

追加注文をもつ在庫モデルの最適政策について

大阪府立大学 (Osaka Prefecture University) 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)

大阪府立大学 (Osaka Prefecture University) 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

1. はじめに

これまでに研究されている追加注文を許す在庫問題では、追加発注はその時点における不足分のすべてあるいはその一部に対してバックログするように行われてきた。しかしながら、在庫維持費用が品切れ損失に比べて小さいならば、不足分より多くの量を追加発注することにより費用をさらに削減することができる。

本稿では、追加発注の量に制約がない在庫モデルを提案し、期待費用最小化の下での最適解について探究する。また、考える 3 つの戦略における最適政策の関係についても言及する。

2. モデル

2.1. モデルの説明

単一施設、単一製品における一期間在庫問題を考える。 t を計画期間長とする。商品は期首および与えられた時点 t_0 ($0 \leq t_0 \leq t$) でのみ発注可能である。初期在庫量 x から出発し、期首在庫レベルが S になるように発注され、瞬時に (リードタイム 0 で) 満たされる。計画期間中、需要により在庫レベルが徐々に減少する。もし時点 t_0 で過剰需要が生じていると、量 s を追加発注することができる。 s に制限は無く、追加発注も瞬時に満たされる。期首の発注では単位当たり c_1 の購入費用が課せられ、追加発注では単位当たり c_2 の費用が課せられる。商品は単位当たり価格 r で販売される。また、保持されている在庫には単位時間単位当たりの在庫維持費用 h がかかり、不足分に対しては単位時間単位当たりの品切れ損失費用 p がかかる。 $g(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ 上で定義された $g(0) = 0, g(1) = 1$ なる x の単調増加関数とする。期間のある時点 T までの累積需要量は計画期間の総需要量 b の関数であり、 $g(T/t)b$ と表される。ここに、確率的に変化するの必要量のみであり、 b は確率変数 B の実現値の 1 つである。 $\phi(\cdot)$ を b の確率密度関数とする。 $G(x) = \int_0^x g(y)dy$ とおく。

費用や量に関するパラメータに対して、次のような仮定を与える。

$$\begin{cases} S \geq 0, s \geq 0, b \geq 0 \\ h > 0, p > 0, 0 < c_1 \leq c_2 \leq r \\ (1 - \frac{t_0}{t})p + r - c_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.2. 目的

経営者による戦略の決定が期首に行わなければならないとき、以下の 3 つの戦略における期待総費用による比較について考える必要がある。

- ・ 追加発注をしない None 戦略
- ・ 時刻 t_0 に不足をしているならば s だけ補充する If Shortages 戦略
- ・ 時刻 t_0 に必ず s だけ補充する Always 戦略

本稿では、総費用の最小化という評価基準の下で各戦略における最適発注量および最適追加発注量を求め、3 つの戦略における最適政策の関係について探究する。

3. 定式化

3.1. If Shortages 戦略

2.1節で述べたモデルはIf Shortages戦略である。このモデルでは、需要量 b に対して次のような5つの在庫推移の状態が存在する。

(I) $0 \leq b \leq S$

期首在庫量 S によりすべての需要が満たされる。過少需要のため、末期でも在庫を保持することになる。時点 t_0 での追加発注は行われない。

(II) $S < b \leq S/g(t_0/t)$

時点 t_0 では在庫を所持しているため、追加発注は行われない。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

(III) $b > (S + s)/g(t_0/t)$

時点 t_0 において不足状態にあるため、 s だけ追加発注される。このとき、追加発注量 s は時点 t_0 までの過剰需要の一部をバックログすることになる。

(IV) $\max\{S/g(t_0/t), S + s\} < b \leq (S + s)/g(t_0/t)$

時点 t_0 において不足状態にあるため、 s だけ追加発注される。このとき、時点 t_0 までの過剰需要を完全にバックログし、その上、在庫を保持することになる。しかしながら、その後の需要により末期には再び在庫不足の状態に陥る。

(V) $S/g(t_0/t) < b \leq S + s$

時点 t_0 において不足状態にあるため、 s だけ追加発注される。この追加発注量 s が十分大きいとき、末期までの需要をすべて満たすことになる。

時点 T における在庫量 $Q(T)$ は、(I),(II)のとき、

$$Q(T) = S - g(T/t)b, \quad 0 \leq T \leq t$$

と書け、(III)-(V)のとき、

$$Q(T) = \begin{cases} S - g(T/t)b, & 0 \leq T \leq t_0 \\ S + s - g(T/t)b, & t_0 < T \leq t \end{cases}$$

と書ける。 $C(S, s; b)$ を需要量が b である時の総期待費用、 $C_i(S, s; b), i = 1, \dots, 5$ を各在庫状態に対応する総期待費用とすると、これらは以下のように表される：

$$C(S, s; b) = \begin{cases} C_1(S, s; b), & 0 \leq b \leq S \\ C_2(S, s; b), & S < b \leq S/g(t_0/t) \\ C_3(S, s; b), & b > (S + s)/g(t_0/t) \\ C_4(S, s; b), & \max\{S/g(t_0/t), S + s\} < b \leq (S + s)/g(t_0/t) \\ C_5(S, s; b), & S/g(t_0/t) < b \leq S + s \end{cases}$$

そこで

$$C_1(S, s; b) = [c_1 + h]S - [hG(1) + r]b - c_1x,$$

$$C_2(S, s; b) = [c_1 - p - r]S + (h + p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) - c_1x,$$

$$C_3(S, s; b) = [c_1 - p - r]S + (h + p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) \\ + [c_2 - r - p(1 - t_0/t)]s - c_1x,$$

$$C_4(S, s; b) = [c_1 - p - r]S + (h + p)[S\{g^{-1}(S/b) + g^{-1}((S + s)/b) - t_0/t\} + sg^{-1}((S + s)/b) \\ - b\{G(g^{-1}(S/b)) + G(g^{-1}((S + s)/b)) - G(t_0/t)\}] + pbG(1) - [ht_0/t + p + r - c_2]s \\ - c_1x,$$

$$C_5(S, s; b) = [c_1 - pt_0/t + h(1 - t_0/t)]S + (h + p)[Sg^{-1}(S/b) + b\{G(t_0/t) - G(g^{-1}(S/b))\}] \\ + [h(1 - t_0/t) + c_2]s - [hG(1) + r]b - c_1x$$

総費用 $C(S, s; b)$ の期待値 $E[C(S, s; B)]$ は

$$E[C(S, s; B)] = \begin{cases} E_1[C(S, s; B)], & S + s \leq S/g(t_0/t) \\ E_2[C(S, s; B)], & S + s > S/g(t_0/t) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} E_1[C(S, s; B)] &= \int_0^S C_1(S, s; b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S, s; b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S/g(t_0/t)}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S, s; b)\phi(b)db + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S, s; b)\phi(b)db, \\ E_2[C(S, s; B)] &= \int_0^S C_1(S, s; b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S, s; b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S/g(t_0/t)}^{S+s} C_5(S, s; b)\phi(b)db + \int_{S+s}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S, s; b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S, s; b)\phi(b)db \end{aligned}$$

により計算される。

$E_1[C(S, s; B)], E_2[C(S, s; B)]$ は与えられた S に対して s の連続凸関数である。また、与えられた s に対して S の連続関数であるが、直線 $S = sg(t_0/t)/(1 - g(t_0/t))$ 上の点で微分可能でない。さらに

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} E_1[C(S, s; B)] \right|_{s=0} < 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} E_2[C(S, s; B)] \right|_{s=\infty} > 0$$

を満たす。よって $(0, \infty)$ 上に $\frac{\partial}{\partial s} E[C(S, s; B)] = 0$ を満たす唯一の最適解 s^* が存在し、 $[0, \infty)$ 上に最適解 S^* が存在する。

3.2. None 戦略

時刻 t_0 で追加発注を行わないモデルを None 戦略とよぶ。追加発注を考えていない None 戦略の推移状態は (I) および (II) のみで与えられるので、None 戦略の総費用 $C(S, s; b)$ の期待値 $E[C(S, s; B)]$ は

$$\begin{aligned} E[C(S, s; B)] &= E_3[C(S, s; B)] \\ &= \int_0^S C_1(S, s; b)\phi(b)db + \int_S^{\infty} C_2(S, s; b)\phi(b)db \end{aligned}$$

となる。

$E_3[C(S, s; B)]$ は S の凸関数であり、

$$\left. \frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] \right|_{S=0} < 0, \quad \left. \frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] \right|_{S=\infty} > 0$$

を満たすので、 $(0, \infty)$ 上に $\frac{d}{dS} E[C(S, s; B)] = 0$ を満たす唯一の最適解 S^0 が存在する。

3.3. Always 戦略

時刻 t_0 に必ず追加発注をするモデルを Always 戦略とよぶ。Always 戦略では If Shortages 戦略における状態 (I), (II) の代わりに次のような推移状態が現れる。

(I') $0 \leq b \leq \min\{S/g(t_0/t), S + s\}$

期首在庫量 S および追加発注量 s により需要量 b すべてが満たされる。常に在庫を保持している状況である。

$$(II') \quad S + s < b \leq S/g(t_0/t)$$

時点 t_0 に在庫を保持しているにもかかわらず、追加発注を行う。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

時点 T における在庫量 $Q(T)$ は、(I'), (II') のとき、

$$Q(T) = \begin{cases} S - g(T/t)b, & 0 \leq T \leq t_0 \\ S + s - g(T/t)b, & t_0 < T \leq t \end{cases}$$

と書ける。各在庫状態に対応する総期待費用 $C_i(S, s; b)$, $i = 1', 2'$ は以下のようになる：

$$\begin{aligned} C_{1'}(S, s; b) &= [c_1 + h]S + [h(1 - t_0/t) + c_2]s - [hG(1) + r]b - c_1x, \\ C_{2'}(S, s; b) &= [c_1 - p - r]S + [c_2 - ht_0/t - p - r]s + (h + p)(S + s)g^{-1}((S + s)/b) \\ &\quad + \{pG(1) - (h + p)G(g^{-1}((S + s)/b))\}b - c_1x \end{aligned}$$

このとき、Always 戦略の総費用 $C(S, s; b)$ の期待値 $E[C(S, s; B)]$ は

$$E[C(S, s; B)] = \begin{cases} E_4[C(S, s; B)], & S + s \leq S/g(t_0/t) \\ E_5[C(S, s; B)], & S + s > S/g(t_0/t) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} E_4[C(S, s; B)] &= \int_0^{S+s} C_{1'}(S, s; b)\phi(b)db + \int_{S+s}^{S/g(t_0/t)} C_{2'}(S, s; b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S/g(t_0/t)}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S, s; b)\phi(b)db + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S, s; b)\phi(b)db, \\ E_5[C(S, s; B)] &= \int_0^{S/g(t_0/t)} C_{1'}(S, s; b)\phi(b)db + \int_{S/g(t_0/t)}^{S+s} C_5(S, s; b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S+s}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S, s; b)\phi(b)db + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S, s; b)\phi(b)db \end{aligned}$$

により計算される。

しかしながら、 $E_4[C(S, s; B)] = E_5[C(S, s; B)]$ となり、 $E_4[C(S, s; B)]$, $E_5[C(S, s; B)]$ は与えられた s に対して S の連続凸関数であり、与えられた S に対して s の連続凸関数である。また、

$$\left. \frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \right|_{S=\infty} > 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} E_5[C(S, s; B)] \right|_{s=\infty} > 0$$

を満たす。従って $[0, \infty)$ 上に唯一の最適解 S^1 が存在し、 $[0, \infty)$ 上に唯一の最適解 s^1 が存在する。

4. 解析

4.1. 最適追加発注量の関係

If Shortages 戦略の最適追加発注量 s^* と Always 戦略の最適追加発注量 s^1 の関係について調べる。両戦略において期首発注量 S は与えられた定数として扱う。

If Shortages 戦略は $E_1[C(S, s; B)]$ あるいは $E_2[C(S, s; B)]$ のどちらか 1 つに唯一の最適解 s^* をもつ。

(1) $S + s^* \leq S/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 s^* は $\frac{\partial}{\partial s} E_1[C(S, s; B)] = 0$ を満たす。この値を $E_4[C(S, s; B)]$ の s -偏導関数に代入すると

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} E_4[C(S, s; B)] \right|_{s=s^*} &= [(1-t_0/t)h + c_2] \int_0^{S+s^*} \phi(b)db - [(1-t_0/t)p + r - c_2] \int_{S+s^*}^{S/g(t_0/t)} \phi(b)db \\ &\quad + (h+p) \int_{S+s^*}^{S/g(t_0/t)} \{g^{-1}((S+s^*)/b) - t_0/t\} \phi(b)db \end{aligned}$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} E_4[C(S, s; B)] \right|_{s=s^*} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow s^* < s^1 \\ = 0 & \Rightarrow s^* = s^1 \\ > 0 & \Rightarrow s^* > s^1 \end{cases}$$

(2) $S + s^* > S/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 s^* は $\frac{\partial}{\partial s} E_2[C(S, s; B)] = 0$ を満たす。この値を $E_5[C(S, s; B)]$ の s -偏導関数に代入すると

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} E_5[C(S, s; B)] \right|_{s=s^*} = [(1-t_0/t)h + c_2] \int_0^{S/g(t_0/t)} \phi(b)db \geq 0$$

を得る。従って $s^1 \leq s^*$ が成り立つ。

4.2. 最適発注量の関係

すべての戦略上において追加発注量 s は固定されていると仮定する。

まず、None 戦略の最適発注量 S^0 と Always 戦略の最適発注量 S^1 の関係について調べる。

(1) $S^0 + s \leq S^0/g(t_0/t)$ のとき

None 戦略の最適解 S^0 は $\frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] = 0$ を満たす。この値を $E_4[C(S, s; B)]$ の S -偏導関数に代入すると

$$\left. \frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \right|_{S=S^0} \geq 0$$

を得る。

(2) $S^0 + s > S^0/g(t_0/t)$ のとき

(1) と同様、 $\frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] = 0$ を $E_4[C(S, s; B)]$ の S -偏導関数に代入すると

$$\left. \frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \right|_{S=S^0} \geq 0$$

を得る。(1),(2) より任意の s に対して $S^1 \leq S^0$ が成り立つ。

次に、If Shortages 戦略の最適発注量 S^* と Always 戦略の最適発注量 S^1 の関係について調べる。

(1) $S^* + s \leq S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^* の中に $\frac{\partial}{\partial S} E_1[C(S, s; B)] = 0$ を満たすものが存在するとする。この値を $E_4[C(S, s; B)]$ の S -偏導関数に代入すると

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \right|_{S=S^*} &= r \int_{S^*}^{S^*+s} \phi(b)db + (h+p) \int_{S^*}^{S^*+s} \{1 - g^{-1}(S^*/b)\} \phi(b)db \\ &\quad + (h+p) \int_{S^*+s}^{S^*/g(t_0/t)} \{g^{-1}((S^*+s)/b) - g^{-1}(S^*/b)\} \phi(b)db \end{aligned}$$

$$+ \left\{ (h+p) \int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s)/S^*g(t_0/t))} \{S^* + s - g(x)S^*/g(t_0/t)\} dx \right. \\ \left. - [(1-t_0/t)p + r - c_2]s \right\} \phi(S^*/g(t_0/t)) / g(t_0/t) \quad (1)$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \Big|_{S=S^*} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow S^* < S^1 \\ = 0 & \Rightarrow S^* = S^1 \\ > 0 & \Rightarrow S^* > S^1 \end{cases}$$

もし(1)式の最後の項が非負であると仮定するならば、 $S^1 \leq S^*$ が成り立つ。

(2) $S^* + s > S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^* の中に $\frac{\partial}{\partial S} E_2[C(S, s; B)] = 0$ を満たすものが存在するとする。この値を $E_4[C(S, s; B)]$ の S -偏導関数に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial S} E_4[C(S, s; B)] \Big|_{S=S^*} \geq 0$$

を得る。従って $S^1 \leq S^*$ である。

最後に、If Shortages 戦略の最適発注量 S^* と None 戦略の最適発注量 S^0 の関係について調べる。

(1) $S^* + s \leq S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^* の中に $\frac{\partial}{\partial S} E_1[C(S, s; B)] = 0$ を満たすものが存在するとする。この値を $E_3[C(S, s; B)]$ の導関数に代入すると

$$\frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] \Big|_{S=S^*} = -(h+p) \int_{S^*/g(t_0/t)}^{(S^*+s)/g(t_0/t)} \left\{ g^{-1}((S^*+s)/b) - \frac{t_0}{t} \right\} \phi(b) db \\ + \left\{ (h+p) \int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s)/S^*g(t_0/t))} \{S^* + s - g(x)S^*/g(t_0/t)\} dx \right. \\ \left. - [(1-t_0/t)p + r - c_2]s \right\} \phi(S^*/g(t_0/t)) / g(t_0/t) \quad (2)$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] \Big|_{S=S^*} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow S^* < S^0 \\ = 0 & \Rightarrow S^* = S^0 \\ > 0 & \Rightarrow S^* > S^0 \end{cases}$$

もし(2)式の最後の項が非正であると仮定するならば、 $S^* \leq S^0$ が成り立つ。

(2) $S^* + s > S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^* の中に $\frac{\partial}{\partial S} E_2[C(S, s; B)] = 0$ を満たすものが存在するとする。これを $E_3[C(S, s; B)]$ の導関数に代入すると

$$\frac{d}{dS} E_3[C(S, s; B)] \Big|_{S=S^*} \leq 0$$

を得る。従って $S^* \leq S^0$ が成り立つ。

これらの結果をまとめると次の定理が導かれる。

Theorem. S^0, S^*, S^1 をそれぞれ None 戦略, If Shortages 戦略, Always 戦略における最適発注量、 s^*, s^1 をそれぞれ If Shortages 戦略, Always 戦略における最適追加発注量とする。任意の s^* に対して

$$A(S^*, s^*) = r \int_{S^*}^{S^*+s^*} \phi(b) db + (h+p) \int_{S^*}^{S^*+s^*} \{1 - g^{-1}(S^*/b)\} \phi(b) db$$

$$\begin{aligned}
& + (h+p) \int_{S^*+s^*}^{S^*/g(t_0/t)} \{g^{-1}((S^*+s^*)/b) - g^{-1}(S^*/b)\} \phi(b) db, \\
B(S^*, s^*) &= (h+p) \int_{S^*/g(t_0/t)}^{(S^*+s^*)/g(t_0/t)} \left\{ g^{-1}((S^*+s^*)/b) - \frac{t_0}{t} \right\} \phi(b) db, \\
M(S^*, s^*) &= \{(h+p) \int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s^*)/S^*g(t_0/t))} \{S^*+s^* - g(x)S^*/g(t_0/t)\} dx \\
& - [(1-t_0/t)p + r - c_2] s^*\} \phi(S^*/g(t_0/t)) / g(t_0/t)
\end{aligned}$$

とおく。このとき、以下の関係が成り立つ。

(I) $S^* = 0$ のとき

$$s^1 \leq s^*, \quad 0 = S^* \leq S^1 \leq S^0$$

(II) $S^* \neq 0$ のとき

(1) $S^* + s^* \leq S^*/g(t_0/t)$

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} E_4[C(S, s; B)] \right|_{s=s^*} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow s^* < s^1 \\ = 0 & \Rightarrow s^* = s^1 \\ > 0 & \Rightarrow s^* > s^1 \end{cases}$$

$$(i) M(S^*, s^*) \leq -A(S^*, s^*) \Rightarrow S^* \leq S^1 \leq S^0,$$

$$(ii) -A(S^*, s^*) < M(S^*, s^*) < B(S^*, s^*) \Rightarrow S^1 < S^* < S^0,$$

$$(iii) M(S^*, s^*) \geq B(S^*, s^*) \Rightarrow S^1 \leq S^0 \leq S^*,$$

(2) $S^* + s^* > S^*/g(t_0/t)$ のとき

$$s^1 \leq s^*, \quad S^1 \leq S^* \leq S^0$$

5. まとめ

本稿では制約のない追加発注量をもつモデルを提案し、数学的定式化を行った。考えうる3つの戦略における期待総費用の性質を調べ、それらの最適政策の関係について探究した。結果として If Shortages 戦略における期首発注量以外で一意性が示された。また、3つの戦略における最適発注量および最適追加発注量の大小関係を明確に示すことができた。今後の課題として、期待総費用の関係の探究、多期間問題における探究を残す。

参考文献

- [1] 児玉正憲, 『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会 (1996).
- [2] 徂徠, 有薗, 太田, 返却および追加注文を許す一期間モデルの解法, 日本経営工学会誌, Vol.37, No.2 (1986).
- [3] Arrow K.J., Karlin S. and Scarf H., Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Calif., Stanford University Press (1958).
- [4] Heymand D.P. and Sobel M.J., Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2, Elsevier Science Publishers (1990).
- [5] Hohjo H. and Teraoka Y., On Some Inventory Control Models, Mathematica Japonica, Vol.48, No.1, 43-66 (1998).
- [6] Kabak I.W., Partial Returns in the Single Period Inventory Model, IE News, Vol.19, No.2, (1984).