

超準解析を内蔵する二、三の集合論の紹介

東大 教養 斎藤 正彦

つぎの四つの論文の概略を紹介する：

- [1] E. Nelson : Internal set theory. Bull. Amer. Math. Soc. 83-6 (1977) 1165-1198.
- [2] K. Čuda : A nonstandard set theory. Comm. Math. Univ. Carolinae 17-4 (1976) 647-663.
- [3] K. Hrbacek : Axiomatic foundations for nonstandard analysis. Fund. Math. 98 (1978) 1-19.
- [4] K. Hrbacek : Nonstandard set theory. Preprint.

A. Robinson の超準解析はまず一つの構造を考え、その拡大として拡大モデルまたは飽和モデルを作る。しかし、集合論全部を一挙に超準化するためには、発想を逆転させる方がよい。すなわち、その対象、たとえば N は、はじめから有限自然数と無限大自然数とを両方も、といると考える。上記

の論文はすべてこの立場に立っている。

ZFC に少なくとも一つの一項述語 “standard” を追加し、いくつかの公理圏を要請する。この論文にも共通な三つの公理圏は移行の原理、理想化または共起性の原理および標準化の原理である。

[1] は簡潔で現場向きだが、外集合を直接扱うことはできない。[2] は述語ではなく類定項 K を付加え、 K の元を標準元と呼ぶ。大体 [1] と同じ結果をもたらすし、外集合は K を使って *semiset* として扱える。しかし、公理の形は弱い。

[3] [4] ではもう一つの一項述語 “internal” を追加し、内集合の世界は推移的であるとする。標準世界および内的世界にはもちろん ZFC を要請するが、外的世界すなわち左世界に ZFC を要請すると理論は矛盾する。置換公理を分出公理で置きかえれば、ZFC の保存拡大になる。その他、いろいろの変種が扱われている。

どの論文にも無限小解析、位相空間論、圏論の超準的取扱いが例示してある。

私個人としては、逆転した発想の持つ認識論的、教育論的な意味にも興味がある。

本稿は他人の仕事の紹介だから、証明は一切つけない。

§1 Nelson [1] の紹介

ZF の言語 $\mathcal{L}$ に一項述語 "standard" を付加える. t が項のとき, $t(\text{standard})$ は論理式である.

$$\begin{aligned}\text{略記号 } \forall^s x [\phi(x, \dots)] &\equiv \forall x [x(st) \rightarrow \phi(x, \dots)], \\ \exists^s x [\phi(x, \dots)] &\equiv \exists x [x(st) \wedge \phi(x, \dots)].\end{aligned}$$

定義 standard を含む "論理式を内的論理式, st を含む論理式を外的論理式と言う. 論理式の全体を $\bar{\mathcal{L}}$ とする.

公理 ZFC の公理全部に $\rightarrow$ の $\equiv$ の公理図を付加える.

(T) (移行の公理) 内的論理式 $\phi(x, t_1, \dots, t_k) \equiv \phi(x, \#)$ に対し,

$$\forall^s \# [\forall^s x [\phi(x, \#)] \leftrightarrow \forall x [\phi(x, \#)]].$$

双対性により,

$$\forall^s \# [\exists^s x [\phi(x, \#)] \leftrightarrow \exists x [\phi(x, \#)]].$$

(I) (理想元の存在を是認する公理) 内的論理式 $\phi(x, y, \#)$ に対し,

$$\forall \# [\forall^{sfm} z \exists x \forall y \in z [\phi] \leftrightarrow \exists x \forall^s y [\phi]].$$

(S) (標準化の公理) 必ずしも内的でない論理式、

$\phi(z, \#)$ に対し,

$$\forall \# \forall^{sf} x \exists^s y \forall^s z [z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z, \#)].$$

以上の理論を IST とする。

定理 $\exists F [F(\text{finite}) \wedge \forall y [y(\text{st}) \rightarrow y \in F]]$.

定義 内の論理式 ϕ に対し, ϕ の中の $\forall, \exists$ をそれぞれ $\forall^s, \exists^s$ で置きかえたものを ϕ^s と書き, ϕ の標準世界 $\mathcal{I}$ の相対化と言う。定項を許容するときには, st はそれぞれ standard でなければならぬ。

定理 $\phi \in \mathcal{L}$ に対し, $\phi \leftrightarrow \phi^s$.

定理 $\forall x [x(\text{st}, \text{fin}) \leftrightarrow \forall y [y \in x \rightarrow y(\text{st})]]$.

系 無限集合は超準元をもつ。特に超準自然数 = 無限大自然数が存在する。 IST の中では, 有限自然数と無限大自然数との境目は認識できない。

定理 (関係から標準写像を作ること, 特に写像の延長)
 X, Y を標準集合, $\phi(x, y, \#)$ を論理式とする。このとき,

$$\forall \# \left[\forall^s x \in X \exists^s y \in Y [\phi(x, y, \#)] \rightarrow \right. \\ \left. \exists^s \tilde{y} (\text{map}: X \rightarrow Y) (\forall^s x \in X [\phi(x, \tilde{y}(x), \#)]) \right].$$

これは実用的な定理で, 外的な命題を機械的に内的な命題に書き直すことができる。

例 1 函数 f , 実数 a がともに標準的のとき, « f が a で連続» という命題を考える。

$$\begin{aligned}
& \forall x [x \cong a \rightarrow f(x) \cong f(a)] \\
& \equiv \forall x [\forall^{\delta} \delta \in \mathbb{R}^{++} [|x-a| \leq \delta \rightarrow \forall^{\delta} \varepsilon \in \mathbb{R}^{++} [|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon]]] \\
& \equiv \forall x \forall^{\delta} \varepsilon \exists^{\delta} \delta [|x-a| \leq \delta \rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon] \\
& \equiv \forall^{\delta} \varepsilon \exists^{\delta} f_{im} \exists \delta \forall x \exists \delta \in \mathbb{Z} [\quad " \quad] \\
& \equiv \forall^{\delta} \varepsilon \exists \delta \forall x [\quad " \quad] \\
& \equiv \forall \varepsilon \exists \delta \forall x [\quad " \quad].
\end{aligned}$$

定理 IST は ZFC の conservative extension である.

証明は adequate ultralimit に基づく.

IST は簡潔でよいものである. 確率論のキソ, 強弱大数の原則等が例示してある. 不便な点もあり, external set などは有限自然数の左体は直接には扱えない. Nelson はモデル理論を使っているが, semiset を使ってもよい. [3] では, 外集合も set として扱える.

§2 Čuda [2] の紹介

BG の言語 $\mathcal{L}$ および類の公理, 集合については ZFC の公理を置く. そのほか, class constant K を指定する. K に属する集合を standard とする. 類 X が集合 x に含まれるとき, X を semiset とする. つぎの公理図を追加する.

(EE) elementary equivalence $\equiv$ (T) set formula

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ は $\neq 1$,

$$\forall^S x_1 \dots \forall^S x_n [\phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^S(x_1, \dots, x_n)].$$

(IE) ideal elements $\equiv$ (I)

$$\forall^S x(\text{set}) \exists^{\text{fin}} y [x \cap K \subset y].$$

(NE) natural extension $\equiv$ (S)

$$\forall X \subset K [\exists x [X \subset x] \rightarrow \exists x \in K [X = x \cap K]].$$

注意 (IE) は (I) より弱く, (NE) は (S) より強い. (NE) と (I) とは両立しない.

Čuda の公理から出る結論は, 実質的には Nelson の場合とほとんど同じである. Nelson 流の方が現場数学者に使いやすい形になっている.

§3 Hrbacek [3][4] の紹介

ZF の言語 $\mathcal{L}$ に $\Rightarrow$ の一項述語 *standard*, *internal* を追加する. *internal* ではないものを *non-internal*, 両方合わせて *external* とする. 太文字は *external*, ギリシャ文字は *internal*, ローマ字は *standard* を表す.

$$\text{略記号} \quad \forall^I \xi [\phi(\xi, \dots)] \equiv \forall x [x(\text{int}) \rightarrow \phi(x, \dots)],$$

$$\exists^I \xi [\phi(\xi, \dots)] \equiv \exists x [x(\text{int}) \wedge \phi(x, \dots)].$$

$\phi \in \mathcal{L}$ に対し, 中の $\forall, \exists$ をそれぞれ $\forall^I, \exists^I$ に置きかえたものを ϕ^I と書く. ϕ^S も同様.

この 3 群の公理系を要請する.

(A) ϕ が ZFC の公理ならば, ϕ^S は公理である.

(B1) $\forall x [x(st) \rightarrow x(int)]$.

(B2) $\forall x \forall^I \xi [x \in \xi \rightarrow x(int)]$. したがって, 内集合の全体は推移的である.

(B3) embedding $\equiv (T)$ $\phi \in \mathcal{L}$ に対し,

$$\forall^S x_1, \dots, \forall^S x_n [\phi^I(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^S(x_1, \dots, x_n)].$$

したがって, 内集合の理論は標準集合の理論の elementary extension である.

$$t = (t_1, \dots, t_n)$$

(B4) weak saturation $\equiv (I)$ $\phi(x, b, A, \#) \in \mathcal{L}$ に対し,

$$\begin{aligned} \forall^S \# \forall^S A [\forall^S \text{fin } a \subset A \exists^S b \forall^S x \in a [\phi^S(x, b, A, \#)] \\ \rightarrow \exists^I \beta \forall^S x \in A [\phi^I(x, \beta, A, \#)]]. \end{aligned}$$

定義 external set A が standard size $\exists$ ならば small とは,

$$\exists^S A \exists f (\text{ surjection } = A \rightarrow A).$$

(B4⁺) strong saturation $\phi \in \mathcal{L}$ に対し, ($\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$)

$$\begin{aligned} \forall^I \eta \forall^{\text{small}} A [\forall^{\text{fin}} a \subset A \exists^I \beta \forall^I \xi \in a [\phi^I(\xi, \beta, \eta)] \\ \rightarrow \exists^I \beta \forall^I \xi \in A [\phi^I(\xi, \beta, \eta)]]. \end{aligned}$$

(C0) transfer $\equiv$ (S)

$$\forall A \exists^{\delta} B \forall^{\delta} x [x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

(C1) ~ (C4) は, それぞれ external sets に関する外延性, 非順序性, 和集合, 分岐性である.

以上の公理系 (B4 ではなく B4⁺) をもつ理論を NST と書く.

定理 NST は, それを standard sets に相対化したもの (= ZFC) の conservative extension である.

さらに, external sets に関するいくつかの公理を考える.

(P) power set $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subset x].$

(R) 置換公理 $\phi \in \mathcal{L}$ に対し, $(\vec{u} = (u_1, \dots, u_n))$

$$\forall \vec{u} \forall A \exists B \forall x \in A [\exists y [\phi(x, y, A, \vec{u})] \rightarrow \exists y \in B [\phi]].$$

(C) 選択公理.

(Σ_1 -R) Σ_1 -formula に関する置換公理.

(small R) small sets に関する置換公理. すなわち, (R)

において $\forall, \exists \in \forall^{\text{small}}, \exists^{\text{small}}$ に置きかえたもの.

定理 1) NST(1) = NST + (R) は (ZFC の) conservative extension である.

- 2) $\text{NST}(2) = \text{NST} + (P) + (C)$ は conservative extension.
- 3) $\text{NST} + (\Sigma_1\text{-R}) + (P)$ は inconsistent.
- 4) $\text{NST} + (\Sigma_1\text{-R}) + (C)$ は inconsistent.
- 5) $\text{NST} + (\text{small R}) + (P)$ は non-conservative extension.
- 6) $\models \text{ZFC} + \exists \lambda (\lambda = \text{strongly inaccessible} \ \& \ V_\lambda \models \text{ZFC})$
が consistent なら, $\text{NST}(3) = \text{NST} + (\text{small R}) + (P) + (C)$
も consistent である.

この論文は [1] のように実用的というよりは, むしろ諸理論の間の関係に焦点がある。しかし, 最近の超準数学, 特に Löb, Anderson, Keisler 等の確率論研究では, 外集合が理論の場としてフルに使われている。だから Nelson や Čuda のものよりも自分の理論, 中でも $\text{NST}(2)$ や $\text{NST}(3)$ の方が与えられている, と Hrbacek は書いている。なお, [4] は [3] の解説である。