

標数 2 の D_4^1 型特異曲面のジェットスキームの 特異点上のファイバー

是枝由統

広島大学

2022 年 10 月 19 日

k : 任意標数の代数閉体

S	: 原点に <u>有理 2 重点</u> をもつ曲面
S_m	: 「 m 次ジェットスキーム」($m > 0$)
$\pi_m : S_m \rightarrow S$	: 「切り詰め射」

標数 0 の場合、 $m \gg 0$ で次の 1 対 1 対応が知られている (Mourtada) :

最小特異点解消の例外曲線 $C_i \leftrightarrow \pi_m^{-1}(0)$ の既約成分 Z_i

さらに A_n -、 D_4 -型の有理 2 重点について、 $i \neq j$ に対し

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \Leftrightarrow Z_m^i \cap Z_m^j \text{ が包含関係で極大}$$

(K. "On the configuration of the singular fibers of jet schemes of rational double points", Comm. Algebra 50 (2022), no. 4, 1802–1820.)

正標数の場合に同様のことが成り立つか？

→ 標数 2 の場合に次のような結果が得られた。

主結果

特異点解消グラフが D_4 型になる有理 2 重点について

- 1、 $\pi_m^{-1}(0)$ は 4 つの既約成分に分解される。
- 2、 「2 つの既約成分の共通部分」が極大 $\Leftrightarrow$ 対応する例外曲線が交わる

標数 2 の場合、特異点解消グラフが D_4 型となる有理 2 重点は 2 種類ある。

$$D_4^0 : f = x^2 + y^2z + yz^2 = 0,$$

$$D_4^1 : g = x^2 + y^2z + yz^2 + xyz = 0$$

今回の発表

$\rightsquigarrow D_4^1$ 型の特異点上のファイバーの既約成分について詳しく見る

準備：ジェットスキームの定義

Sch/ k : k 上のスキームの圏

Set : 集合の圏

$S \in \mathbf{Sch}/k$: k 上有限型のスキーム

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$F_m^S : \mathbf{Sch}/k \rightarrow \mathbf{Set}; Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \times \mathrm{Spec} k[t]/\langle t^{m+1} \rangle, S)$$

は k 上有限型のスキーム S_m により表現される表現可能関手である。

定義 (ジェットスキーム)

関手 F_m^S を表現する S_m を S の m 次ジェットスキームという。

準備：ジェットスキームの記述

$$S = \mathbf{V}(g) \subset \mathbb{A}_k^3 \quad (g = x^2 + y^2z + yz^2 + xyz)$$

このとき、 $m(\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 次ジェットスキームは次のように記述できる。

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \cdots + x_mt^m, \mathbf{y} = y_0 + y_1t + y_2t^2 + \cdots + y_mt^m, \\ \mathbf{z} = z_0 + z_1t + z_2t^2 + \cdots + z_mt^m \text{ とする。}$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv g^{(0)} + g^{(1)}t + g^{(2)}t^2 + \cdots + g^{(m)}t^m \pmod{t^{m+1}}$$

$(g^{(0)}, \dots, g^{(m)}) \in k[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m, z_0, \dots, z_m]$ と表す。このとき S_m は $(\mathbb{A}^3)_m \cong \mathbb{A}_k^{3(m+1)}$ 内で

$$\langle g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(m)} \rangle$$

で定められる部分スキームである。

⇨ 今回は標数 2 より、 $\mathbf{x}^2 = x_0^2 + x_1^2t^2 + x_2^2t^4 + \cdots + x_m^2t^{2m}$ などとなる。

特異点上の既約成分

$S = \mathbf{V}(g) \subset \mathbb{A}_k^3$: 原点に D_4^1 型の特異点をもつ曲面

定義 (特異ファイバー)

$(\mathbb{A}_k^3)_m \cong \mathbb{A}_k^{3(m+1)}$ 内でイデアル

$$\langle x_0, y_0, z_0, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle$$

で定義される部分集合を特異ファイバーといい、 S_m^0 で表す。

特異ファイバーの既約成分について次のことが得られた。

主結果 1

$m \geq 5$ のとき特異ファイバー S_m^0 は 4 つの既約成分に分解される。また、既約成分の $(\mathbb{A}^3)_m$ 内での余次元は $m + 2$ である。

特に $I_m^0 := \langle x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle$ とおくとき $Z_m^0 := \mathbf{V}(I_m^0)$ は S_m^0 の既約成分である。

主結果 1 の概要

$$I_m^0 := \langle x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle, \quad Z_m^0 := \mathbf{V}(I_m^0)$$

証明の概要

$$Z_m^0 = \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(y_2)} \cup \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(z_2)} \cup (Z_m^0 \cap \mathbf{V}(y_2, z_2)) \subset (\mathbb{A}^3)_m = \mathbb{A}^{3(m+1)}$$

と考える。

$$\overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(y_2)} = \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(z_2)} : \text{既約かつ余次元が } m+2 \text{ であり、}$$
$$I_m^0 : m+2 \text{ コの元で生成される。}$$

$\leadsto Z_m^0 \cap \mathbf{V}(y_2, z_2)$ の余次元が $m+3$ 以上であることを示せば、クルルの標高定理より Z_m^0 の既約成分を含まず、 Z_m^0 が既約であることが示せる。

D_4^1 型の既約成分

$$g = x^2 + y^2z + yz^2 + xyz$$

$$S = \mathbb{V}(g)$$

$$R_m = k[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m, z_0, \dots, z_m] \quad (m \geq 5)$$

とする。このとき S_m^0 の既約成分は次のように与えられる。

$$I_m^0 := \langle x_0, x_1, x_2, \quad y_0, y_1 \quad z_0, \quad z_1, \quad f^{(0)}, \dots, f^{(m)} \rangle$$

$$J_m^i := \langle x_0, x_1, \quad y_0, \quad z_0, \quad h_i, \quad f^{(0)}, \dots, f^{(m)} \rangle$$

ただし、 $h_1 = y_1, h_2 = z_1, h_3 = y_1 + z_1$ とする。

また、

$$I_m^1 := J_m^1 \cdot (R_m)_{z_1} \cap R_m,$$

$$I_m^i := J_m^i \cdot (R_m)_{y_1} \cap R_m \quad (i = 2, 3),$$

として

$$Z_m^i = \mathbb{V}(I_m^i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

主結果 2

主定理

$m \geq 5$ とし、 Z_m^i を上の通りとする。このとき $S_m^0 (= Z_m^0 \cup Z_m^1 \cup Z_m^2 \cup Z_m^3)$ の既約成分の共通集合、 $\{Z_m^{l_1} \cap Z_m^{l_2} \mid 0 \leq l_1 < l_2 \leq 3\}$ の極大元は

$$Z_m^0 \cap Z_m^1, Z_m^0 \cap Z_m^2, Z_m^0 \cap Z_m^3.$$

さらに $m \gg 0$ のとき、次のグラフを考える。

頂点： S_m^0 の既約成分

辺：二つの既約成分の共通集合が $\{Z_m^i \cap Z_m^j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ で極大

系

上の方法で構成したグラフは、 S の最小特異点解消の例外曲線の双対グラフに同型