

フーリエ代数 $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{f}_n$ と $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{f}_n$ との同型問題

防衛大 加藤昭男
(AKIO KATO)

最近 General Topologists の間で $\omega_1^* = \mathcal{P}\omega_1 \setminus \omega_1$ と $\omega^* = \mathcal{P}\omega \setminus \omega$ とは同相になり得るか、という問題がにわかに脚光を浴びてきた。この小論では、この問題に対する "one small step" として、random real extension に於ては答えは否定的であることを示す。

§1. Introduction Cardinal κ に對し $\kappa^* = \mathcal{P}\kappa \setminus \kappa$ は、discrete space κ の Stone-Čech compactification $\mathcal{P}\kappa$ の remainder を表わす。 $\mathcal{P}\kappa$ は power set $\mathcal{P}(\kappa)$ of κ の Stone space であり、 κ^* は、 $\mathcal{P}(\kappa)$ を finite sets の ideal で割って得られる商フーリエ代数 $\mathcal{P}(\kappa)/\mathfrak{f}_n$ の Stone space に一致する。従って ω_1^* と ω^* が同相になるか、という問題は、フーリエ代数 $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{f}_n$ と $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{f}_n$ が同型になるか、という問題と同じであり、本質的に

集合論的性格を持っている。なお一般の cardinals κ, λ についての同様の問題は否定的に解決されており、我々の問題のみが未解決として残されている [1]。即ち、

$$\kappa > \lambda \geq \omega, \quad \kappa^* \cong \lambda^* \quad \rightarrow \quad \kappa = \omega_1 \text{ \& \> } \lambda = \omega$$

(i.e. $\mathcal{P}(\kappa)/f_n \cong \mathcal{P}(\lambda)/f_n$)

§2. Similarity $\mathcal{P}(\omega_1)/f_n \cong \mathcal{P}(\omega)/f_n$ が成立するならば $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/f_n| = |\mathcal{P}(\omega)/f_n| = 2^\omega$ であるから、我々は条件 $2^{\omega_1} = 2^\omega$ が成立する時のみ関心がある。(例えば連続体仮説 CH が成立する状況は除外される。)

この必要条件 $2^{\omega_1} = 2^\omega$ は、ブール代数の構造を全く無視することにより得られたものであるが、実は意外と無視して いない ということが次の定理よりわかる。

定理 1. 次は equivalent である。

- (1) $2^{\omega_1} = 2^\omega$
- (2) Homeomorphic embedding $\omega_1^* \hookrightarrow \omega^*$ が存在する。
i.e. Homomorphism, onto $\mathcal{P}(\omega_1)/f_n \leftarrow \mathcal{P}(\omega)/f_n$ が存在。
- (3) $\mathcal{P}(\omega_1)/f_n \cong \mathcal{P}(\omega)/I$ とはる ideal I of $\mathcal{P}(\omega)$ 2 finite sets を含むものが存在する。

(証明) (2) $\rightarrow$ (3) は明らか。 (3) $\rightarrow$ (1) は、 $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{I}_n| = |\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{I}| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\omega}$ より従う。 (1) $\rightarrow$ (2) を示すには、 $2^{\omega_1} = \phi (= 2^{\omega})$ のとき $\mathcal{P}(\omega_1) \subset \mathcal{P}(\omega)$ となることを示せば十分であるが、 $\mathcal{P}(\omega_1)$ は extremally disconnected であることに注意すれば次のよく知られた結果から従う。

Fact. 1. Extremally disconnected compact T_2 space X of weight $\leq \phi$ は、 ω^* の中に homeomorphic に embed される。 すなわち、 complete Boolean alg. B of card. ϕ は Boolean alg. $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{I}_n$ の homomorphic image になる。

これは Efimov の結果だが、本質的には Sikorski extension theorem による ([5] 参照)。

なお、この定理 1 (3) において、ideal I を σ -ideal に選べるかどうかはまだわかっていない。 Martin's Axiom を仮定すれば σ -ideal に選ぶことは可能である ([5])。

定理 2. ω_1^* 及び ω^* は共に homeomorph of $\phi \times \omega^*$ を dense に含む。従って、 ω_1^* 及び ω^* の regular open sets 全体のつくる Γ -ル代数は同じである。 すなわち、 $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{I}_n$ 及び $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{I}_n$ の completion は一致する。

この定理は、countable sets から成る maximal almost disjoint collection of card. ϕ をみつかることにより容易に証明される。詳細は読者にゆだねる。

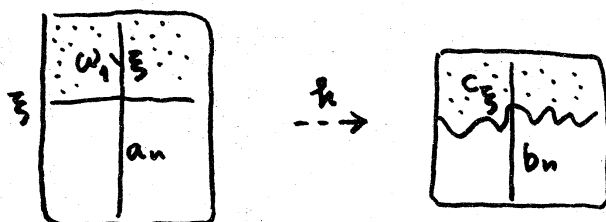
§3. A Breakthrough 問題の解決に一歩踏み出したのは Frankiewicz & Balcar [3] による次の結果である。

定理3. $\mathcal{P}(\omega_1)/\sim$ が $\mathcal{P}(\omega)/\sim$ の中に embed されることは、 ω から ω への関数全体 ${}^\omega\omega$ の中に ω_1 -scale が存在する。

(${}^\omega\omega$ の中に $f < g \iff \exists m \in \omega \forall n > m \ f(n) < g(n)$ により order を入れたとき、 $S \subseteq {}^\omega\omega$ が ω_1 に order isomorphic であり、 $\forall f \in {}^\omega\omega \exists g \in S \ f < g$ となるとき、 S を ω_1 -scale とする。)

(証明) $h: \mathcal{P}(\omega_1)/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\omega)/\sim$ を embedding とする。 ω_1 の分割 $\omega_1 = \bigoplus_{n \in \omega} a_n$, $|a_n| = \omega_1$ を考え、 h により対応する ω の分割を $\omega = \bigoplus_{n \in \omega} b_n$ とする。すなわち $h([a_n]) = \langle b_n \rangle$ である。($a \in \mathcal{P}(\omega_1)$, $b \in \mathcal{P}(\omega)$ に対応する equivalence class in $\mathcal{P}(\omega_1)/\sim$, $\mathcal{P}(\omega)/\sim$

をそれぞれ $[a]$, $\langle b \rangle$ で表わすことにする。) 各 $\xi < \omega_1$ に対し $h([\omega_1, \xi]) = \langle c_\xi \rangle$, $c_\xi \in \omega$ とする. $[a_n] \cdot [\omega_1, \xi] > 0$ より $\langle b_n \rangle \cdot \langle c_\xi \rangle > 0$. 各 $\xi < \omega_1$ に対し $f_\xi \in \omega$ を $f_\xi(n) = \text{Min}(b_n \cap c_\xi)$ により定めれば $\xi < \eta < \omega_1$ の時 $f_\xi < f_\eta$ in ω となり. よって, $\{f_\xi : \xi < \omega_1\}$ から求める ω_1 -scale が得られる。



§4. Aspects in Models 今までの考察から.

もし $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{f}_n \approx \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{f}_n$ なる条件

$$(*) \quad 2^{\omega_1} = 2^\omega \text{ \& \> } \exists \omega_1\text{-scale in } \omega$$

が成立しなければならぬ。この条件が成立する model of ZFC として最もシンプルなのは、いわゆる random real extension である。よって、この model の中で $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{f}_n \approx \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{f}_n$ が成立するかどうかを調べてみる。答えは否定的である。

定理 4. Model M of CH に ω_2 個の random reals を add した extension $M[G]$ において embedding $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{f}_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{f}_n$ は存在しない。

(証明) $M \models CH$ とする。 " ω_2 個の random reals を add する" とは、Cantor space 2^I where $I = \omega_2$ の中に標準的な probability measure を入れ、Baire subsets 全体を ideal of null sets で割った商 σ -algebra $B(I) = \text{Baire}(2^I)/\text{null}$ による extension を与えることである。 G を M -generic filter in $B(I)$ とし、

$$M[G] \models \exists \varphi: \mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin} \rightarrow \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{fin} \text{ embedding"}$$

(emb. = 1-1, into, homomorph.) と仮定すると矛盾を導く。

各 $\xi < \omega_1$ に対し $\varphi([\xi]) = \langle c_\xi \rangle$ とおき、

$$J_1 \triangleq \{ [\xi] : \xi \in \omega_1 \} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin}$$

$$J_0 \triangleq \{ \langle c_\xi \rangle : \xi \in \omega_1 \} \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{fin}$$

と定める。 $\varphi(J_1) = J_0$ 。 φ は embedding であるから

$$\xi < \eta \rightarrow \langle c_\xi \rangle \leq \langle c_\eta \rangle$$

J_0 は $\omega_1 \times \omega$ の subset により決定され、 $|\omega_1 \times \omega| = \omega_1$

であることより subset $I_0 \subseteq I$, $|I_0| = \omega_1$ と

$$J_0 \in M[G_0] \text{ where } G_0 \triangleq G \cap B(I_0)$$

なるものがみつかる。 $M[G_0]$ においても CH が成立するから、一般性を失うことなく、初めから

$$J_0 \in M$$

と仮定してよい。

さて、よく知られているように、 ω_1 の中において

ω_2 -sequence $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_2\}$ of subsets of ω_1 2" $\alpha < \beta$
 のとき $a_\alpha \supseteq a_\beta \bmod \text{countable}$, $a_\alpha \setminus a_\beta$ uncountable
 なるものがあつた。 (これらは closed unbounded sets を
 使っていき、 ω_1 の induction step 2" は diagonal
 intersection をとればよい。) 3" 4" 5" $\mathcal{P}(\omega_1)/\text{fn}$ の中
 2" は、 $\alpha < \beta$ のとき $[a_\alpha] > [a_\beta] \bmod J_1$ 2" あり。

$\varphi([a_\alpha]) = \langle b_\alpha \rangle$, $b_\alpha \subseteq \omega$ とおくと φ は embedding 4" 2
 $\alpha < \beta < \omega_2 \rightarrow \langle b_\alpha \rangle > \langle b_\beta \rangle \bmod J_0$ in $\mathcal{P}(\omega)/\text{fn}$

2" のとき $M[G]$ の中 2" 成立していき 3

$\exists p \in G, \forall \alpha < \beta < \omega_2 \quad p \Vdash \langle \dot{b}_\alpha \rangle > \langle \dot{b}_\beta \rangle \bmod J_0$

各 name $\dot{b}_\alpha \in M^{B(I)}$ は function $\dot{b}_\alpha : \omega \rightarrow B(I)$ とおくと
 $\text{rng}(\dot{b}_\alpha) \subseteq B(I_\alpha)$ となる countable set $I_\alpha \subseteq I$ がある。
 $p \in B(I_p) \subseteq B(I)$, $|I_p| \leq \omega$ とするときは明らか $I_p \subseteq I_\alpha$
 for all $\alpha \in \omega_2$ としてよい。

$M \models CH$ ならば collec. $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ of countable subsets
 に対し Δ -system lemma が適用できる。従って一般
 性を失うことなく $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ は Δ -system with root
 $K \supseteq I_p$ としてよい ([4] 参照)。更に $\exists i \in \omega+1$
 $\forall \alpha < \omega_2 \quad |I_\alpha \setminus K| = i$ としてよいから、 $\forall \alpha, \beta \in \omega_2$ に対し
 K 上の点を fix する bijection $\pi_{\alpha\beta} : I_\alpha \rightarrow I_\beta$ 2" $\pi_{\beta\alpha} = \pi_{\alpha\beta}^{-1}$
 なるものが定まる。 $\pi_{\alpha\beta}, \pi_{\beta\alpha}$ の両方を extend して

permutation of I を $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}: I \rightarrow I$ とする。 $\pi_{\alpha\beta}, \tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ が induce する automorphisms を同じ文字で表す。

$$\pi_{\alpha\beta}: B(I_\alpha) \rightarrow B(I_\beta), \quad \tilde{\pi}_{\alpha\beta}: B(I) \rightarrow B(I)$$

ω から $B(I_*)$ where $|I_*| = \omega$ への関数は CH より高い $\omega_1 = \aleph_1$ しかないから、次の diagram が可換になるような $\alpha < \beta < \omega_2$ が存在するはずである。

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\dot{b}_\alpha} & B(I_\alpha) \\ \parallel & \searrow \downarrow \pi_{\alpha\beta} & \\ \omega & \xrightarrow{\dot{b}_\beta} & B(I_\beta) \end{array}$$

これは、 $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ が induce する isomorph. $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}: M^{B(I)} \rightarrow M^{B(I)}$ を考えれば、 $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\dot{b}_\alpha) = \dot{b}_\beta$, $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\dot{b}_\beta) = \dot{b}_\alpha$ となることを示さなければならない。よって、 $p \Vdash \langle \dot{b}_\alpha \rangle > \langle \dot{b}_\beta \rangle \text{ mod. } J_0$ なる関係を $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ より写せば

$$\pi_{\alpha\beta}(p) \Vdash \langle \dot{b}_\beta \rangle > \langle \dot{b}_\alpha \rangle \text{ mod. } \tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0)$$

となる。 $I_p \subseteq K$ より $\pi_{\alpha\beta}(p) = p$ 。また $J_0 \in M$ より $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0) = J_0$ だから

$$p \Vdash \langle \dot{b}_\beta \rangle > \langle \dot{b}_\alpha \rangle \text{ mod. } J_0$$

ゆえに、 $M[G]$ において $\langle b_\alpha \rangle > \langle b_\beta \rangle \text{ mod. } J_0$

かつ $\langle b_\beta \rangle > \langle b_\alpha \rangle \text{ mod. } J_0$ となり、矛盾である。

(証明終)

この証明においては、"random" real の特性は全く使用していないので、この定理の結果は、"random"に限らず一般の reals を add するときにも、その付加の仕方が "side-by-side" すなわち "product" forcing ならば成立する。たとえば Cohen reals を add するときも OK である。しかし Cohen reals の場合は ω_1 -scale は存在しない。

定理 4 の結論は、"topological" に表現すれば、 ω^* から ω_1^* の上への continuous map は存在しないということである。上のようになら automorphisms を利用する証明方法は Kunen により開発されたものである。(Kunen の Doctor 論文参照)。しかし、この方法だと "iterated" forcing の場合は全くわからない。

問題 Iterated random extension のときに定理 4 が成立するか？ 一般に ccc iterated extension のときはどうか？

なお、 σ -代数の automorphism を利用した研究として、難波先生によるすぐれた記述(数理科学講究録 No. 480)があるので参照したい。

《文献》

- [1] W.W. Comfort "Compactifications : recent results from several countries " Topology Proc. 2 (1977) 61-87
- [2] R. Frankiewicz "Assertion $\mathcal{Q}$ distinguishes topologically w^* & m^* " Coll. Math. 38 (1978) 175-177
- [3] R. Frankiewicz, B. Balcar "To distinguish topologically the spaces m^* II " Bull. Polo. Soc. 26 (1978) 521-523
- [4] K. Kunen's book "Set Theory" North-Holland (Δ -system lemma $\kappa \leq \aleph_1$ p.49)
- [5] K. Kunen "Some points in $\mathfrak{pN}$ " Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976) 385-398.