

Completely positive maps between the operator algebras and their duals with related topics

新潟大 理 富 山 彦

§0. C^* 環より他の C^* 環の dual への completely positive map の重要性は, Effros-Lance より, nuclearity や semidiscrete の概念の議論の時に示されているが, ここではそれと対になる dual から C^* 環 (主として von Neumann 環) への completely positive map の重要性を示すと共に最近の関連する話題をとりあげる. Effros-Lance の時と同様にそれらはラニッパル種に関係するものである.

§1. M, N を $\mathcal{H}$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上に作用する von Neumann 環とし $M \bar{\otimes} N$ を $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上のラニッパル種とする. このとき各 $\varphi \in M_*$ に対して σ 弱位相で連続な $M \bar{\otimes} N$ より N への右スライズ写像 $R_\varphi : R_\varphi(a \otimes b) = \varphi(a)b$ が定義出来る. 更に $\psi \in N_*$ に対して左スライズ写像 L_ψ とすると, $\varphi \in M_*$ に対して

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle \quad x \in M \bar{\otimes} N$$

の形で一般化された右スライス写像が定義出来る。こゝの写像は元の汎関数が正の時 completely positive になる。又 $M \otimes N$ の元とする。このとき x は M_* (あるいは M^*) より N への写像

$$r(x): \varphi \in M_*(\text{or } M^*) \longrightarrow R_\varphi(x) \in N$$

を定義する。そして $M \otimes N$ の positive を部分はこの写像により決まるように定められる。

定理 1. (Effros) $x \in M \otimes N$ が正であることと $r(x)$ が completely positive map であることは同値である。又 $M \otimes N$ の単位球の中での正の部分、 M_* より N への completely positive map で $0 \leq \tau \leq r(1 \otimes 1)$ (順序も completely positive map の順序) とするものの全体として表現出来る。

上の表現定理は種々写像の構成に適用出来る。即ちたとえば σ と τ は von Neumann 環 M_1, N_1 より M_2, N_2 への写像とするとき $M_1 \otimes N_1$ より $M_2 \otimes N_2$ への写像 ρ で

$$\rho(a \otimes b) = \tau(a) \otimes \sigma(b)$$

となるものの存在が例えば τ, σ が norm 1 の射影写像であるときなどに要求される。一般の有界線型写像の組についてはいえは望めろことであるが上の場合を一般化した completely positive map の class についてはいえ求める結果が得られる。

定理 2. τ, ρ を completely positive map とすると、 $M_1 \otimes N_1$

$M_2 \bar{\otimes} N_2$ への completely positive map ρ が存在して

$$\rho(a \otimes b) = \tau(a) \otimes \sigma(b)$$

又 M_2, N_2 がそれぞれ M_1, N_1 の von Neumann 部分環で τ, σ がそれぞれ射影写像のとき $\rho \in M_2 \bar{\otimes} N_2$ への射影写像になるようにできる。

一般に von Neumann 環 M, N の間の completely positive map (以下 cp-map と略記する) τ は unital な cp-map τ' と N の正の元 h を用いて $\tau(x) = h^{\frac{1}{2}} \tau'(x) h^{\frac{1}{2}}$ とかけるから上の定理より ρ が unital な時に τ は十分である。そこで ρ を決めるようにする。 $x \in M_1 \bar{\otimes} N_1$ の正の元とし $\gamma(x)$ を一般スライス写像を用いて M_1^* まで定義域を延ばしておく。

$$\begin{array}{ccc} M_2^* & \xrightarrow{\gamma(\rho(x))} & N_2 \\ \tau \downarrow & & \uparrow \sigma \\ M_1^* & \xrightarrow{\gamma(x)} & N_1 \end{array}$$

上の diagram において $\gamma(\rho(x))$ とする $M_2 \bar{\otimes} N_2$ の正の元 $\rho(x)$ の存在は定理 1 によるものである。 $M_1 \bar{\otimes} N_1$ の一般の元に対してはあと線形に上の ρ を拡張すれば求める cp-map が得られる (ρ が cp-map であることは証明が必要である)。さて上の ρ を $\tau \otimes \sigma$ とかくことにすると、cp-map の構成にはもう一通り

$\tau \otimes \sigma$ とかくべしなことがあるが

$$\left(N_2 \xrightarrow{\tau \sigma} N_1^* \xrightarrow{\ell(x)} M_1 \xrightarrow{\tau} M_2 \right)$$

この両者は一般には一致しない。

上の結果は今まで知られてゐる積写像についての結果をすべて含んでゐる。例えば τ, σ が σ -双位相で連続であれば

$\tau \otimes \sigma = \tau \otimes \sigma$ も σ -双位相で連続であるし、 C^* 環のテニソル積についての積写像の存在は、それらの C^* 環の $\mathcal{K}$ -双位相向の von Neumann 環のテニソル積について上の定理を適用し、その結果の $\tau \otimes \sigma$ を元の C^* テニソル積に制限すればよい。

定理1の証明並びに定理2に因る議論については [3], [5] に詳細をゆだねる。

§2. A, B を C^* 環とし、 $A \otimes B$ をそれらの C^* テニソル積としたとき $A \otimes B$ の derivation は一般には A, B が derivation の立場から非常によい性質をもつてゐても同じよき性質をもつとは限らない。しかし対象が von Neumann 環になると状況が違ってくる。Akemann-Johnson [1] はそれについて M, N が von Neumann 環の時にはその C^* テニソル積 $M \otimes N$ の derivation が常に inner になるのではないかと conjecture してゐる。それはまた [1] でも特殊な場合を除いてとけてはゐるがその過程で A が可換な C^* 環の時には任意の von Neumann 環 N について

$A \otimes N$ の derivation が inner であることが示されている。この結果は更に一般に次の形に拡張出来る。 Z を N の中心とする。

定理 3. A をその既約表現が有界有限次元であるような unital C^* 環とする。このとき $A \otimes N$ の derivation δ が inner であるための必要十分条件は、 $A \otimes Z$ の derivation $1 \otimes \varepsilon \circ \delta$ が inner になることである。

ここで ε は N より Z への射影、又 $1 \otimes \varepsilon$ は $A \otimes N$ より $A \otimes Z$ への射影である。

上の定理で δ が常に inner であることは望むまいが A を更に制限して n -homogeneous 位にすれば、 $A \otimes N$ の derivation は常に inner になる。 A が 3 種というのはここでは 1 -homogeneous なことである。定理の証明の詳細は [4] にゆだねるが着想の基本は、 $\tilde{A}$ を A の $\mathcal{O}_2$ 共役空間の von Neumann 環としたとき $\tilde{A} \otimes N$ への δ の拡張の生成元 φ で定理 1 で、写像

$$r(\varphi): \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(\varphi) \in N$$

が、 A^* の単位球上で弱*位相 $\rightarrow$ 1 の 4 位相で連続になることがとれるということである。このようにことがとれれば A は

approximation property をみたすから、 λ - 1 の 4 の λ による積 $A \otimes N$ の φ に $R_\varphi(\varphi) = R_\varphi(a)$ ($\varphi \in A^*$) となるような元 a が

存在する。そして $A \otimes N \cong A \otimes N$ が成り立つから a の像として C が実際 $A \otimes N$ に入ることもわかる。ここで von Neumann 環 M については $M \otimes N$ の derivation は常に上の性質をもつような生成元 $C \in M \otimes N$ もつて C が同様の議論で示せるので K_p の上のような連続性が一般に $M \otimes N$ の元が $M \otimes N$ に属するための判定条件をとることであればよいのであるが、これは定理である場合以外には殆んど望むことが Johnson によって最近示された ([2])。それを少し modify した形で次に示すことにする。

§3. n 次元のヒルベルト空間 H_n での基底 $e_{n1}, e_{n2}, \dots, e_{nn}$,
これについての matrix units e_{ij}^n とする。

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^n e_{p1}^n \otimes e_{p1}^n \quad \text{と置く。}$$

定義から C_n は射影 $C_n^* C_n = e_{11}^n \otimes e_{11}^n$ と

$$C_n C_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i,j} e_{ij}^n \otimes e_{ij}^n$$

を結ぶ partial isometry である。 H を無限次元のヒルベルト空間とし、 $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_{2^n}$ と分解すると、 $H \otimes H$ 上で列位相の収束で有界作用素 $C = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2^n}$ が定義出来る。この C が前述の判定条件の反例をとる。即ち $\gamma(C)$ は $L(H)^*$ の単位球上では弱*位相 - ノルム位相で連続であるが C は $L(H) \otimes L(H)$ に属さな

い、それと $\mathcal{L}(H \otimes H)$ には C_n の λ -ノルムを求めると (作用素ノルムノルム) H_n の単位ベクトル z_i によって

$$\begin{aligned} \|C_n\|_\lambda &= \sup_{z_i} |(C_n(z_1 \otimes z_2), z_3 \otimes z_4)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{z_i} \left| \sum_p (z_1, z_{np})(z_{np}, z_3)(z_2, z_{np})(z_{np}, z_4) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{z_i} \left| \left(\sum_p y_{np} z_{np}, z_3 \right) \right| \quad y_{np} = (z_2, z_{np})(z_{np}, z_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{z_i} \left\| \sum_p y_{np} z_{np} \right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

そこで $\mathcal{L}(H \otimes H)$ の元 x によって λ -ノルムに於けるノルム $N(x)$ を H の単位ベクトルの組 $\{z_i\}$ によっての上限として

$$N(x) = \sup |(x(z_1 \otimes z_2), z_3 \otimes z_4)|$$

と定義する。定義から $N(x)$ は弱位相によって下平連続である。

ゆえに

$$N\left(\sum_{n=k}^{\infty} C_{2^n}\right) \leq \liminf_l N\left(\sum_{n=k}^l C_{2^n}\right) \leq \lim_l \sum_{n=k}^l N(C_{2^n}) = \sum_{n=k}^{\infty} N(C_{2^n})$$

から C は $\mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(H)$ に属すると言えてよい。従って

$r(C)$ は連続条件をみたしている。この C が $\mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(H)$ に入る

らしいことの判定には次のことを用いる。

Lemma 4. $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ を H の直交する単位ベクトルとする。

このとき s -次元の H の部分空間 E によって

$$\sum_{i=1}^s \text{dist}(\gamma_i, E)^2 \geq s - t$$

これは直接計算で示しかつたが、これがこれから任意の元

$T = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i$ として、 $(p_n \in H \text{ かつ } H_{2^n} \text{ への射影として})$

$$\begin{aligned}
 \|C - T\|^2 &\geq \|p_n \otimes p_n (C - T)(\xi_{n1} \otimes \xi_{n1})\|^2 \\
 &= \left\| \sum_p (\sqrt{2}^{-n} \xi_{np} - \sum_i (b_i \xi_{ni}, \xi_{np}) p_n a_i \xi_{ni}) \otimes \xi_{np} \right\|^2 \\
 &= \sum_p \left\| \sqrt{2}^{-n} \xi_{np} - \sum_i (b_i \xi_{ni}, \xi_{np}) p_n a_i \xi_{ni} \right\|^2 \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_p \text{dist}(\xi_{np}, E_n)^2 \\
 &\geq \frac{1}{2^n} (2^n - \ell) = 1 - \frac{\ell}{2^n} \quad \forall n
 \end{aligned}$$

(ただし E_n は ℓ 個のベクトル $p_n a_i \xi_{ni}$ で張られる部分空間) したがって C は $L(H) \otimes L(H)$ に属さない。 又上式中 ξ_{np} は $\xi_{2^n p}$ の略記である。

上の計算からわかるようにこのように C は無限次元の von Neumann 環 M, N について $M \otimes N$ の中に常に構成出来る。 さてこの C が $L(H) \otimes L(H)$ の derivation を引き起せば Ahemann-Johnson の conjecture も成立するわけであるが、 C はこのような derivation を引き起さない。 それは q_n を $\xi_{n2}, \xi_{n3}, \dots, \xi_{n2^n}$ で張られる空間への射影, $q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ として

$$(1 \otimes q_n)C = C(1 \otimes q_n)$$

を考えると C の時と殆んど同じ計算でこれが $L(H) \otimes L(H)$ に入らなことが示せるからである。

文献

- [1] C. A. Akemann & B. E. Johnson, Derivations of non-separable C^* -algebras, Journal of Functional Analysis, 33(1979), 311-331
- [2] B. E. Johnson, The failure of the slice map criterion, preprint
- [3] M. Nagisa & J. Tomiyama, Completely positive maps in the tensor product of von Neumann algebras, Journal of Math. Soc. Japan 12掲載予定
- [4] J. Tomiyama, Inner derivations in the tensor products of operator algebras, Tôhoku Math. J. 32(1980), 91-97
- [5] J. Tomiyama, Complete positivity in operator algebras, 京大数理研レクチャーノート No 4