

協力的搜索ゲームに関する一提案

防衛大学校・情報工学科 宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

搜索理論は第2次大戦における軍事研究を起源にもつ。搜索問題へのゲーム理論の応用研究は、オペレーションズ・リサーチのバイブルとも言える Morse and Kimball の本 [4] の中ですでに触れられている。それは、潜水艦の海峡通峡を阻止するため、浮上地点に関する潜水艦の意思決定を考慮して航空機による哨戒線を設定しようとする問題である。その後、搜索ゲームは1980年から90年代にかけて盛んに研究されているが、これまでの研究 [1, 5, 6, 2] で取り扱われてきたモデルは主として敵対する目標と搜索者との間の2人非協力ゲームであり、支払にはゼロ和の仮定がなされていた。しかし、軍事問題に限らず一般の搜索ゲームにおいても、プレイヤー間で協力関係が生じる状況があり得る。例えば、ある目標の発見とそれに付随する利益の取得を複数の搜索者が期待する場合には、搜索者間での協力が生じ得る。搜索救難における遭難者と搜索者のように、搜索機を見つけた遭難者による遭難信号の発信や信号弾の発射など、搜索者による発見を手助けしようとする行為は目標と搜索者の間に協力関係が存在する例である。

上記のような搜索問題での提携による特性関数は、通常の提携型ゲームにおけるものとは異なる。複数の搜索者が提携して行う搜索活動では、将来における確実な利益獲得を保証しない場合が多い。このような例では搜索目標発見前に提携契約が結ばれ、発見した場合の分配方法に関する約束がなされるであろう。一般的な提携形ゲームで仮定されるような確定的な利益の取得が望めない状況で、不確定な要素を考慮しなければならない分配法が要求されるのが搜索ゲームの特徴である。

このような協力搜索ゲーム特有の事情を明確にしつつ、次の節ではまず、ある1つの目標発見を目指す複数搜索者間での提携の可能性から議論を始める。そこでは、複数搜索者間での提携による利益をかれらの探知確率と関係付け、擬特性関数と呼ぶ量を定義する。さらに、この擬特性関数に対する配分 (imputation) を基に、搜索対象物が発見されその価値が獲得された場合の提携者間での分配比率を決める公式を提案する。3節では、この擬特性関数を、搜索での探知確率に要求される公理から導く。4節では、搜索配分ゲームと呼ばれる具体的な搜索問題を取り上げ、擬特性関数に対する配分としてのコアの存在を証明し、その計算法を提案する。5節では、以上の理論的成果を踏まえた数値例として、海賊のぶんどり品分配問題を考察する。

2 複数搜索者による協力ゲームと提携の可能性

次のように複数の搜索者が同時にある1つの目標を搜索している状況を考える。ただし、任意のプレイヤーによる搜索は他のプレイヤーの搜索に一切影響を及ぼさないものと仮定するため、あるプレイヤーの搜索による目標の探知確率は、他のプレイヤーの搜索により変化することはない、またプレイヤーによる目標探知や非探知事象は互いに独立であるとする。このような搜索の状況を独立搜索と呼ぶ。このような独立搜索を大前提として、 n 人の複数搜索者が同時に1つの目標を搜索している次のような同時搜索を考えたとき、全体提携が可能であるかどうかを考える。

- (A1) n 人の搜索者 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ が価値 V をもつ1つの目標を搜索している。
- (A2) 搜索状況は独立搜索であり、プレイヤー $i \in N$ が目標を探知する確率は p_i である。

(A3) 全プレイヤーによる搜索の結果、プレイヤーの集合 $S \subseteq N$ のみが目標を探知した場合は、目標価値 V をある定まった割合により S の間だけで分配する。すなわち、プレイヤー $i \in S$ に分配される利得を $\alpha_i^S V$ とする。もちろん、任意の $S \subseteq N$ に対し次式が満足されなければならない。

$$\alpha_i^S \geq 0, i \in S, \quad \sum_{i \in S} \alpha_i^S = 1 \quad (1)$$

仮定 (A2) の独立搜索の仮定から、プレイヤーの集合 $S \subseteq N$ のみが探知する確率 p_S^I は次式により計算できる。

$$p_S^I = \prod_{j \in S} p_j \prod_{k \in N \setminus S} (1 - p_k) \quad (2)$$

したがって、プレイヤー N のそれぞれによる独立搜索の結果、プレイヤー i が得る期待利得 v_i は次式により評価できる。

$$v_i = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} V \alpha_i^S p_S^I = V \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \alpha_i^S \prod_{j \in S} p_j \prod_{k \in N \setminus S} (1 - p_k) \quad (3)$$

以上の仮定では、目標価値は目標を発見した者の間で分割するとしたが、いま全体提携 N を考え、 N の誰が目標を発見しても価値 V が N 全体にもたらされるとしよう。ただし、提携の結果得られた価値を後で N の間でどのように分配するかは当面議論しない。さて独立搜索の仮定から、 N の誰かが目標を探知する確率は $p_N = 1 - \prod_{j \in N} (1 - p_j)$ であるから、その期待利得は $v_N = V (1 - \prod_{j \in N} (1 - p_j))$ となる。ここで、(1)-(3) 式から、 $v_N = \sum_{i \in N} v_i$ の成立することが次のように確認できる。

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} v_i &= V \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \alpha_i^S p_S^I = V \sum_{S \subseteq N, S \neq \emptyset} \sum_{i \in S} \alpha_i^S p_S^I = V \sum_{S \subseteq N, S \neq \emptyset} p_S^I \\ &= V \left(\sum_{S \subseteq N} p_S^I - p_\emptyset^I \right) = V(1 - p_\emptyset^I) = V \left(1 - \prod_{i \in N} (1 - p_i) \right) = v_N \end{aligned} \quad (4)$$

この非本質的 (inessential) な関係を示す等式により、前提 (A1)-(A3) に基づく搜索から全体提携に乗り換えることに不満をもつプレイヤーが少なくとも 1 人は存在することになる。全体提携が成立する可能性があるのは、提携の下での搜索が独立搜索以上の探知確率をもたらす場合であり、提携 N による探知確率 p_N が $p_N > 1 - \prod_{i \in N} (1 - p_i)$ を満たす必要がある。

上では複数搜索者による同時搜索を考えたが、1 人 1 人の搜索者による搜索が逐次的に行われ、途中で誰かが目標を探知すれば目標価値を独占できる逐次搜索においても、全体提携による期待獲得価値と個々の搜索者のそれとの関係は $v_N = \sum_{i \in N} v_i$ となり、期待利得は非本質的なものとなる。ここでも全体提携が形成される可能性があるのは、独立搜索の状況が成り立たず $p_N > 1 - \prod_{i \in N} (1 - p_i)$ となる必要がある。さてこの不等式は、 $-\log_a(1 - p_N) > \sum_{i \in N} \{-\log_a(1 - p_i)\}$ のように書くことができる。ただし、 $a > 1$ とする。ここで、プレイヤーの部分集合 $S \subseteq N$ の提携による搜索の結果得られる探知確率 p_S に対し、非負の値 $-\log_a(1 - p_S)$ を

$$h(S) \equiv -\log_a(1 - p_S) \quad (5)$$

で置き換えよう。因みに、 $1 - p_S$ は、提携 S による搜索で目標が非探知となる確率である。この $h(S)$ を用いると、全体提携に可能性をもたらす上述の条件は $h(N) > \sum_{i \in N} h(\{i\})$ となるが、これはプレイヤーの集合 S の特性関数を $h(S)$ とした場合に、この特性関数が本質的 (essential) となる条件である。この $h(S)$ を、 a を基とする擬特性関数と呼称しよう。ここで、擬特性関数 $h(S)$, $S \subseteq N$ を用いてこれまでの議論を整理しよう。

今、独立搜索とは限らない協力搜索における提携 S による探知確率が p_S だとし、擬特性関数 $h(S)$ を式 (5) により定義する。このときプレイヤーの集合 S による探知確率は $p_S = 1 - a^{-h(S)}$ である。全体提携 N

の擬特性関数値 $h(N)$ に関するある配分 $\{x_i, i \in N\}$ を考えたとき, x_i は独立搜索状況を仮定した場合のプレイヤー i の探知確率を

$$\tilde{p}_i = 1 - a^{-x_i} \quad (6)$$

と評価していることに相当する. 何故なら $p_N = 1 - a^{-h(N)} = 1 - a^{-\sum_{i \in N} x_i} = 1 - \prod_{i \in N} (1 - (1 - a^{-x_i}))$ が成り立つからである. この仮想的独立性が本来複雑な協力搜索の分析を容易にする. (6) 式で計算される探知確率 $\tilde{p}_i$ を, ‘配分 x_i に対する a を基とする変換探知確率’ と呼ぼう.

次に, 全体提携 N の搜索により目標が探知され実際に価値 V を得たとき, この配分 x_i をもつプレイヤー i には価値 V の何割が報酬として与えられるべきであるかを考える. 同時搜索の仮定 (A1)–(A3) から, プレイヤー集合 S 全員による探知から得られた価値 V は, どのプレイヤー $i \in S$ にも等しく $V/|S|$ ずつ分けられるべきであるとしよう. この一様分配は, 仮定 (A3) の比率 α_i^S を $\alpha_i^S = 1/|S|$ とすることに相当し, プレイヤー i の期待利得は, 仮想的独立性と (3) 式から

$$v_i = V \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{|S|} \tilde{p}_S^i = V \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{|S|} \prod_{j \in S} \tilde{p}_j \prod_{k \in N \setminus S} (1 - \tilde{p}_k)$$

となる. 式中の確率 $\tilde{p}_S^i$ は, 仮想的独立搜索におけるプレイヤー S のみによる探知確率を意味するが, 提携 N の配分は N の誰かによる目標の探知を仮定, あるいは事実としているから, 上式の確率 $\tilde{p}_S^i$ を条件付確率

$$\begin{aligned} & Pr\{S \text{ のみによる探知} \mid N \text{ のいずれかのメンバーによる探知}\} \\ &= Pr\{S \text{ のみによる探知}\} / Pr\{N \text{ のいずれかのメンバーによる探知}\} = \prod_{j \in S} \tilde{p}_j \prod_{k \in N \setminus S} (1 - \tilde{p}_k) / p_N \end{aligned}$$

で置き換え V で割った次の値がプレイヤー i に対する分配比率である.

$$\beta(i) = \frac{1}{p_N} \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{|S|} \prod_{j \in S} (1 - a^{-x_j}) \cdot a^{-\sum_{k \in N \setminus S} x_k} \quad (7)$$

因みに, $\sum_{i \in N} \beta(i) = 1$ と正規化されていることが確認できる.

これまでの議論を整理して, 一般的な協力搜索ゲームの分析手順を述べよう. まず, 搜索者の任意の提携 S による探知確率 p_S が評価できるものとし, 擬特性関数 $h(S)$ を (5) 式で定義する. この擬特性関数が優加法性をもつ場合には, 全体提携 N が形成される動機が存在する. ここである合理的な配分 $\{x_i, i \in N\}$ が設定できる場合, x_i に対する変換探知確率 $\tilde{p}_i$ を (6) 式により算出すれば, これを探知能力 (探知確率) としてを持つ搜索者達の独立搜索を想定できる. この独立性を利用すれば, 本来複雑である協力的搜索の分析評価が容易となる. 例えば, 全体提携により得た目標価値は (7) 式に従って皆で分配すれば良い.

3 擬特性関数の公理的導出

ここでは, 同時搜索に関する性質を公理として設定し, 目標に対するプレイヤーの探知確率のみから擬特性関数を定義した場合にも (5) 式が導出できることを示そう.

ある目標に対しプレイヤー集合 S の提携による搜索の探知確率, すなわち S の誰かが目標を探知する確率を p_S とする. また, S とは排反な他のプレイヤー集合 T の提携による搜索の探知確率を p_T とする. S と T とが提携して搜索する場合の探知確率 $p_{S \cup T}$ は, 前節で述べた独立搜索を用いた場合 $1 - (1 - p_S)(1 - p_T)$ となる. 今, (公理 1) 提携 S の擬特性関数 $h(S)$ は, その探知確率 p_S のみの関数 $F(p_S)$ で定義されるとする. 上記の探知確率 $p_{S \cup T}$ はプレイヤー集合 S と T 間の協力は一切ない独立搜索の結果得られた訳であるから, その擬特性関数 $h(S \cup T)$ としては, 単に $h(S)$ と $h(T)$ を足したものより何ら大きな値は得られないことを要請しよう. すなわち, (公理 2) 互いに素なプレイヤー集合 S と T の独立搜索を用いた提携の擬特性関数は, それぞれの擬特性関数の和となるとする.

この結果、 $F(1 - (1 - p_S)(1 - p_T)) = F(p_S) + F(p_T)$ となる。簡単化のため、 $\kappa(x) \equiv F(1 - x)$ とおくと、上記の等式は $\kappa((1 - p_S)(1 - p_T)) = \kappa(1 - p_S) + \kappa(1 - p_T)$ が任意の $0 \leq p_S, p_T \leq 1$ に対し成立する。この関数方程式を解けば、 $\kappa(x) = \alpha \ln x$ (ただし、 α は任意定数) となるから、提携 S に対して定義される擬特性関数は $h(S) = \alpha \ln(1 - p_S)$ である。また、擬特性関数は非負であるとして $\alpha = -1/\ln a$ ($a > 1$) とおき、 $h(S) = -\log_a(1 - p_S)$ を採用しよう。

$$h(S) = -\log_a(1 - p_S) \quad (8)$$

この関数は探知確率 p_S に対し単調増加であり、ゼロの探知確率に対しては値ゼロを返す納得できる性質を持っている。因みに、擬特性関数の関係 $h(S \cup T) > h(S) + h(T)$ は、プレイヤー集合 S と T の提携による探索が、単なる独立探索を通じて提携した場合よりも効率がよく、 $p_{S \cup T} > 1 - (1 - p_S)(1 - p_T)$ となることを意味しており、その関係はパラメータ a には依存しない。

4 探索配分ゲームの協力ゲームモデルと定式化

1 人の目標とその発見に努力する複数の探索者とがプレイヤーとして参加し、時間的経過を伴いながら同時に探索を実施する次のような同時探索ゲームを考える。探索者達は目標を発見すべく手持ちの探索資源を探索地理空間に投入し、目標は地理空間上を時間とともに移動し探索者から逃避しようとする。探索資源の投入戦略をとる探索者と移動戦略をとる目標が参加するゲームは、探索配分ゲームと呼ばれる。ここでは、複数探索者が協力することにより提供される探索資源の効果について検証するため、次のようなモデルを考える。

- (C1) 探索空間は、離散地理空間 $K = \{1, \dots, K\}$ と離散時間空間 $T = \{1, \dots, T\}$ から成る集合 $K \times T$ である。
- (C2) 目標は時間とともに移動するパスを通り、そのパス ω を $\{\omega(t), t \in T\}$ と表現しよう。ただし、 $\omega(t) \in K$ は時点 t でのパスの通過地点を示す。また、目標の取り得る実行可能パス全体を Ω とする。
- (C3) 探索者は全員で n 人おり、探索者の集合を $N = \{1, \dots, n\}$ で表す。探索者 k は各時 t において上限 $\Phi_k(t)$ の資源量を提供できる。探索に参加する探索者全体のとる戦略は探索資源投入計画 $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in K, t \in T\}$ で表される。ただし、 $\varphi(i, t) \in \mathbb{R}$ は時点 t において地点 i へ投入する非負の探索資源量である。また、探索資源の投入を始めることのできる探索開始時点は τ であるとする。
- (C4) 目標のパス ω と参加探索者の資源投入戦略 φ により、目標パス上に投入された探索資源の重み付き総量 g に対し単調増加で凹な関数 $f(g)$ で表される探知確率が得られる。地点 i に投入された探索資源の単位量当たりの重みを α_i とするが、これは探知確率に対する資源の有効性を示す地点 i に固有の特性値であり、探索者には依存しない。
参加探索者は協力してこの確率を高くしようとするマキシマイザーとして、目標はミニマイザーとして行動するものとする。

ここで記号を定義しておこう。探索資源を投入できる時点集合を $\hat{T} = \{\tau, \tau + 1, \dots, T\}$ で表す。参加探索者集合を $S \subset N$ とした場合の投入探索資源の実行可能性条件は次で与えられる。

$$\Psi_S = \{\varphi \mid \sum_{i \in K} \varphi(i, t) \leq \Phi^S(t) \equiv \sum_{k \in S} \Phi_k(t), t \in \hat{T}, \varphi(i, t) \geq 0, i \in K, t \in \hat{T}\} \quad (9)$$

目標、探索者の純粋戦略を ω, φ とする。時点 t において目標は地点 $\omega(t)$ に存在し、そこに投入される資源量は $\varphi(\omega(t), t)$ であるから、探索資源の重み付き総量 $g(\varphi, \omega)$ 及び探知確率 $P(\varphi, \omega)$ は次式で与えられる。

$$g(\varphi, \omega) = \sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \quad (10)$$

$$P(\varphi, \omega) = f\left(\sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)\right) \quad (11)$$

ここで目標に関しては混合戦略 $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$ を考えよう。 $\pi(\omega)$ はパス ω を選択する確率を示す。 π の実行可能領域は次式で与えられる。

$$\Pi = \{\pi(\omega) \mid \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega\} \quad (12)$$

探索者の純粋戦略 φ と目標の混合戦略 π による探知確率は $P(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) P(\varphi, \omega)$ と書け、 π に関して線形式、 φ に関しては凹関数となっているが、そのミニマックス値とマックスミニ値が一致することはすでに証明されており [3]、以後我々は目標の混合戦略、探索者提携 S の純粋戦略の範囲内で均衡解を導出することにする。まず、マックスミニ値を求めよう。実行可能領域 Π の制約式に注意すれば、探知確率は次の変形を許す。

$$\max_{\varphi \in \Psi_S} \min_{\pi \in \Pi} P(\varphi, \pi) = \max_{\varphi \in \Psi_S} \min_{\omega \in \Omega} P(\varphi, \omega) = \max_{\varphi, \zeta} \{\zeta \mid f(g(\varphi, \omega)) \geq \zeta, \omega \in \Omega\}$$

ここで関数 $f(\cdot)$ の単調性を利用した変換 $\eta = f^{-1}(\zeta)$ を行くと、さらに次のような変形ができる。

$$\text{上式} = \max_{\varphi, \eta} \{f(\eta) \mid g(\varphi, \omega) \geq \eta, \omega \in \Omega\} = f\left(\max_{\varphi, \eta} \{\eta \mid g(\varphi, \omega) \geq \eta, \omega \in \Omega\}\right)$$

結局、マックスミニ問題は線形計画問題 $\max_{\varphi, \eta} \{\eta \mid g(\varphi, \omega) \geq \eta, \omega \in \Omega\}$ を解くことと同値であることが分かる。

$$P_S : w(S) = \max_{\varphi, \eta} \eta$$

$$s.t. \quad \sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \geq \eta, \omega \in \Omega \quad (13)$$

$$\sum_{i \in K} \varphi(i, t) \leq \sum_{k \in S} \Phi_k(t), t \in \hat{T} \quad (14)$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, i \in K, t \in \hat{T} \quad (15)$$

この最適値 $w(S)$ を用いれば、元のゲームのマックスミニ値、すなわちゲームの値は $f(w(S))$ で計算できる。また、上記の線形計画問題は、期待利得を $P(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) g(\varphi, \omega)$ と見なした場合のマックスミニ問題そのものから導出される定式化に他ならないから、期待利得が変数 π と φ に対し双線形なこの式で与えられると仮定して、以後の議論を行うことにしよう。

予備定理 1 探索者が協力して得られる期待利得 $w(S)$ は優加法性を満たす。すなわち、 $A, B \subseteq N, A \cap B = \emptyset$ なる任意の A, B に対し、 $w(A \cup B) \geq w(A) + w(B)$ である。

証明: 互いに排反な任意の $A, B \subset N$ に対する問題 $(P_A), (P_B)$ の最適値を η_A^*, η_B^* 、最適解を φ_A^*, φ_B^* とし、新しい解 $\varphi(i, t) = \varphi_A^*(i, t) + \varphi_B^*(i, t)$ を作る。この解は、

$$\sum_{i \in K} \varphi(i, t) = \sum_{i \in K} \varphi_A^*(i, t) + \sum_{i \in K} \varphi_B^*(i, t) \leq \sum_{k \in A} \Phi_k(t) + \sum_{k \in B} \Phi_k(t) = \sum_{k \in A \cup B} \Phi_k(t)$$

を満たし、かつ $\sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \geq \eta_A^* + \eta_B^*$ であるから、 $\varphi(i, t)$ 及び $\eta = \eta_A^* + \eta_B^*$ は問題 $(P_{A \cup B})$ の実行可能解である。したがって、 $w(A \cup B) \geq \eta_A^* + \eta_B^* = w(A) + w(B)$ である。 **Q.E.D.**

さて、問題 (P_S) に対する次の双対問題 (D_S) を解けば、目標の最適戦略 $\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$ が得られる。

$$D_S : w(S) = \min_{\nu, \pi} \sum_{t \in \hat{T}} \nu(t) \sum_{k \in S} \Phi_k(t) \quad (16)$$

$$s.t. \quad \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1 \quad (17)$$

$$\pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega \quad (18)$$

$$\alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \leq \nu(t), i \in K, t \in \hat{T}. \quad (19)$$

ただし、 Ω_{it} は時刻 t にセル i を通過するパスの集合 $\Omega_{it} = \{\omega \in \Omega | \omega(t) = i\}$ を意味する。探知確率関数が $f(x) = 1 - \exp(-x)$ で与えられる場合には、搜索者提携 S による探知確率 $P(S)$ は $P(S) = 1 - \exp(-w(S))$ であるから、基を $a = e$ (自然対数の底) として (8) 式で定義される擬特性関数 $h(S)$ は $w(S)$ と一致する。したがって、予備定理 1 は擬特性関数 $h(\cdot)$ に対する優加法性も示しており、この協力搜索割当ゲームにおいて全体提携が成立することには十分な根拠がある。このとき、この提携形ゲームのコアの 1 つが次により与えられる。

定理 1 全体提携 N に対する問題 (D_N) を解き、その最適解 $\nu^*(t)$ に対し $x_k \equiv \sum_{t \in \hat{T}} \nu^*(t) \Phi_k(t)$ を作れば、 $\{x_k, k \in N\}$ はコアに属す。

証明: (16) 式から、明らかに $w(N) = \sum_{k \in N} x_k$ が成り立つ。また、任意の $S \subset N$ に関し

$$w(S) = \min_{\nu, \pi} \sum_{t \in \hat{T}} \sum_{k \in S} \nu(t) \Phi_k(t) \leq \sum_{k \in S} \sum_{t \in \hat{T}} \nu^*(t) \Phi_k(t) = \sum_{k \in S} x_k$$

が成立する。 **Q.E.D.**

定理 1 における配分 $\{x_k\}$ の表現から分かるとおり、 $\nu^*(t)$ は時点 t における単位資源量の尤もらしい潜在価値を示していると言える。全体提携による搜索の結果目標が探知された場合は、定理 1 で述べた配分 $\{x_k, k \in N\}$ を基礎にして、得られた目標価値をプレイヤー間で分配することになるが、その分配比率 $\{\beta(k), k \in N\}$ は (7) 式により査定すればよい。

5 海賊のぶんどり品分配問題

図 1 のように、搜索空間 K は 48 個の正六角形のセルから成る海域で表されていて、そこには大小 2 つの島がある。右の大きな島には海賊の基地が 2 つあり、セル 22 には中規模の基地、セル 30 には大きな基地がある。その島から海峡を挟んだ左の島には、中規模の基地がセル 18 に置かれている。通常この海域を通る船舶は、離散時点 $T = \{1, \dots, 11\}$ の間に、セル 24 から入り、4 つのセル 8, 16, 25 または 34 に到達して海域を抜ける。これらの入口、出口を結ぶ航路を船舶は通行することになるが、その航路全体は次のものを考える。

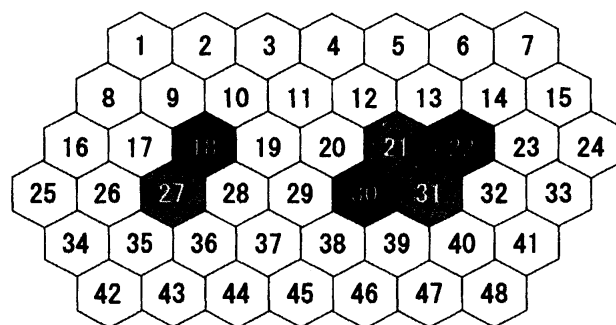


図 1. 海域図

船舶は、各セルから1時点の間に2つ隣のセルまで移動することができるが、島を通り抜けることはできない。1つ隣のセルへ移動するよりは、2つ隣のセルへ移動する方がより大きな速度を使用するため、1隣接セルへの移動にはエネルギー1を消費し、2隣接セルへの移動にはエネルギー4が必要である。もちろん、同一セルに停止する場合はエネルギー消費はない。時点数11の間に、総消費移動エネルギー10以下で入口と出口を結ぶすべてのパスを実現可能な航路全体 Ω としよう。例えば、時点 $t=1, 2, \dots, 8$ において、セル24, 15, 14, 13, 11, 10, 9, 8を通過するパスは、エネルギー10を消費し尽くした後、時点8で出口セル8に到達する実現可能なパスの1つである。この場合の全航路数は $|\Omega| = 2982$ となる。

島にある3つの基地が3人のプレイヤー N を表し、右からプレイヤー1, 2, 3とする。基地の規模に応じて船舶襲撃時に動員できる人数、装備の量が異なり、プレイヤー k の時点 t での動員資源量 $\Phi_k(t)$ は、プレイヤー $k=1, 3$ に関しては $\Phi_k(t) = 2$, $t=2, \dots, 10$ であり、プレイヤー $k=2$ に関しては $\Phi_k(t) = 3$, $t=2, \dots, 10$ である。ただし、時点1には船舶は入口セル24にあり、時点11では出口セルにいるから、海賊行為は働かず強襲資源は使えない。強襲資源を用いて船舶を捕獲できる効率を表すセル i での係数 α_i はすべて同じ $\alpha_i = 1$ とするが、上述したように入口セル及び出口セル k においては海賊行為が不可能であるため $\alpha_k = 0$ と置こう。また、係数付き強襲資源量 x による船舶の捕獲確率関数は $f(x) = 1 - \exp(-x)$ である。船舶は、この海域を通過する際に海賊からできるだけ捕獲されないような航路を選択しようとし、海賊は、できるだけ捕獲確率を大きくするように、手持ちの強襲資源を持ち寄り使用する。

このケースに対し問題 (D_N) を解き、定理1によるコアの点 $\{x_1, x_2, x_3\}$ を求めた。船舶による航路の最適選択確率が $1/|\Omega|$ より大きな航路数は48本あり、そのうちの大きな選択確率をもつ12本により選択確率の総和が70%を越える。その主要航路を示したものが表1である。経路の選択確率と各時点における通過セルが記されている。12本の航路をみると、島の北を迂回しできるだけ早く出口セルに到達できるように、パス $\{13, 12, 11, 10\}$ を含んだ航路が、出発セル24から時間差をもたせて出発したり、また2隣接セルへの移動を利用するなど、バリエーションを持たせた形で多用されている。同じく、出発時間に時間差を持たせた南廻りの航路も使用されており、海賊による航路予想を困難にしている。

各時点 t 、各セル i における最適な目標存在確率 $\sum_{k \in N_i} \pi(\omega)$ 及び海賊による強襲資源の最適投入量 $\varphi(i, t)$ についてはその詳細を表示しないが、表1で示した主要航路に沿って船舶の存在確率も分布しており、また強襲資源投入もなされている。特に時点2における船舶存在確率及び強襲資源分布は、24以外のセル14, 15, 23, 33において完全に一様化される。このセル24は強襲不可能なセルであり、主要航路へ船出する前の時間差出発の待機セルとして利用されるため、しばらくの間高い船舶の存在確率をもつ。

表1 選択確率の大きな航路

paths	prob.	time points										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Path 1	0.0951	24	14	13	12	11	10	9	8	8	8	8
Path 2	0.0951	24	15	7	6	5	4	3	2	1	8	8
Path 3	0.0951	24	33	41	48	47	46	45	44	43	42	34
Path 4	0.0866	24	24	14	13	12	11	10	9	8	8	8
Path 5	0.0865	24	24	15	7	6	5	4	3	2	1	8
Path 6	0.0484	24	24	33	41	40	39	38	37	36	35	34
Path 7	0.0467	24	24	33	32	40	39	38	37	36	35	34
Path 8	0.0366	24	24	23	14	13	12	11	10	8	8	8
Path 9	0.0366	24	24	23	14	13	12	20	19	10	9	8
Path 10	0.0342	24	24	24	24	15	14	13	12	11	10	8
Path 11	0.0340	24	24	24	24	23	14	13	12	11	10	8
Path 12	0.0331	24	23	32	40	39	38	37	36	35	34	34

表 2 は各時点における強襲資源の潜在価値 $\nu(t)$ を示している．問題 (D_N) の制約条件式 (19) から分かるように，この価値は各時点における船舶の存在確率の最大値，すなわち選択航路の集中度を示しており，船舶側からすればこれをできるだけ低く抑えることで，強襲資源投入の効率化を妨げようとする．時点 $t = 6$ での資源価値が他の時点に比べ若干高くなっているものの，全体的にはほぼ均一化されていて，海賊側の使用できる強襲資源総量が常時 $\sum_k \Phi_k(t) = 7$ であることを考慮し，船舶側は存在確率の均一化を常に心掛けていることが分かる．このとき，定理 1 にある 3 人のプレイヤーに対するコアの点は $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1.74, 2.61, 1.74\}$ となり，各プレイヤーがもつ強襲資源量の比 2:3:2 に一致するが，これはこの点の計算法からも自明である．この場合のゲームの値，あるいは海賊の全体提携による擬特性関数値は $w(N) = 6.10$ となる．因みに， $a = e$ とした (7) 式を用いると，捕獲したぶんどり品を 3 つの海賊で分配する比率は， $\{\beta(1), \beta(2), \beta(3)\} = \{0.313, 0.373, 0.313\}$ となる．

表 2 強襲資源の価値

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\nu(t)$	0.096	0.095	0.095	0.095	0.104	0.097	0.097	0.097	0.095	0

6 おわりに

搜索理論が第 2 次世界大戦における米海軍の軍事研究から発展してきたという経緯をもつため，搜索ゲームに関する多くの問題が，主に敵対的プレイヤーの参加するゼロ和の非協力ゲームとして論じられてきた．しかし，海難救助や鉱物探査に見られるように，搜索者間ないしは搜索目標物間での提携が可能な協力的な搜索状況も存在する．また搜索活動は，様々なランダム要素をもつ．搜索者による目標探知事象が起ることもあれば，目標が探知を逃れる確率もあり得る．このような搜索ゲームにおけるランダム性を勘案して，提携内で目標価値を合理的に分配する必要がある．

この報告では，1 つの目標及び複数搜索者が参加し，搜索者の間で全体提携が可能な協力的搜索ゲームについて論じた．まず，通常の提携形ゲームにおける特性関数に類似したものとして擬特性関数と呼ぶ関数を定義し，それを基にして獲得目標価値の分配法を提案した．そのような一般論とは別に，具体的なモデルとして搜索配分ゲームを取り上げ，その擬特性関数やコアに属する配分の導出，さらには上述した獲得価値の分配を線形計画問題から導出する手法論を提案した．

参考文献

- [1] J.M. Danskin, A helicopter versus submarine search game, *Operations Research*, **16**, pp.509–517, 1968.
- [2] R. Hohzaki, Search allocation game, *European Journal of Operational Research*, **172**, pp.101–119, 2006.
- [3] R. Hohzaki and K. Iida, A solution for a two-person zero-sum game with a concave payoff function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157–166, 1999.
- [4] P.M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.
- [5] A.R. Washburn, Search-evasion game in a fixed region, *Operations Research*, **28**, pp.1290–1298, 1980.
- [6] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The diesel submarine flaming datum problem, *MOR*, **4**, pp.19–30, 2001.