

W. A. Manning の定理について

北大 理 岩崎 史郎

1. 序

1920年代の後半, W. A. Manning は2重可移でない原始置換群に関するいくつかの定理を得たが, ここでは, 次の定理に注目して話をすすめたいと思う.

“2重可移でない原始置換群 (G, Ω) に於て, Ω の1点 α の stabilizer $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ は, Ω 上で $\{\alpha\}$ の他に2つ以上の orbits を持つが, ある orbit (その長さを $\nu > 2$ とする) の上に2重可移に作用すれば, G_α は長さが ν より大きく, $\nu(\nu-1)$ の約数であるような orbit を持つ.” ([5])

この定理は, 1点の stabilizer が2重可移に作用するような orbit を持てば, この orbit にかなり規定されるようなもう一つの orbit があることを言っているので, たとえば, 2重可移群の rank 3 以上の原始拡大を扱うときなど, (しばしば有効である(大袈裟ながら, 因に, 近年発見された単純群の多くは, 既知の単純群の rank 3, 5 の原始拡大として得ら

れる). この定理は, 近年 P. J. Cameron によって, design や graph 的な考えを使って再証明・精密化されたが, ここでは, その簡単な説明・応用と, 1点の stabilizer がある orbit の上に 2重可移に作用していない場合でも, 類似の結果が成り立つことを話したいと思う.

用語の定義

2重可移でない原始置換群を *uniprimitive* 群という.

置換群 (G, Ω) に於て, Ω の部分集合 S に対し,

$$G_S = \{g \in G \mid \forall \alpha \in S, \alpha^g = \alpha\} : S \text{ の pointwise stabilizer.}$$

以下, (G, Ω) を可移置換群とする.

G_α ($\alpha \in \Omega$) の Ω 上での orbits ($\{\alpha\}$ 自身も含めて) の個数 r を (G, Ω) の rank という (G の可移性より, r は α のとり方によらない). r 個の G_α -orbits $\Gamma_0(\alpha) = \{\alpha\}, \Gamma_1(\alpha), \dots, \Gamma_{r-1}(\alpha)$ を G の suborbits, それらの長さを G の subdegrees という ($\forall i, \forall g \in G$ に対し, $\Gamma_i(\alpha)^g = \Gamma_i(\alpha^g)$ となるように $\Gamma_i(\alpha)$ を番号付けることができる). $\Gamma_i(\alpha)$ に対し,

$$\Gamma'_i(\alpha) = \{\alpha^g \mid g \in G, \alpha^{g^{-1}} \in \Gamma_i(\alpha)\}$$

も G_α -orbit で, $\Gamma_i(\alpha)$ の paired orbit という. $\Gamma''_i(\alpha) = \Gamma_i(\alpha)$, $|\Gamma'_i(\alpha)| = |\Gamma_i(\alpha)|$ である. $\Gamma'_i(\alpha) = \Gamma_i(\alpha)$ のとき, $\Gamma_i(\alpha)$ は self-paired という.

Γ_i, Γ_j に対し,

$$(\Gamma_i \circ \Gamma_j)(\alpha) = \{ \beta \in \Omega \mid \beta \neq \alpha, \exists \gamma \in \Omega; \gamma \in \Gamma_i(\alpha), \beta \in \Gamma_j(\gamma) \}$$

(これは, いくつかの G_α -orbits の和集合である)

2. Cameron の定理 (Manning の定理の精密化)

はじめに述べた Manning の定理は, Cameron によって次のように精密化された.

定理 (P. J. Cameron [2], [3])

(G, Ω) : uniprimitive 群

$\alpha \in \Omega$ の stabilizer G_α がある orbit $\Gamma(\alpha)$ 上に $t (\geq 2)$ 重可移作用しており, $|\Gamma(\alpha)| = v > 2$ とすると, 次のことが成り立つ.

(i) $(\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)$ は self-paired な G_α -orbit で, $\beta \in \Gamma(\alpha)$ に対し $|(\Gamma' \circ \Gamma)(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v-1$. $\ell = |(\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)|$ は $v(v-1)$ の約数で $\ell = v(v-1)/k$ とおくと $k \leq (v-1)/2$ 即ち $\ell \geq 2v$.

また, $k = (v-1)/2 \Rightarrow k = 1$ 或 2 .

(ii) $t \geq 3$ ならば

(a) $k = 1$ 或 2 . または

(b) (G, Ω) は rank 3 で, ある正整数 λ があって,

$$|\Omega| = (\lambda+1)^2(\lambda+4)^2, \quad v = (\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+5), \quad k = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

とかける. (このとき, $\lambda = 1$ ならば $|\Omega| = 100$, $G \cong HS$ (Higman-Sims の単純群) 或 $G \cong Aut(HS)$)

(iii) $t \geq 4 \Rightarrow k = 1$ 或 2 .

(iv) $t \geq v-2$ (即ち, $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)} \cong \Gamma(\alpha)$ 上の交代群) ならば

(a) $k = 1$, または

(b) $k = 2$; $v = \text{奇数}$, $|\Omega| = 2^{v-1}$, (G, Ω) は rank $(v+1)/2$ で, G は elementary abelian regular normal subgroup をもつ.

(iv) は 榎本彦衛氏 も独立に得ている)

証明は, $\Delta = \Gamma \circ \Gamma'$ とし, Ω の点 α を 1 つ固定して, $\Gamma(\alpha)$ の元を点, $\Delta(\alpha)$ の元を blocks とし, $\gamma \in \Gamma(\alpha)$ が $\delta \in \Delta(\alpha)$ と incident $\overset{\text{def}}{\iff} \gamma \in \Gamma(\delta)$ なる design をつくって行うようである.

ところで, self-paired でない suborbit をもつ rank 4 の原始置換群で知られているものとして, $G = PSU(3, 3^2)$, $G_\alpha = PSL(3, 2)$ (subdegrees は $1, \overset{\text{paired}}{7}, 7, 21$ で, G_α は長さ 7 の orbit の上に 2 重可移に作用している) がある. この群を特徴づけようとしていくつかの試みがなされているが (今の所, Cameron [4] が最良と思われる), まだ, すっきり

いた形ではできていないようである。

rank 4 の原始置換群 ^{G} で, self-paired でない suborbit がある場合, 次のことがわかっている。

- ① subdegrees が $1, \overset{\text{paired}}{\underset{\text{paired}}{v}}, v, v(v-1)$ なるものはない。
- ② subdegrees が $1, \overset{\text{paired}}{\underset{\text{paired}}{v}}, v, v(v-1)/2 \implies v=7, G_2 \cong \text{PSL}(3,2), G \cong \text{PSU}(3,3^2)$ 。

Cameron の定理 (i), (ii) と上の ①, ② (または Cameron [4]) から直ちに次の結果が得られる。

系 self-paired でない suborbit をもつ rank 4 の原始置換群で, 1 点の stabilizer が non-trivial な 3 つの orbit の少くとも 1 つの上に 3 重可移には作用しているようなものは存在しない。

これは, 坂内 [1] を少し一般化している。

3. Manning の定理と類似な結果

$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ が 2 重可移でなくても, Manning の定理と類似な結果が成り立つ;

命題. (G, Ω) : uniprimitive 群, $\alpha \in \Omega$.

$\Gamma(\alpha) (\neq 1)$: 長さ v の G_α -orbit で,

$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$: rank r (≥ 2) group with subdegrees $1, v_1, \dots, v_{r-1}$
 $(v = 1 + v_1 + \dots + v_{r-1})$.

更に, " $\Gamma(\alpha)$: self-paired" または " $|G_\alpha| = \text{偶数}$ かつ $|G_{\alpha \cup \Gamma(\alpha)}| = \text{奇数}$ " とする.

$\implies \exists v_i$ ($1 \leq i \leq r-1$), $\exists \Delta(\alpha)$: G_α -orbit such that

$\Delta(\alpha)$ は $\Gamma(\alpha)$ と $\Gamma'(\alpha)$ ととも異なり, $\Delta(\alpha) \subseteq (\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)$.

$l = |\Delta(\alpha)| > v_i$ で l は $v v_i$ の約数.

$\beta \in \Gamma(\alpha)$ に対し, $v_i \leq |\Delta(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v_i + (v_i \text{ 以外のいくつかの } v_j \text{ の和}) \leq v-1$. ($\therefore |\Gamma(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v_i \text{ 以外のいくつかの } v_j \text{ の和} \geq 0$)

上の結果は 2 重可移でない群の rank 3 以上の原始拡大を
 考えるとき, いくらか有効である^{*}が, 証明はやさしいし, あまり
 内容はないかもしれない. uniprimitive 群 (G, Ω) に
 於て, 1 つの G_α -orbit $\Gamma(\alpha) = \Gamma_1(\alpha)$ から出発して, 上のよう
 に $\Delta(\alpha) = \Gamma_2(\alpha)$ をつくり, この $\Gamma_2(\alpha)$ から同じように $\Gamma_3(\alpha)$
 を出し, $\dots$ というようにして, はじめの $\Gamma(\alpha)$ にもどらない
 うちに全部の G_α -orbits が出てくるための条件がわかること
 が望ましいが, 今の所筆者には全然わからない. しかし,
 rank 4 の原始置換群 (G, Ω) ですべての G_α -orbits が self-
 paired で $G_\alpha^{\Gamma_1(\alpha)}$ が 2 重可移なら, $\Gamma_1(\alpha)$ から出発して残り

の2つの G_α -orbit が出てくる.

参 考 文 献

- [1] E. Bannai : Primitive extensions of rank 4 of multiply transitive permutation groups, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 19 (1972) 151-154.
- [2] P. J. Cameron : Proofs of some theorems of W. A. Manning, Bull. London Math. Soc. 1 (1969) 349-352
- [3] — : Permutation groups with multiply transitive suborbits, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972) 427-440
- [4] — : Primitive groups with most suborbits doubly transitive, Geometriae Dedicata 1 (1973) 434-446.
- [5] W. A. Manning : A Theorem concerning simply transitive primitive groups, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929) 330-332.

※ たとえば, この命題と, D. G. Higman : Finite permutation groups of rank 3, Math. Z. 86 (1964) に基いて, 榎本彦衛氏が電子計算機を使って作製された rank 3 の置換群の可能性の表等から, 次のような置換群の rank 3 の

原始拡大は存在しない(ここで, 群 G , 部分群 H に対し,
 $(G, H \backslash G)$ は G の H による置換表現を表わすものとする);

- $(M^c, \text{PSU}(4, 3^2) \backslash M^c)$ (M^c は McLaughlin の単純群)
- $(\text{HS}, M_{22} \backslash \text{HS})$ (HS は Higman-Sims の単純群)
- $(\text{PSU}(3, 5^2), A_7 \backslash \text{PSU}(3, 5^2))$
- $(J, \text{PSL}(2, 11) \backslash J)$ (J は位数 175560 の Janko 群)
-
-
-

(はじめの3つは rank 3, あとの1つは rank 5 の原始置換群である.)