

Conformal metrics

東工大理

吹田信之

1. まえがき. Sario - Oikawa はその著書 "Capacity functions" においてこの問題を提起した; $C_\beta(z)$ を用いて Ω の境界の容量, $K(z, \bar{z})$ を Ω の Bergman 核とするとき, $C_\beta^2(z)$ と $\pi K(z, \bar{z})$ の大小を比較せよ [5].

この問題はのちに示す C_β と K との関係式

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log C_\beta(z)$$

により, 計量 $ds_\beta = C_\beta |dz|$ の曲率

$$K(ds_\beta) = -\Delta \log C_\beta(z) / C_\beta^2(z)$$

の評価の問題に帰着させられる. 著者は二重連結領域について $C_\beta^2(z) \leq \pi K(z, \bar{z})$ を示し, 一般領域についても同様な等式を予想した [6]. この予想は上のことから, $K(ds_\beta) \leq -4$ と同値である. 支持計量を利用する一とにより, Ω が n 個 ($n > 2$) の曲線によりかこまれた領域ならば $K(ds_\beta) < -4$ をみたす点 $z \in \Omega$ は存在する.

他の等角計量についても同様の予想がある。 $C_B(z)$ を解析容量とし, $ds_B = C_B(z)|dz|$ とするとき $k(ds_B) \leq -4$ である。この予想は等号条件を除いて著者により解かれた [7, 8]。さらに, リーマン面 Ω 上で正則かつ Dirichlet 積分

$$\iint_{\Omega} |f'(z)|^2 dx dy$$

が π で押えられる函数族 $\mathcal{D}$ について

$$C_D(z) = \sup_{f \in \mathcal{D}} |f'(z)|$$

とおく。酒井氏の結果 [4] を使えば, $ds_D = C_D(z)|dz|$ について, $C_D(z) > 0$ ならば $k(ds_D) \leq -2$ が示される。この場合も予想は $k(ds_D) \leq -4$ であり, 二重連結の場合には正しい [1]。酒井氏は最近この予想に肯定的な解答を得たとのことである¹⁾

Ω を平面領域とし, $\mathcal{D}$ の部分族で單葉な函数族を $\mathcal{S}_D$ とかく。

$$C_{SD}(z) = \sup_{f \in \mathcal{S}_D} |f'(z)|,$$

$ds_{SD} = C_{SD}(z)|dz|$ とおけば, $C_{SD}(z) > 0$ かつ微分可能な場合に $k(ds_{SD}) \leq -4$ が示される [7]。

リーマン面 Ω 上の Bergman 核は計量 $ds_K = \sqrt{\pi K(z, \bar{z})}|dz|$

1) 私信

をみるべく、 ω_k の曲率に关しては、 -4 より大きく、 -4 より小さいものも存在することを同環の場合で示す。

2. 基本等式 容量 C_β と K との関係式は [6] で証明されている。ここではより簡単な別証を示す。

定理 1. Ω が O_G に属するリーマン面ならば

$$(1) \quad K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log C_\beta(z).$$

証明

$$H(z, \zeta) = g(z, \zeta) + \log |z - \zeta|$$

とおく。ここで $g(z, \zeta)$ は Ω のグリーン関数、局所座標 z, ζ を用いて表した。対称性から $H(z, \zeta) = H(\zeta, z)$

さらに

$$H(z, \bar{z}) = \log \frac{1}{C_\beta(z)}.$$

$H(w, \omega)$ は対称な調和関数なので $w = z, \omega = \zeta$ のまわりでフーリエ展開される

$$H(w, \omega) = a_{00} + \dots + a_{20}(w - \bar{z})^2$$

$$+ a_{20}(\overline{w - \bar{z}})^2 + a_{02}(\omega - \zeta)^2 + a_{02}(\overline{\omega - \zeta})^2$$

$$+ a_{11}(\omega-z)(\omega-\bar{z}) + a_{\bar{1}\bar{1}}(\overline{\omega-z})(\overline{\omega-\bar{z}})$$

$$+ a_{1\bar{1}}(\omega-z)(\overline{\omega-\bar{z}}) + a_{\bar{1}1}(\overline{\omega-z})(\omega-\bar{z}) + \dots$$

== τ a_{00} は実数であり, $a_{j\bar{k}} = \overline{a_{\bar{j}k}}$, $a_{\bar{j}k} = \overline{a_{jk}}$, ...
 明らかに

$$\frac{\partial^2 H(\omega, \bar{\omega})}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} \bigg|_{\omega=z, \bar{\omega}=\bar{z}} = a_{1\bar{1}} = a_{\bar{1}1}(z, \bar{z})$$

$$\frac{\partial^2 H(\omega, \bar{\omega})}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} \bigg|_{\omega=z} = a_{1\bar{1}} + a_{\bar{1}1}.$$

よって, 上の等式 [2]

$$K(\omega, \bar{\omega}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} g(\omega, \bar{\omega})$$

と, $K(z, \bar{z}) = -2a_{1\bar{1}}(z, \bar{z})/\pi \geq 0$ に注意すれば, 求める変換式が得られる。

3. $K(ds_B) \leq -4$. $\Omega \notin O_{AB}$ とする. 解析容量 $C_B(z)$ は

$$C_B(z) = \sup_{|f(z)| \leq 1} |f'(z)|$$

で定義される. $f'_0(z, z) = C_B(z)$ であるが $f_0(z, z)$ はつね

に存在し, Ahlfors 函数とよばれる.

定理 2 [7]. $C_B(z) > 0$ かつ $C_B(z)$ が 2 回連続微分可能な
ば $K(d\omega_B) \leq -4$. とくに Ω が平面領域かつ $\Phi \cap \Omega \neq \emptyset$ ならば,
 $C_B(z)$ は実解析的であり, つねに $C_B(z) > 0$.

証明. 支持計量の方法を用いる. Ahlfors 函数 $f_0(z, \bar{z})$
をとり

$$F(z, t) = \frac{f_0(z, \bar{z}) - f_0(t, \bar{z})}{1 - \overline{f_0(t, \bar{z})} f_0(z, \bar{z})}$$

とおく. $|F(z, t)| \leq 1$ である.

$$|F'(t, t)| = \frac{|f_0'(t, \bar{z})|}{1 - |f_0(t, \bar{z})|^2} = C(t)$$

点 z の近傍で, $C_B(t) \geq C(t)$ であり, $C_B(z) = C(z)$

1 したがって $\log(C_B(t)/C(t))$ は $t = z$ で極小値をとる.

これから $t = z$ において

$$-\Delta \log C_B(z) \leq -\Delta \log C(z).$$

計算により $\Delta \log C(z)/C(z)^2 = 4$ だから, $K(d\omega_B) \leq -4$

平面領域における $C_B(z)$ の実解析性は, $C_B(z)$ と

セーゲ一様 $k(z, \bar{z})$ との関係 $C_B(z) = 2\pi k(z, \bar{z})$ [2]

から容易に示される. 実際 Ω が何の解析曲線にかきわた

平面領域ならば, Ω 上で正則な直交基底系 $\{g_{\nu}, \bar{g}_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ をとる.

ができて,

$$k(z, \zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(\zeta)}$$

と展開される. 故に k は Ω の境界上のノルム

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\partial\Omega} |\varphi|^2 |dz|$$

に因りて強拘束であり, さらに Ω 上広義一樣である. ことから $k(z, \bar{z})$ の実解析性は明らかである. 一般領域の場合は, Ω の近似 $\{\Omega_v\}$ を考え, 対応する核変数 $k_v(z, \bar{z})$ が $\Omega_v \times \Omega_v$ 上で広義一樣拘束することから, 実解析性が証明される.

注意. $C_B(z)$ の実解析性は, 開リーマン面の場合には一般には成立しない. ... といふのは山田 [10] により反例が得られている.

等号条件は異なる方法によって完全では反いが, かなりよくとらえて求められている [3, 8]. これを示そう.

定理 3. Ω は平面領域とする. Ω における Ahlfors 変数 $f_0(z, \bar{z})$ が, Ω 以外に零点を持つば, Ω の点で $K(d\omega_B) < -4$.

証明. まず Ω が有限個の解析曲線が $\partial\Omega$ に含まれているとき, Ω の極値問題を考える.

I. $f(z)=1$ のとき $\|f\|^2 = \int_{\partial D} |f|^2 dz$ を最小にする.

II. $f(z)=0$, $f'(z)=1$ のとき $\|f\|^2$ を最小にする.

問題 I の極値関数は $k(z, \bar{z})/k(z, z)$ であって, 最小値 $\lambda_0(z) = k(z, \bar{z})^{-1}$

問題 II の極値関数 $F_1(z)$ は

$$F_1(z) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & k(z, \bar{z}) & \bar{k}_z(z, z) \\ 0 & k_{00} & k_{01} \\ 1 & k_{10} & k_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{vmatrix}}$$

で与えられる, その最小値は, $\lambda_1(z) = k_{00} / (k_{00}k_{11} - |k_{01}|^2)$

となる. ここで $k_{\alpha\beta} = (\partial^{\alpha\beta} / \partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta) k(z, \bar{z})$. さらに曲率と二乗極値との関係は

$$(3) \quad K(ds_B) = - \frac{\lambda_0(z)^3}{\pi^2 \lambda_1(z)}$$

で与えられる. 二乗の結果は Bergman が Bergman 核に関し
て導いた公式の類似物がある [2]. $K(ds_B) \leq -4$ は (3)
から示される. $\varphi(z) = f_0(z, z) k(z, \bar{z}) / 2\pi k_{00}^2$ は問題 II
の条件をみたしている. $\|\varphi\|^2 = (4\pi^2 k_{00}^3)^{-1} \geq \lambda_1(z)$ ため
ら, $K(ds_B) \leq -(\pi^2 \|\varphi\|^2 k_{00}^3)^{-1} = -4$.

等号条件をしるべきため, $f_0(z, z)$ は z 以外に零はない.

つものとする. $k(z, \bar{z})$ の共役核を $\ell(z, \bar{z})$ とかく. $\ell(z, \bar{z})$ は $z = \bar{z}$ に留数 1 の極を持ち, $z, \bar{z}$ に関して対称, かつ境界に沿って

$$(4) \quad \ell(z, \bar{z}) |dz| = i \overline{k(z, \bar{z})} dz$$

が成立する. さうに $\ell(z, \bar{z})$ は Ω 内に零点をもたないことが知られている [2]

さて,

$$h(z) = (z - \bar{z}_0) \ell(z, \bar{z}_0) f_0(z, \bar{z})$$

とおく. $h(z)$ と $\varphi(z)$ の内積を計算する. (4) を使って,

$$\begin{aligned} (h, \varphi) &= \int_{\partial\Omega} h \frac{\overline{f_0(z, \bar{z}) k(z, \bar{z})}}{2\pi k_{00}^2} |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi k_{00}^2 i} \int_{\partial\Omega} (z - \bar{z}_0) \ell(z, \bar{z}_0) \ell(z, \bar{z}) dz = \frac{(\bar{z}_0 - \bar{z}_0)}{2\pi k_{00}^2} \ell(\bar{z}_0, \bar{z}). \end{aligned}$$

$\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) + \varepsilon h(z)$ は問題 II の条件を満たしている.

$\|\varphi_\varepsilon\|^2$ の最小値は, $\varepsilon = -|(h, \varphi)| \|h\|^{-2} \exp(-i \arg(h, \varphi))$ のときとる. φ の値は

$$\|\varphi\|^2 - \frac{|(h, \varphi)|^2}{\|h\|^2}$$

に等しい. このことは $K(\partial\Omega) < -4$ を示す.

Ω が平面一般領域の場合, $\infty \in \Omega$ とし, Ω の一般性を失わない. Ω の近似と $\{\Omega_v\}_{v=1}^{\infty}$ とし, 各 Ω_v に対する Ahlfors 変数を $f_v(z, z)$ とかく. $f_v \rightarrow f_0$ (広義一様) だから $f_0(z, z)$ の零点 z_0 は, $f_v(z, z)$ の零点 z_v の集積値である. 補助の等角写像を利用すればより, $z_0 \neq \infty$ と仮定する. Ω_v における f_v に対応する変数を g_v, h_v とかく. Ω_v におけるセゲ-ポインソンの共役核を $k^{(v)}(z, z), l^{(v)}(z, z)$ とし, $v \rightarrow \infty$ のとき

$$|(h_v, g_v)| = \left| \frac{(z - z_v)}{k_{00}^{(v)2}} l^{(v)}(z_v, z) \right| \rightarrow \left| \frac{z - z_0}{k_{00}^2} l(z_0, z) \right|$$

だから $|(h_v, g_v)|$ は正の下限を有する. さらに, (4) より

$$\begin{aligned} \|h_v\|^2 &= \int_{\partial\Omega_v} |z - z|^2 |l^{(v)}(z, z_v)|^2 |dz| \\ &= \int_{\partial\Omega_v} |z - z|^2 |k^{(v)}(z, z_v)|^2 |dz| \end{aligned}$$

$z \in \Omega_v$ のとき, $|z - z| \leq M$ であるから, 再生性より

$$\|h_v\|^2 \leq M^2 k^{(v)}(z_v, z_v) \rightarrow M^2 k(z_0, z_0) \quad (v \rightarrow \infty)$$

$\|h_v\|^2$ が一様有界だから $|(h_v, g_v)| / \|h_v\|^2$ も正の下限を持つ.

このことからさらに $k(ds_B) < -4$.

4. その他の等角計量. $\Omega \neq \mathbb{D}$ とする. $\mathbb{D} = \{z \mid$

$\iint_{\Omega} |f'|^2 dx dy \leq \pi C_0$ となる. $\sup |f'(z)|$, $f \in \mathcal{O}$
 を $C_0(z)$ とおく. $g'(z) = C_0(z)$ をみたす g が $\mathcal{O}$ 内に存
 在する. $C_0(z) > 0$ ならば $g(z)$ は附加定数を除いて唯一
 定まる. とくに $g(z) = 0$ をみたす函数を AD 極値函数と
 して $f_1(z, \bar{z})$ とかく. 測度 μ によれば $|f_1(z, \bar{z})| \leq 1$
 [4]: $ds_0 = C_0(z) |dz|$ として, この結果をつかえば,
 定理 4. $\Omega \in \mathcal{O}_{AD}$, $C_0(z) > 0$ ならば, $K(ds_0)$
 ≤ -2 .

証明, Ω 上の exact な微分のつくる Hilbert 空間の Bergman
 核を $K(z, \bar{z})$ とかく. f_1 は

$$f_1(z, \bar{z}) = \frac{\int_{\Omega} \sqrt{C_0} \overline{K(z, \bar{z})} dz}{\sqrt{K(z, \bar{z})}}$$

で与えられる [1]. $C_0(z) = \sqrt{\pi} K(z, \bar{z})$. $K(z, \bar{z})$ は
 直交函数による展開を持つから, $K(z, \bar{z})$ は実解析的である
 この場合は 定理 3 の証明でものゝた Bergman の方法 [2]
 を使うことができる.

問題 I' $f'(z) = 1$ とき $\iint_{\Omega} |f'|^2 dx dy = \|f'\|^2$
 を最小にする. 最小値を $\lambda_0^*(z)$ とおく.

問題 II' $f'(z) = 0$, $f''(z) = 1$ とき $\|f'\|^2$ を最小にする.
 最小値を $\lambda_1^*(z)$ とおく.

$$(5) \quad K(ds_D) = -\frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0^*(z)^2}{\lambda_1^*(z)}.$$

問題Ⅰの極値函数は

$$F_0(z) = \int_z^{\bar{z}} \frac{\bar{K}(z, \bar{z})}{K(z, \bar{z})} dz$$

で与えられる, $\lambda_0^*(z) = K(z, \bar{z})^{-1}$. 問題Ⅱ' の条件をみたす函数として,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} F_0(z)^2$$

をとる. $F_0 = f_1(z, \bar{z}) / \sqrt{\pi K(z, \bar{z})}$, $|f_1| \leq 1$ なる,

$$|\varphi'| \leq \left| \frac{f_1'(z, \bar{z})}{\pi K(z, \bar{z})} \right|$$

が成り立つ

$$\lambda_1^*(z) \leq \|\varphi'\|^2 \leq (\pi K(z, \bar{z})^2)^{-1}$$

(5) より $K(ds_D) \leq -2$ となる.

Ω を平面領域とし, $ds_D = C_D(z) |dz|$ を考える.

Ω 内で単葉正則かつ $|f(z)| \leq 1$ をみたす函数族を $\mathcal{B}$ とか

き, $C_{\mathcal{B}}(z) = \sup |f'(z)|$, $f \in \mathcal{B}$ とおく. $C_D(z) = C_{\mathcal{B}}(z)$ となることが知られている [1]. (したがって,

$C_D(z)$ が 2 回微分可能な集では定理 2 の証明がそのまま使
うことができて, $K(ds_D) \leq -4$ となる. (しかし, 複連

結領域の場合 $C_{SD}(z)$ は必ずしも微分可能とはない. 例として円環 $\Delta: R^{-1} < |z| < R$ ($R > 1$) をとる. $R^{-1} < x < R$ とする. $C_{SD}(x)$ を与える極値函数 $p(z)$ は $p(x) = 0$ をみたし, Δ を半径1の円周線根へ写像する. $p(z)$ は Δ のグリーン函数 $g(z, x)$ を用いてつぎのように表わされる.

$$\log |p(z)| = -g(z, x) - \begin{cases} \frac{\log R x \log R |z|}{2 \log R} & (R^{-1} < x \leq 1) \\ \frac{\log(x/R) \log |z|/R}{2 \log R} & (1 \leq x < R) \end{cases}$$

これから

$$(b) \quad \log C_{SD}(x) = \log C_p(x) - \begin{cases} \frac{(\log R x)^2}{2 \log R} & (R^{-1} < x \leq 1) \\ \frac{(\log x/R)^2}{2 \log R} & (1 \leq x < R) \end{cases}$$

Δ は回転に対して不変であるから, $C_{SD}(z) = C_{SD}(|z|)$.

(b) より $\log C_{SD}(z)$ は $|z| = 1$ において微分可能でない.

最後に Ω の Bergman 核 $K(z, \bar{z})$ に対し計量

$ds_K = \sqrt{\pi K(z, \bar{z})} |dz|$ を考える. ds_K の曲率 $K(ds_K)$

は円環の場合でも4より小さい値も大きい値も存在する (単連結領域の場合 $K(ds_K) = -4$). 上記の円環 Δ について

示す. Δ の普遍被覆面を右半平面 Π へ写す. このとき

$$w = \exp\left(\frac{\log z}{2 \log R} \pi i\right), \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

Δ の グリーン関数は Π において

$$g(w, \bar{w}) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \log \left| \frac{w + \bar{w}_v}{w - \bar{w}_v} \right|,$$

と表わされる [9]. $\therefore w_0 = w, \quad \bar{w}_v = e^{-\frac{\pi^2}{2 \log R} v} \bar{w}_{v-1}.$

これから

$$C_p(w) = \frac{1}{2 \operatorname{Re} w} \prod_{v=-\infty}^{\infty} \left| \frac{w - \bar{w}_v}{w + \bar{w}_v} \right|.$$

Π' は添数 0 を除いた積を表わす. 等式 (1) を用いて計算すると,

$$\pi K(w, \bar{w}) = \frac{1}{4(\operatorname{Re} w)^2} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{w}_v'}{(w + \bar{w}_v)^2}.$$

Σ' は 0 を除いた和を表わす. $-R < z < R$ のとき,

$$w = e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad a = e^{-\frac{\pi^2}{2 \log R}} \text{ とおくと}$$

$$\pi K(w, \bar{w}) = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{a^v (1 + a^{2v}) \cos 2\theta + 2a^v}{(1 + 2a^v \cos 2\theta + a^{2v})}$$

さらに Δ の ポアソニカル計量を $p(w) |dw|$ とかけば

$$p(w) = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

p^2 と πK を比較する. $2a^v / (1 + a^{2v})$ は v が ± 1 のとき最大

だから, $\cos 2\theta \leq -2a/(1+a^2)$ となる w については $\pi K(w, \bar{w})$ の2項は負となる. また $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ のときはその項は正. よってそのいずれの場合にも $\pi K \leq p^2$, $\pi K \geq p^2$.

$$H(w) = \log \frac{\pi K(w, \bar{w})}{p^2(w)} \rightarrow 0 \quad (w \rightarrow i\gamma)$$

だから, $H(w)$ は最大値および最小値を Π の内点 w_0 および w_1 でとる. せん等々 $\Delta H \leq 0$, および $\Delta H \geq 0$ だから, 最大値をとる w_0 は

$$-\Delta \log \sqrt{K(w_0, \bar{w}_0)} \geq -\Delta \log p(w_0)$$

$$\pi K(w_0, \bar{w}_0) > p(w_0)^2$$

$$-\Delta \log \sqrt{K(w_0, \bar{w}_0)} > -\frac{\Delta \log p(w_0)}{p(w_0)^2} = -4.$$

同様に w_1 において, $K(ds_K) < -4$.

さらに, O_4 の場合があるが, 種数1の円リーマン面については, $K(ds_K) \equiv 0$ となることが容易にわかる. したがって Bergman 計量 ds_K の曲率 K はリーマン面に沿って上界は0である.

REFERENCES

- [1] Ahlfors, L. V., and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta Math.* 83 (1950), 109-129.
- [2] Bergman, S. The kernel function and conformal mapping. *Math. Surveys* 5, Amer. Math. Soc. Prov. R. I. (1950).
- [3] Burbea, J. The Carathéodory metric in plane domains. *Kōdai Math. Sem. Rep.* 29 (1977), 157-166.
- [4] Sakai, M. Analytic functions with finite Dirichlet integrals. To appear.
- [5] Sario, L., and Oikawa, K. Capacity functions. Springer-Verlag 1969.
- [6] Suita, N. Capacities and kernels on Riemann surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 46 (1972), 212-217.
- [7] _____. On a metric induced by analytic capacity. *Kōdai Math. Sem. Rep.* 25 (1973), 215-218.
- [8] _____. On a metric induced by analytic capacity II. *Ibid.* 27 (1976), 159-162.
- [9] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Maruzen 1959.
- [10] Yamada, A. On the linear transformations of Ahlfors functions. To appear.
- [11] Zarankiewicz, K. Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. *Z. Angew. Math. Mech.* 14 (1934) 97-104.