

$U(n)/T^n$ 上の S^1 作用による不動点集合について

岡山大 理 外間 研二

河野 進

1. $G=S^1$ (circle group) とし, X を G 作用をもったパラコンパクト空間とする。 X とその不動点集合 F との関係をみる為に次に定義する同変コホモロジーを用いる。

$E_G \longrightarrow B_G$ を普遍主 G 束とし, その同伴束

$$X \times_G E_G \xrightarrow{\pi} B_G$$

の全空間を X_G で表す。このとき, X の Λ 係数の同変コホモロジー環を

$$H_G^*(X; \Lambda) = H^*(X_G; \Lambda)$$

で定義する ($\Lambda = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$)。 $H_G^*(X; \Lambda)$ は π^* を通して $H^*(B_G; \Lambda) = \Lambda[t]$ 加群となる。

注意. i) 精確には $E_G^N \longrightarrow B_G^N$ を N 普遍 G 束として

$$H_G^n(X; \Lambda) = \varprojlim_N H^n(X \times_G E_G^N; \Lambda)$$

で定義する。

ii) Alexander-Spanier, Čech または Sheaf コホモロジー

を用いる。

完全列

$$(1.1) \quad \cdots \rightarrow H_G^i(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\phi^*} H_G^i(F; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_G^{i+1}(X, F; \mathbb{Q}) \rightarrow \cdots$$

に於いて, Vietoris-Beagle mapping theorem によって自然な同型

$$H_G^{i+1}(X, F; \mathbb{Q}) \cong H^{i+1}(X/G, F; \mathbb{Q})$$

が存在するから, X が適当な条件 (例えば X の被覆次元が有限) を満たすとき, 十分大きな i に對して, $H_G^{i+1}(X, F; \mathbb{Q}) = 0$ となる。このとき, (1.1) を $\mathbb{Q}[t]$ の素イデアル $\{0\}$ で局所化することによって, 次の同型が得られる。

$$(1.2) \quad (\phi^*)_{\{0\}} : H_G^*(X; \mathbb{Q}) \cong H_G^*(F; \mathbb{Q})_{\{0\}}$$

$F_G = F \times B_G$ であるから $H_G^*(F; \mathbb{Q})_{\{0\}}$ は $H^*(F) \otimes \mathbb{Q}(t)$ ($\mathbb{Q}(t)$ は $\mathbb{Q}$ 上の有理函数体) と同型である。次の補題は, $\dim_{\mathbb{Q}} H^*(F) < \infty$ のとき, $H^*(F; \mathbb{Q})$ が (次数つきでない) 環として, $H_G^*(X; \mathbb{Q})$ により一意的に決定されることを示している。

補題 1.3. A, B を $\mathbb{Q}$ 上の有限次元多元環とする。このとき,

$$A \otimes_{\mathbb{Q}(t)} B \otimes_{\mathbb{Q}(t)} \mathbb{Q}(t) \iff A \cong_{\mathbb{Q}} B$$

証明. $\Leftarrow$ は明らかである。 $\Rightarrow$ を示す為に $\phi : A \otimes_{\mathbb{Q}(t)} B \otimes_{\mathbb{Q}(t)} \mathbb{Q}(t) \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}(t)} \mathbb{Q}(t)$ を $\mathbb{Q}(t)$ 上の多元環としての同型とする。 $\{x_1, \dots, x_r\}$ を A の $\mathbb{Q}$ 上の基とすると, $\{x_1 \otimes 1, \dots, x_r \otimes 1\}$ は $A \otimes_{\mathbb{Q}(t)} \mathbb{Q}(t)$

の $Q(t)$ 上の基である。 $\{y_1, \dots, y_r\}$ を B の Q 上の基とする。
 仮定より, $r = l$ 。 $(a_{ij}(t)) \in GL(l, Q(t))$, c_{ij}^k, D_{ij}^k
 $\in Q$ とし,

$$\phi(x_i \otimes 1) = \sum_{j=1}^l y_j \otimes a_{ij}(t)$$

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^l c_{ij}^k x_k$$

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^l D_{ij}^k y_k$$

とする。このとき ϕ は準同型写像だから,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq l} a_{ik}(t) a_{jk}(t) D_{ij}^m = \sum_{k=1}^l c_{ij}^k a_{km}(t)$$

が成立する ($1 \leq i, j, m \leq l$)。 $t_0 \in Q$ で $(a_{ij}(t_0)) \in GL(l, Q)$
 を満たすものが存在する。この t_0 について, $\phi_0: A \rightarrow B$ を

$$\phi_0(x_i) = \sum_{j=1}^l a_{ij}(t_0) y_j$$

で定義すれば, ϕ_0 は Q 上の線型空間としての同型であり,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq l} a_{ik}(t_0) a_{jk}(t_0) D_{ij}^m = \sum_{k=1}^l c_{ij}^k a_{km}(t_0)$$

($1 \leq i, j, m \leq l$) が成立するから, 環としての同型でもある。

2. G 空間 X のコホモロジー環が次数 2 の元で生成される
 場合 $H^*(F; Q)$ は $H_q^*(X; Q)$ により次数つき環として一意的に
 決定される。簡単の為, 以下 X は閉多様体とし, $A = \mathbb{Z}$ また
 は $A = Q$ とし,

$$(2.1) \quad H^*(X; A) \cong A[x_1, \dots, x_n] / (k_1, \dots, k_m)$$

が成立するものとする。ここに $\deg x_i = 2$ で, k_i は $x_1, \dots,$

α_n に関する斉次多項式である。このとき、 $\pi: X_G \rightarrow B_G$ のスペクトル系列は退化するから、 $i: X \hookrightarrow X_G$ として、

$$i^*: H_G^*(X; \Lambda) \longrightarrow H^*(X; \Lambda)$$

は全射である。 $\alpha_i \in H_G^2(X; \Lambda)$ を $i^*(\alpha_i) = \alpha_i$ を満たす元とする ($i=1, \dots, n$)。このとき、同型

$$(2, 2) \quad H_G^*(X; \Lambda) \cong \Lambda[t, x_1, \dots, x_n] / J$$

が成り立つ。ここに

$$J = (k_1(x_1, \dots, x_n) - t f_1, \dots, k_m(x_1, \dots, x_n) - t f_m)$$

で、 $f_i \in \Lambda[t, x_1, \dots, x_n]$ は $\deg f_i = \deg k_i - 1$ を満たす斉次多項式である。

$F_1, \dots, F_k$ を X の不動点集合 F の連結成分とする。 $H_G^*(X; \mathbb{Q})$ は自由 $H^*(B_G; \mathbb{Q})$ 加群であるから、(1, 2) より、

$$\phi^*: H_G^*(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_G^*(F; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^k H^*(F_j; \mathbb{Q}) \otimes H^*(B_G; \mathbb{Q})$$

は単射であり、十分高い次数で全射でもある。各 $i=1, \dots, n$ について

$$\phi^*(\alpha_i) = \sum_{j=1}^k (b_{ij} + c_{ij}t), \quad b_{ij} \in H^2(F_j; \mathbb{Q}), \quad c_{ij} \in \mathbb{Q}$$

とおく。 ϕ^* が十分高い次数で全射であることから、次の(1), (2) が得られる。

(1) $H^*(F_j; \mathbb{Q})$ は $b_{1j}, \dots, b_{nj}$ で生成される。

(2) もしもならば $(c_{1j}, \dots, c_{nj}) \neq (c_{1\ell}, \dots, c_{n\ell})$ 。

$I_j \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ を、すべての $j \in J$ について

$$f(t, x_1 + c_{1j}t, \dots, x_n + c_{nj}t)$$

の t の係数全体で生成されるイデアルとし,

$$\mathfrak{f}_j \subset \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n]$$

を $g \in \mathfrak{f}_j$ が $g(t, x_1 + c_{1j}t, \dots, x_n + c_{nj}t) \in I_j[t]$ と同値であるようなイデアルとする。

定理 2.3. i) $H^*(F_j; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/I_j$

ii) $J = \bigcap_{j=1}^k \mathfrak{f}_j$ (準素分解)

ここに $\sqrt{\mathfrak{f}_j} = (x_1 - c_{1j}t, \dots, x_n - c_{nj}t)$ 。

証明 i) 準同型写像

$$k: \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow H^*(F_j; \mathbb{Q})$$

を $k(x_i) = b_{ci}$ ($i=1, \dots, n$) によって定義する。(1)より, k は全射だから, $\text{Ker}(k) = I_j$ を示せばよい。 I_j の定義より $\text{Ker}(k) \supset I_j$ は明らかである。 $f \in \text{Ker}(k)$ とする。(2)より, 各 $i \neq j$ に対して, 自然数 $\lambda(i)$ で $c_{i\omega} \neq c_{i\omega_j}$ をみたすものが存在する。 N を十分大きな自然数とし,

$$g = f(x_1 - c_{1j}t, \dots, x_n - c_{nj}t) \prod_{i \neq j} (x_{i\omega} - c_{i\omega}t)^N$$

とおく。 $\phi^*(g(t, x_1, \dots, x_n)) = 0$ より $g \in J$ 。また,

$$g(t, x_1 + c_{1j}t, \dots, x_n + c_{nj}t)$$

の t に関する最高次の係数は, f の 0 でない定数係数だから $f \in I_j$ 。従って $\text{Ker}(k) \subset I_j$ 。

ii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/I_j = \dim_{\mathbb{Q}} H^*(F_j; \mathbb{Q}) < \infty$ より $\sqrt{I_j}$

$= (x_1, \dots, x_n)$ であり, I_j は素イデアルである。従って $I_j[t]$ も素イデアルであり, $\sqrt{I_j[t]} = (x_1, \dots, x_n)$ 。定義より, q_j も素イデアルであり,

$$\sqrt{q_j} = (x_1 - c_{1j}t, \dots, x_n - c_{nj}t)$$

が得られる。 ϕ は単射だから, $J = \bigcap_{j=1}^k q_j$ は明らか。(終)

ii) より, 等式

$$\sqrt{J} = \sqrt{\bigcap_{j=1}^k q_j} = \bigcap_{j=1}^k \sqrt{q_j} = \bigcap_{j=1}^k (x_1 - c_{1j}t, \dots, x_n - c_{nj}t)$$

が成り立つから, (2) より, 斉次イデアル J の射影的多様体は, 相異なる点 $(1, c_{11}, \dots, c_{n1}), \dots, (1, c_{1k}, \dots, c_{nk})$ より成ることが分かる。従って

$$(1, c_{1j}, \dots, c_{nj}) \longleftrightarrow F_j$$

により J の零点と F の連結成分は 1 対 1 に対応することが分かる。これと i) より, J (従って $H^*(X; \mathbb{Q})$) が与えられれば I_j ($j=1, \dots, k$) (従って $H^*(F; \mathbb{Q})$) が決定されることが分かる。従って, F のコホモロジー環の満たすべき条件は, J に対する条件に還元される。

3. $A = (p_1, \dots, p_n) \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ を, 斉次イデアルで, $\sqrt{A} = (x_1, \dots, x_n)$ を満たすものとする。

$$f_i \in \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n]$$

を $\deg f_i = \deg p_i - 1$ を満たす斉次多項式とし ($i=1, \dots, n$),

$$J = (k_1 - t f_1, \dots, k_n - t f_n)$$

とおく。このとき J の零点の個数は、高々 $\prod_{i=1}^n \deg f_i$ である。

$\xi^{(j)} = (1, \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)})$ ($j=1, \dots, k$) を、 J の零点とする。

$\xi_i^{(j)} \in \mathbb{Q}$ ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, k$) を仮定する。斉次イデアル $I_j \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, $f_j \in \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n]$ を、 c_{ij} の代りに $\xi_i^{(j)}$

を用いて、2節に於けるのと同様に定義し、

$$m_j = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] / I_j$$

とおく。 n 個の斉次多項式 $k_1 - t f_1, \dots, k_n - t f_n$ の u -級結式 $R(u)$ は、次の様に分解される。

$$R(u) = C \cdot \prod_{j=1}^k (u + \xi_1^{(j)} u_1 + \dots + \xi_n^{(j)} u_n)^{p_j}$$

ここに $u, u_1, \dots, u_n$ は不定元、 C は定数、 p_j は $\xi^{(j)}$ の重複度である。このとき、 J は純イデアルだから、準素分解

$$J = \bigcap_{j=1}^k \bar{q}_j$$

で $\sqrt{\bar{q}_j} = (x_1 - c_{1j}t, \dots, x_n - c_{nj}t)$ をみたすものが存在し、

$$p_j = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] / \alpha_{\bar{q}_j}$$

が成り立つ。ここに

$$\alpha: \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

は $f \in \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n]$ について

$$\alpha f = f(1, x_1, \dots, x_n)$$

で定義される準同型写像である。このことから、次の定理は容易に示される。

定理 3.1. 次の i) ~ iv) は同値である.

$$i) \sum_{j=1}^k m_j = \prod_{i=1}^n \deg p_i.$$

$$ii) J = \bigcap_{j=1}^k q_j \quad (\text{準素分解})$$

$$iii) m_j = \rho_j \quad (j=1, \dots, k)$$

iv) 準同型写像

$$\phi: \mathbb{Q}[t, x_1, \dots, x_n]/J \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/I_j \otimes \mathbb{Q}[t]$$

を $\phi(x_i) = \bigoplus_{j=1}^k (x_i + \xi_{i,j}^{(j)} t) \quad (i=1, \dots, n)$ で定義すれば, ϕ は単射であり, 十分高い次数で全射である.

(2.3), (3.1) より

定理 3.2. X を G 作用をもった閉多様体とし, (2.1) を $m=n$ に対して満たすものとする. このとき, J を 2 節で定義したイデアルとすると, J の零点と不動点集合下の連結成分との間の 1 対 1 対応で, 零点の重複度が, 対応する連結成分のコホモロジー環の $\mathbb{Q}$ 上の次元に一致する様なものが存在する.

4. ここでは, X は (2.1) を $\Lambda = \mathbb{Z}$ に対して満たすものとする. $B_G = K(\mathbb{Z}/2)$ より, 連続写像 $\mu: X \longrightarrow (B_G)^n$ で

$$\mu^*(1 \times \dots \times 1 \times t \times 1 \times \dots \times 1) = \alpha_i \quad (i=1, \dots, n)$$

を満たすものが存在する. $\nu: E \longrightarrow X$ を $(B_G)^n$ 上の普遍 T^n 束の誘導束とする. $\pi: G \times E \longrightarrow E$ を X 上の G 作用の bundle lifting とする. 各 $g \in \text{Gal}(\mathbb{F}_2)$, $s \in G$ に対して $t \in T^n$ で

$$\pi(s, g) = gt$$

を満たすものが存在する。このとき、対応 $s \rightarrow t$ により、 $\mathbb{C}$ 連続準同型写像 $\kappa_j: G \rightarrow T^n$ が定義される。これは g の取り方に依存しない。 $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ を、すべての $s \in G$ に対して

$$\kappa_j(s) = (s^{a_{1j}}, \dots, s^{a_{nj}})$$

を満たすものとする。 $\mathbb{C}$ 上の T^n 作用を $t = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $t \cdot z = t_i z$ を満たすものとして定義し、

$$\kappa_i: EX_{T^n} \mathbb{C} \rightarrow X$$

を $\kappa: E \rightarrow X$ の同伴束とする。また、

$$\xi_i: EX_G E_G / T^n \rightarrow X \times_G E_G$$

を $EX_G E_G \rightarrow X \times_G E_G$ の同伴束とする。 κ の定義より、 α_i は κ_i の Euler 類であり、 $\alpha_i \in H_G^2(X; \mathbb{Q})$ を ξ_i の Euler 類とすると $\kappa_i = i^*(\xi_i)$ より

$$i^*(\alpha_i) = \alpha_i$$

が満たされる。 τ を B_G 上の標準直線束とすると

$$k_1: F_j \times B_G \rightarrow B_G$$

$$k_2: F_j \times B_G \rightarrow F_j$$

を、それぞれ π_1, π_2 成分への射影として束同型

$$\xi_i|_{F_j \times B_G} = k_1^*(\tau^{a_{ij}}) \otimes k_2^*(\kappa_i|_{F_j})$$

が存在する。従って、

$$\phi^*(x_i) = \sum_{j=1}^k (bx_j + a_{ij}t)$$

が成立する。(2,3)より次の定理が得られた。

定理 4.1. $\mathcal{J}$ の零点は $(1, a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, (1, a_{1k}, \dots, a_{nk})$ である。

上のベクトル $A_1, \dots, A_k$ は差を除いて一意に定まる。即ち,

$$\Phi': G \times E \longrightarrow E$$

を他の bundle lifting とし, 対応する座標を $A'_1, \dots, A'_k$ とおけば, 整数 $b_1, \dots, b_n$ が存在して

$$A'_j = A_j + (b_1, \dots, b_n) \quad (j=1, \dots, k)$$

が成り立つ。

5. $U(n)$ を n 次のユニタリ-群, $T^n \subset U(n)$ を極大トーラスとし, $X = U(n)/T^n$ とおく。 $\pi: U(n) \longrightarrow X$ を等化写像とし

$$\pi_i: U(n) \times_{T^n} \mathbb{C} \longrightarrow X$$

を4節と同様に定義する。このとき,

$$H^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] / (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

ここに α_i は π_i の Euler 類で, $\sigma_i = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は i 次の基本対称式である。

$a_1, \dots, a_n$ を整数とし, 準同型 $\rho: G \longrightarrow T^n$ をすべての $s \in G$ について

$$\rho(s) = (s^{a_1}, \dots, s^{a_n})$$

で定義する。 G 作用 重: $G \times U(n) \longrightarrow U(n)$ を, $s \in G$ と $g \in U(n)$ について,

$$\text{重}(s, g) = \kappa(s)g$$

で定義する。重は X 上の G 作用 $\psi: G \times X \longrightarrow X$ を誘導する。即ち重は ψ の *bundle lifting* である

$$\xi_i: U(n) \times_G E_G \times \mathbb{C}/T^n \longrightarrow X \times_G E_G$$

を 4 節で定義した複素直線束とする。このとき束同型

$$\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n = \pi^*(\tau^{a_1} \oplus \cdots \oplus \tau^{a_n})$$

が成り立つ。 c_i は対応するベクトル束の i 次の Chern 数を表すものとする

$$\sigma_i(x_1, \dots, x_n) = t^i \sigma_i(a_1, \dots, a_n)$$

が成り立つ。(2.2) より

$$H_G^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t, x_1, \dots, x_n]/J$$

$$J = (\sigma_1 - t \sigma_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \sigma_n - t^n \sigma_n(a_1, \dots, a_n))$$

特に $a_1, \dots, a_n$ は

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n_1} < a_{n_1+1} = \cdots = a_{n_1+n_2} < \cdots$$

$$< a_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1} = \cdots = a_n \quad (n_1 + \cdots + n_m = n)$$

を満たすものとする。このとき, ψ の不動点集合の各連結成分は $U(n_1)/T^{n_1} \times \cdots \times U(n_m)/T^{n_m}$ に同相であり, 連結成分の個数は $n!/(n_1! \times \cdots \times n_m!)$ に等しいことが分かる。

次に, 3 節で得られた結果を用いて, 特に $X = U(3)/T^3$ の

場合に $H^*(F; \mathbb{Q})$ の可能性について調べてみよう。この場合、
 $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}[t, x_1, x_2, x_3]$ を、それぞれ次数 0, 1, 2 の斉次元
 として

$$J = (x_1 + x_2 + x_3 - tf_1, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - tf_2, x_1x_2x_3 - tf_3)$$

とおける。J は $(1, 0, 0, 0)$ を零点とすると仮定しても一般性
 をうしない。従って、適当に変型すれば

$$J = (g_1, g_2, g_3)$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$g_2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - t(a x_1 + b x_2)$$

$$g_3 = x_1^3 - t(a x_1^2 + b x_1x_2 + t(c x_1 + d x_2))$$

とおける。ここには $a, b, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。(2, 3) より g_1, g_2, g_3
 の共通零点を $(1, a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}), \dots, (1, a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$ とす
 れば、 $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ ($i=1, 2, 3; j=1, \dots, k$) と仮定することが
 できるから、 $(1, 0, 0, 0)$ に対応する F の連結成分 F_j につい
 て次のいずれかが満たされることが分かる。

$$i) F_j \sim_{\mathbb{Q}} \text{pt}$$

$$ii) F_j \sim_{\mathbb{Q}} S^2$$

$$iii) F_j \sim_{\mathbb{Q}} X$$

ここに $X \sim_{\mathbb{Q}} Y$ は $H^*(X; \mathbb{Q})$ と $H^*(Y; \mathbb{Q})$ が同型であることを
 意味する。

従って (3, 1) より次の定理が従う。

定理 5.1. $U(3)/T^3$ 上の自明でない G 作用について, 次の何れかが成り立つ.

$$\text{i)} \quad F \sim_Q S^2 + S^2 + S^2 \quad (\text{直和})$$

$$\text{ii)} \quad F \sim_Q S^2 + S^2 + 2\mu$$

$$\text{iii)} \quad F \sim_Q S^2 + 4\mu$$

$$\text{iv)} \quad F \sim_Q 6\mu$$