

Circle packing immersions form regular exhaustible surfaces

東工大 理 田辺正晴 (Masaharu Tanabe)

K. Callahan, B. Rodin "Circle packing immersions
form regular exhaustible surfaces" *Complex Variables*
1993 vol. 21, 171-177 より

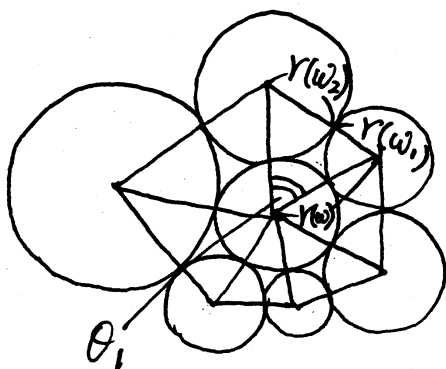
regular hexagonal circle packingからの circle packing
immersion により形成される multisheeted surface が
regularly exhaustible であり, Ahlfors の被覆面の理
論が適用できることを示す。

定義及び定理

hexagonal lattice (HL): $HL = \{m + ne^{i\pi/3}; m, n \in \mathbb{Z}\}$. 原点 0 は of generation 0 . 0 のまわりの 6 つの点
は of generation 1として generation を定義する. n
 > 0 に対して, $6n$ 個の of generation n となる点が存在す
る. 半径 $1/2$ の円で HL の各点を中心に $\mathbb{C}$ -平面をうめれば
regular hexagonal circle packing of the plane
(HCP) が得られる.

radius function: HL から $\mathbb{R}^+$ への function を radius
function とよぶ. $r: HL \rightarrow \mathbb{R}^+$; radius function

angle sum of r at $w \in HL$ を以下のように定義する。
 $w_1, \dots, w_6$ を w の neighbours とする。(1, ..., 6 は反時計回りにとる。) w, w_i, w_{i+1} ($i=1, \dots, 6, w_7 \equiv w$) に対して、半径 $r(w), r(w_i), r(w_{i+1})$ なる 3 つの互いに接する円を考える。 θ_i は 3 つの円の中心を頂点とする、三角形の半径 $r(w)$ の円に属する頂点の角度とする。



$\theta_1 + \dots + \theta_6$ を angle sum of r at $w \in HL$ とよぶ。
radius function of a circle packing immersion : angle sum of $r: HL \rightarrow \mathbb{R}^+$ が $\forall w \in HL$ で 2π のとき r をこうよぶ。

radius function r から、multisheeted surface F を構成できる。 r に従って円を平面におくことにより、互いに接し合う 3 つの円の中心を頂点とする三角形の集合が得られる。これらの三角形は、自明な辺の同一視を除いて、disjoint であるとして、三角形をはり合わせてゆくことにより、 F が得られる。 F を surface formed by the circle packing

immersion γ とよぶ。

Theorem 1. F ; surface formed by a circle packing immersion. F は regularly exhaustible.

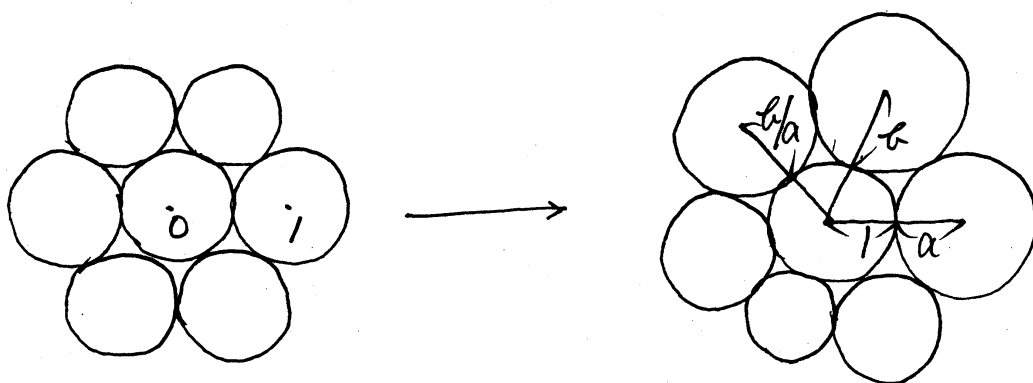
F_n を generation $\leq n$ の円とそのすき間からなる F の subset とし, $A(n)$, $L(n)$ を F_n のそれぞれ面積, boundary の長さ (in spherical metric) とする.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)}{A(n)} = 0.$$

Theorem 2. F の finite な除外値は高々 1 つ.

Peter Doyle による circle packing immersion の例 $\gamma_C(w) = |e^{Cw}|$ for $\forall w \in \mathbb{H}$, where $C \in \mathbb{C}$. $p_0 = \gamma_C(w_0)$ とすると, w_0 の 6 つの neighbours の γ_C の値は反時計まわりに.

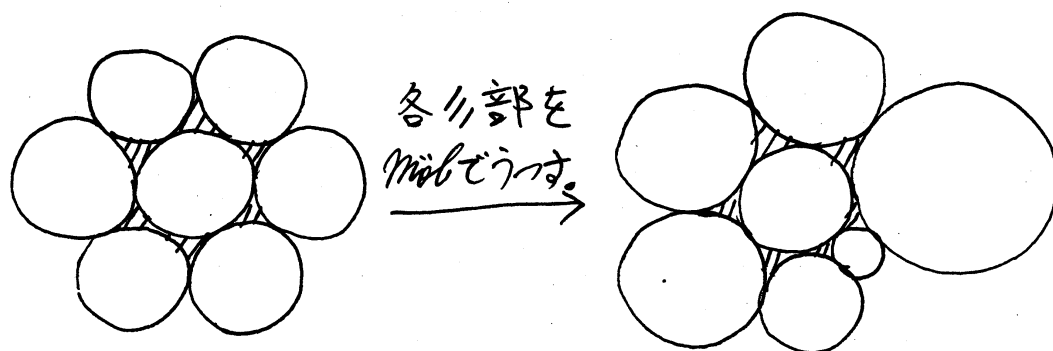
$a p_0, b p_0, (b/a) p_0, (1/a) p_0, (1/b) p_0, (a/b) p_0$
 $(a = |e^C|, b = |e^{C\alpha}|, \alpha = e^{i\pi/3})$. このとき中心の円での angle sum は 2π になっている. 特に $C = 0.1 - 0.4i$ のときは, $w_0 = 0$ とすると, $p_0 = |\gamma_C(0)|$, $a = |e^{0.1-0.4i}| \doteq 1.1$, $b = |e^{C\pi/3}| \doteq 1.5$, $b/a \doteq 1.3$, $1/a \doteq 0.99$, $1/b \doteq 0.67$, $a/b \doteq 0.74$.



Open Question: $r: HL \rightarrow \mathbb{R}^+$; radius function
 for a circle packing immersion. となり合う任意
 の $w, w' \in HL$ に関して. $0 < \delta < r(w)/r(w') < M$
 $< \infty$ なる定数 δ, M が存在するか?

この question が肯定的に解決されれば. $f: \mathbb{C} \rightarrow F$ は
 quasiregular となり. multisheeted image F は
 regularly exhaustible となる。

$f: \mathbb{C} \rightarrow F$ を明確に構成したければ. 以下のようにしても
 よい。HCP の各 circular triangle interstice から
 r により得られる circular triangle interstice への
 Möbius transformation を考える。



このとき、中心の円周上で変換は C -bi-Lipschitz になっていて ($C \in \mathbb{R}^+$) 円の内部への C -g.c. extension 可。こうして、continuous map $f: \mathbb{D} \rightarrow F$ が得られる。

Proof of regularly exhaustibility

$f: \mathbb{D} \rightarrow F$ given. F_n : F の subset で generation $\leq n$ の円とそれらのすき間からなる。 $\{F_n\}$ は $F \rightarrow \hat{\mathbb{D}}$ の exhaustion. $A(n)$, $L(n)$ はそれぞれ F_n の面積, boundary の長さ (in spherical metric) とする。 C_{nj} ($j=1, \dots, 6n$); HCP における generation $n \geq 1$ の $6n$ 個の円とする。 $\tilde{r}_{nj}$; $f(C_{nj})$ の半径の長さ。 $P(n) = \sum_{j=1}^{6n} 2\tilde{r}_{nj}$ と define。このとき半径 $\tilde{r}_{nj}$ の disk の円周の長さは $2\pi \sin \tilde{r}_{nj}$ だ。

$$L(n) \leq \sum_{j=1}^{6n} 2\pi \sin \tilde{r}_{nj} \leq 2\pi \sum_{j=1}^{6n} \tilde{r}_{nj} = \pi P(n) \dots (1)$$

$\tilde{a}_{nj} = 2\pi(1 - \cos \tilde{r}_{nj})$; $f(C_{nj})$ の面積

$$4t^2 \leq 2\pi^2(1 - \cos t) \quad \text{for } 0 \leq t \leq \pi$$

だから、

$$\tilde{r}_{nj}^2 \leq \frac{\pi}{4} \tilde{a}_{nj} \quad (2)$$

$\tilde{\alpha}_n = \sum_{j=1}^{6n} \tilde{a}_{nj}$ とおくと、

$$\tilde{\alpha}_n < A(n) - A(n-1) \quad (3)$$

Schwarz's ineq. より、 $\{\sum_{j=1}^{6n} \tilde{r}_{nj}\}^2 \leq 6n \sum_{j=1}^{6n} \tilde{r}_{nj}^2$ だから、

$$P^2(n) = \{\sum_{j=1}^{6n} 2\tilde{r}_{nj}\}^2 \leq 4 \cdot 6n \sum_{j=1}^{6n} \tilde{r}_{nj}^2 \stackrel{(2)}{\leq} 6\pi n \tilde{\alpha}_n \quad (4)$$

(4)から $\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ は発散することがわかる。

$\{n \geq 1; P(n) < A^{3/4}(n)\}$ は無限コノ元を含む。それは。

$N = \{n \geq 1; P(n) \geq A^{3/4}(n)\}$ とおけば。

$$\sum_{n \in N} \frac{\alpha_n}{P^2(n)} \leq \sum_{n \in N} \frac{A(n) - A(n-1)}{A^{3/2}(n)} \leq \int_{A(0)}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} < \infty$$

であり、 $\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ が発散するためには、 $\{n \geq 1; P(n) < A^{3/4}(n)\}$ が無限コノ元をもたねばならぬからである。

$\{n_i\} = \{n \geq 1; P(n) < A^{3/4}(n)\}$, $n_i \rightarrow \infty$ としよう。
 $A(n) \rightarrow \infty$, $A(n) \rightarrow M < \infty$ as $n \rightarrow \infty$ の2つに場合わけする。
 $A(n) \rightarrow \infty$ のとき: (1)より

$$\frac{L(n_i)}{A(n_i)} \leq \frac{\pi P(n_i)}{A(n_i)} < \frac{\pi A^{3/4}(n_i)}{A(n_i)} \rightarrow 0$$

だから、 F は *regularly exhaustible*。

$A(n) \rightarrow M < \infty$ のとき: (4)より

$$\sum_{n=1}^N \frac{P^2(n)}{6\pi n} \leq \sum_{n=1}^N \alpha_n \leq A(N) \leq M.$$

だから $\inf \{P(n); 1 \leq n\} = 0$ 。 ($= \varepsilon > 0$ ならば、
 左辺 $\geq (\varepsilon^2/6\pi) \sum 1/n$ contradiction.)

(1)より $\inf \{L(n); 1 \leq n < \infty\} = 0$ 。 $L(n_i) \rightarrow 0$ as $n_i \rightarrow \infty$ なるよう $\{n_i\}$ をとれば。

$$\lim \frac{L(n_i)}{A(n_i)} = \frac{0}{M} = 0.$$

$\{F_{n_i}\}_1$ によって、 F は *regularly exhaustible*. $\square$

Thm. 2 は Thm. 1 よりただちに得られる。

Ahlfors の被覆面の理論について

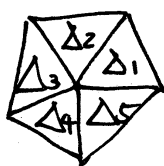
(遠木, 幾何学的函数論 近出版)

集合 Δ が $\mathbb{C}$ -平面上の開三角形に *homeo.* であるとき、 Δ を三角形とよぶ。集合 F が次の条件をみたすような三角形の集合 (Δ) に分割されるとき、 F は三角形分割可能であるといふ。 F を面 (*surface*) という。

i) (Δ) に属する三角形の各辺はちょうど二つの三角形に共通な辺となる。

ii) Δ, Δ' を (Δ) の任意の三角形とすると、 Δ, Δ' は、となり合った三角形の系列で連結できる。

iii) (Δ) の任意の三角形の一つの頂点を共有する三角形は有限個で、これに適当な順序をつけて、 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ であらわすとき、 Δ_i と Δ_{i+1} ($i=1, 2, \dots, n-1$) 及び Δ_n と Δ_1 とがとなり合っている。



F が有限個の三角形からなるとき、 F を 閉じた面 (closed surface) と言い、無限個の三角形からなるとき、開いた面 (open surface) と言う。

集合 F が有限個の三角形に分割できて、境界辺及び境界辺上にある頂点を除いて i) ~ iii) を満すようにできるならば、 F を 有限面 と言う。ただし 境界辺 とは、ただ1つの三角形に属している辺のことである。

三角形分割された二つの有限面 F 及び F_0 において、次の条件 1), 2) をみたす F から F_0 への写像が与えられているとき、 F を F_0 の 被覆面 (covering surface) といい、 F_0 を F の 基礎面 (basic surface) という。

1) F の各三角形 Δ にそれぞれ F_0 の1つの三角形 Δ_0 が位相的に (homeo.) 対応している。

2) F のとなり合った三角形 Δ, Δ' の共通辺には、 Δ, Δ' に対応する F_0 の三角形 Δ_0, Δ'_0 の共通辺が対応する。

開いた被覆面: $F_1, \dots, F_n, \dots$ をそれぞれ基礎面 F_0 の有限な被覆面の系列とし、かつ $F_n \subset F_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) とするとき $F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とすれば、 F^* から F_0 への写像 f^* も定まる。 F^* を F_0 の 開いた被覆面 といい、 $\{F_n\}$ を F^* の exhaustion と言う。

以下、基礎面はリーマン球 $\hat{\mathbb{C}}$, 計量は spherical metric とする。($\hat{\mathbb{C}}$ を unit sphere $S^2: \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ in $\mathbb{R}^3$ と

同一視し. $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\xi^2$ を *metric* とする。))

$F_1, \dots, F_\nu, \dots$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の有限な被覆面, $F_\nu \subset F_{\nu+1}$ とする。このとき各 F_ν に $\hat{\mathbb{C}}$ の *spherical metric* を *lift* することにより, *metric* を導入する。 $\hat{\mathbb{C}}$ の全面積は 4π である。 F_ν の全面積を A_ν であらわす。 $S_\nu = A_\nu / 4\pi$ を F_ν の 平均枚数 とよぶ。 F_ν の相対境界の長さを L_ν であらわす。ある開いた被覆面 F^* において、次をみたすような *exhaustion* $\{F_\nu\}$ が存在するとき、 F^* は regularly exhaustible であるという。

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{L_\nu}{S_\nu} = 0.$$

特に *exhaustion* に属する各面が単連結である場合については、 F^* の性質について多くの結果が得られている。

(Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag 等参照.)