2]

(3)  $H_b^2(\Pi; \mathbb{R})$ :  $\omega$ -生成 Banach space [4] 他

$\Pi$ : hyperbolic surface の基本群

(4)  $H_b^2(G; \mathbb{R}) \cong H_b^2(\text{PSL}_2 \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  [3]

次に  $H_b^2(G; \mathbb{R})$  の生成元 (Euler class) について述べよう。

写像  $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$  に,  $p \circ \sigma = \text{Id}$  を満たすものを cross section

という。これに対応して, 2-cochain  $e_\sigma \in C^2(G; \mathbb{R})$  を

$e_\sigma(f, g) = \sigma(fg)^{-1} \sigma(f) \sigma(g)$  と定める。ここに右辺は  $T^n$  の

形のもので, これを  $n$  と同一視している。いまもし  $\sigma$  が有界

( $\sigma(f)(0)$  が  $f$  によらず有界) ならば,  $e_\sigma$  は, 有界 cochain と

なる。また,  $e_\sigma$  が cocycle なること, さらに, その定める cohomology

類が,  $\sigma$  によらないことがすぐわかる。 $e_\sigma$  の類を,

$\chi_{\mathbb{R}} \in H_b^2(G; \mathbb{R})$  で表わす。また,  $e_\sigma$  は整数値のもので,

整係数類をも表わす。これを  $\chi_{\mathbb{Z}} \in H_b^2(G; \mathbb{Z})$  で表わす。

Ghys [1] の主定理は, 次のとおりである。

定理 1  $\phi_1, \phi_2 : \Gamma \rightarrow G$  について

$$\phi_1 \sim \phi_2 \iff \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}})$$

証明)  $\Rightarrow$   $\exists h, \phi_1(x) = \phi_2(x)h \in \bar{G}_1$  に lift して

$$\bar{h} \circ \phi_1(x) = \sigma(\phi_2(x)) \bar{h} \cdot T^{u(x)} \quad (u: \text{有界})$$

これから,  $\phi_1^*(e_0) - \phi_2^*(e_0) = \delta u$  が容易に従う。

$\Leftarrow$   $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}})$  が,  $H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$  においても成立している。

これは,  $K(\Gamma, 1)$  上に,  $\phi_1, \phi_2$  のもたらす  $S^1$ -束の Euler 類であるので,  $\phi_1, \phi_2$  の  $S^1$ -束は一致する。代数的に言えば, 中心拡大

$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \bar{G} \rightarrow G \rightarrow 1$  を,  $\phi_1, \phi_2$  でひきもどしたものが  
 相等的。また, cross section  $\sigma$  をひきもどしたものを  $\sigma_1, \sigma_2$   
 と書くとき, 次のような図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \bar{\Gamma} & \xrightleftharpoons[\sigma]{\sigma_1} & \Gamma \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \bar{\phi}_i \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \bar{G} & \xrightleftharpoons[\sigma]{\sigma_1} & G \rightarrow 1 \end{array}$$

このとき

条件  $\phi_2^*(e_0) - \phi_1^*(e_0) = \delta u$  より,  $\sigma_2(x) = \sigma_1(x) T^{u(x)}$   
 が従う。さらに,  $x \in \mathbb{R}$  に対し, 集合  $\{\bar{\phi}_1(\alpha)^{-1} \bar{\phi}_2(\alpha)(x) \mid \alpha \in \bar{\Gamma}\}$   
 は, 有界であることがわかる。よって,

$$\bar{h}(x) = \sup_{\alpha \in \bar{\Gamma}} (\bar{\phi}_1(\alpha)^{-1} \bar{\phi}_2(\alpha)(x))$$

と置き,  $\bar{h}$  を project down したものを  $h$  とすればよい。  $\blacksquare$

## §2. 数値的不変量

この§では, 定理1の類  $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$  を, いくつかの数値的不変量のくみあわせに分解する。

まず, 係数列  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  に附随して, 次の完全系列が存在する。

$$H_b^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_*} H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^*} H_b^2(\Gamma; \mathbb{R})$$

(注意) とくに,  $\Gamma = \mathbb{Z}$  の時, 前にみたように, 上の両端は消え,  $\delta_*$  は  $H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を与える。これにより,

$\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$  は,  $\phi(1)$  の回転数に一致することがわかってゐる。([1])

さて,  $\{\gamma_i\}$  を群  $\Gamma$  の生成元,  $\varphi_i: \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$  を  $\varphi_i(1) = \gamma_i$  となる写像とする。(  $\Gamma \rightarrow \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$  との合成も, 同じ文字でかく。)

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(\Gamma/[\Gamma, \Gamma]; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^1(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z}) \\ (\oplus \varphi_i)^* \downarrow & & \oplus \varphi_i^* \downarrow & & \oplus \varphi_i^* \downarrow \\ \text{Hom}(\oplus \mathbb{Z}; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \oplus H^1(\mathbb{Z}; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \oplus H_b^2(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

上の図式にて 左垂直矢は injective, よって  $\oplus \varphi_i^*$  は,  $\text{Im } \delta_*$  上 1:1。つまり,  $a \in H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z})$  に対し

$$a = 0 \iff \varphi_i^*(a) = 0 \quad (\forall i) \quad \wedge \quad \iota^*(a) = 0$$

これより

補題2  $\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$  が半共役

$$\iff \begin{cases} 1) \rho \phi_1(\gamma_i) = \rho \phi_2(\gamma_i) & (\rho = \text{回転数}) \\ 2) \phi_1^*(\chi_R) = \phi_2^*(\chi_R) \end{cases}$$

(注)  $\Gamma$  amenable ならば (1) 単独と同値。また  $\Gamma$ : 完全群  
ならば, (2) 単独と同値。

次に  $\phi^*(\chi_R)$  を, 「標準 Euler コサイクル」を用いて,  
数値的量に翻訳しよう。このために, 有界  $1$ -チェーンと  
双対の位置にある  $l^1$ -チェーンを導入しよう。([2], [3], [4])  
 $\Gamma$  の  $l^1$   $n$ -chain  $c$  とは,  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\gamma_1^i, \dots, \gamma_n^i)$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ )  
に  $\|c\| = \sum |a_i| < \infty$  を満たすものがあリ。Banach 空間  
 $C_n^{l_1}(\Gamma; \mathbb{R})$  を成す。境界準同型  $\partial$  は, 普通に定義され  
有界作用素である。また,  $(C_b^n(\Gamma; \mathbb{R}), \delta)$  は,  
 $(C_n^{l_1}, \partial)$  の Banach 空間としての双対である。  $C_n^{l_1}$  の  
cycle 群, boundary 群を  $Z_n^{l_1}, B_n^{l_1}$  と表わす。

また  $\alpha: C_1^{l_1} \rightarrow C_2^{l_1}$  を, 次により定義しよう。

$$\alpha(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} (\gamma^{2^{i-1}}, \gamma^{2^{i-1}})$$

$\alpha$  は有界作用素であり,  $\partial \circ \alpha = \text{Id}$  を満たす。(  $\alpha$  の存在に  
より) 計算例 (1) の事実が  $\mathbb{R}$ -係数のとき示されるのである。)

補題3 2-cocycle  $u \in C_b^2(\Gamma; \mathbb{R})$  が coboundary  
 $\iff u|_{Z_2^{\ell^1}} = 0$

証明)  $\Rightarrow$ ) は自明  $\Leftarrow$ )  $\psi \circ \varphi = u$  を示す。  
 $\psi: C_1^{\ell^1} \rightarrow \mathbb{R}$  の存在はすぐわかる。  $\psi$  の有界性には、例えば  $\alpha$  の有界性を用いればよい。(写像定理でもよい。)

$Z_2^{\ell^1}$  上に  $\beta = \text{Id} - \alpha \circ \varphi: C_2^{\ell^1} \rightarrow C_2^{\ell^1}$  とおけば、これは  $Z_2^{\ell^1}$  への retraction であり、従って 有界実 2-cocycle  $u$  に対し

$$(1) [u] = [u \circ \beta]$$

$$(2) [u] = 0 \iff u \circ \beta = 0$$

つまり、各有界 2-cohomology 類  $[u]$  に対し、 $u$  を代表する cocycle  $u \circ \beta$  が、ひとつ定まり、類の一致は、 $u$  の cocycle の一致により判定されるわけである。これを、標準的 cocycle と呼ぼう。

Euler 類  $\chi_R$  の標準的 cocycle  $\tau$  は、routine に計算される。 $\tau$  は次のとおりである。

補題 4  $\tau(f, g) = \text{rot}(\bar{f} \bar{g}) - \text{rot}(\bar{f}) - \text{rot}(\bar{g})$

$\bar{f}, \bar{g}$  は,  $f, g$  の  $\bar{G}$  への lift であり,  $\text{rot}$  は回転数であるが,  $\bar{G}$  の元に対し実数を対応させるものであり, 前述の  $\rho$  と, 記号上区別してある。

以上をまとめると

定理 5  $\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$  が半共役であるのは

$$\iff \begin{cases} 1) \rho \phi_1(\gamma_i) = \rho \phi_2(\gamma_i) & \{\gamma_i\}: \Gamma \text{ の生成元} \\ 2) \tau(\phi_1(\gamma), \phi_2(\gamma')) = \tau(\phi_2(\gamma), \phi_1(\gamma')) \end{cases}$$

### §3 応用

前々回に,  $\chi_{\mathbb{Z}}$  が, 生成元の回転数と, 標準 Euler cocycle に分解されたが, 後者が消える作用は, 力学的構造が極めて簡単であろうことが想像される。これにのりて次がなりたつ。

定理 6  $\Gamma$  を有限生成群,  $\phi: \Gamma \rightarrow G$  を表現とする。  
このとき, 次は同値。

- (1)  $\phi^*(\chi_R) = 0$
- (2)  $\phi$  は, 回転の対す  $G$  の部分群  $(\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  への表現と半共役
- (3)  $\phi$  の作用は, 極小集合  $\Omega$  上 holonomy が無い。  
 $(\phi(\gamma)(x) = x \quad \exists x \in \Omega \Rightarrow \phi(\gamma)|_{\Omega} = \text{Id})$
- (4)  $\phi$  の作用は, 不変測度をもつ。

22, [3] に2,  $H_b^2(G; \mathbb{R}) \cong H_b^2(\text{PSL}_2\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  が示されている。このことより直ちに

$$H_b^2(G; \mathbb{Z}) \cong H_b^2(\text{PSL}_2\mathbb{R}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

がわかる。この群が, (曲面群の場合などと著しく異なり) 極めて小さい群であることは, これらの群から  $G$  への表現の少なさを意味する。これを定着させ次の定理を得る。

$G$  が  $\text{Homeo}_+(S^1)$  又は  $\text{PSL}_2\mathbb{R}$  を表わし, 各  $k$  に対応して,  $\tilde{G}$  が  $\text{Homeo}(S^1)$  又は  $\text{PGL}_2\mathbb{R}$  を表わす。

定理 7  $G$  の endomorphism は, trivial か, または,  $\tilde{G}$  の元による conjugation に限られる。

(注)  $G = \text{PSL}_2\mathbb{R}$  の場合, 初等的証明がある。(坪井俊氏)

## 参考文献

- [1] E.Ghys, Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, preprint, Université des Sciences et Techniques de Lille I
- [2] M.Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. I.H.E.S. 56(1982) 5-100
- [3] S.Matsumoto - S.Morita, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, to appear in Proc. A.M.S.
- [4] Y. Mitsumatsu, Bounded cohomology and  $\ell^1$ -homology of surfaces, Topology 23(1984) 465-472