

液体 He II のなかの He^3

—— 松田・松原論文へのコメント ——

碓 井 恒 丸 (基研)

長 岡 洋 介 ()

(11月18日受理)

1⁰ 本誌前々号にのつた松田・松原の論文「液体 He^3 - He^4 の二相分離」¹⁾ (以下MMと略称)を読んで、またコロキウムで松田さんの話をきいて、若干の疑問をもつた。MMは松田・松原の He II の格子模型によつて問題をあつかうのであるが、その際基本的な仮定として He^3 atom は液体 He^4 のなかで一定体積の cavity をつくつて局在するとする。 He^4 とほとんど同じ質量をもつ He^3 が局在するということがまずわかりにくいことなのであるが、さらに詳しく云うとつぎのような点に疑問を感じたのである。

1) 純粹の He^4 の液体のなかの1ケの He^4 を不純物におきかえても、もしも不純物の質量が He^4 と同じであれば、基底状態のエネルギーは変化せず、置きかえに要するエネルギーは0のはずである。しかしMMによるとこれが0にならない。

2) 2ケの He^3 -atom が入つたとき He^3 間に働く effective な力を求めるのに、 He^3 の位置は止めて考えている。これは断熱近似をしたことになつてはいるが、 He^4 よりも軽い He^3 について断熱近似は許されないだろう。

3) He^3 は Fermion だから、互に近寄りにくいはずであるが、この統計の効果は考慮されているか？

このような疑問から出発して、問題をいろいろ考えているうちに気のついたことを、二、三ノートしておこうと思う。以下、大雑ばな推論も多いが、

批判・討論をいただければ幸いである。

2° MMにならつて、まず1ケの He^3 atom が He^4 の純粋な液体のなかにある場合を考えてみよう。 0°K で考えることにする。いま、 $(N+1)$ ケの He^4 の系Ⅰと、そのうち1ケが He^3 におきかわつた系Ⅱとを比べてみる。系のHamiltonian はそれぞれ

$$H_I = \frac{1}{2m} \sum_i^{N+1} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i^{N+1} \sum_j^{N+1} v(x_i - x_j) \quad (1)$$

$$H_{II} = \frac{1}{2m} \sum_i^N p_i^2 + \frac{1}{2m'} p_a^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N v(x_i - x_j) + \sum_i^N v(x_a - x_i) \quad (2)$$

と書ける。添字 i, j は He^4 , a は He^3 を示す。 m, m' はそれぞれ He^4, He^3 の質量。いまⅠの基底状態の波動関数を $\Psi_I(x_1 \cdots x_N, x_{N+1})$, そのエネルギーを E_I としよう。 $m=m'$ であればⅡの基底状態の波動関数は

$$\Psi_{II}^{(0)}(x_1 \cdots x_N, x_a) = \Psi_I(x_1 \cdots x_N, x_{N+1}) \quad (3)$$

となるはずである。そこで第0近似として(3)を採用し、 H_{II} の期待値を求めてみる。(2)は

$$H_{II} = H_I \{ N+1 \rightarrow a \text{ のおきかえ } \} + \frac{m-m'}{2mm'} p_a^2$$

と書きかえられるが、第一項を(3)ではさんだものは E_I を与えるから、結局

$$E_{II}^{(1)} = E_I + \frac{m-m'}{m'} \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \quad (4)$$

となる。 $\langle p^2/2m \rangle$ はⅠでの He^4 1ケあたりの平均の運動エネルギー。

(4)が正しい E_{II} に対する上限を与えることは明かである。

$\langle p^2/2m \rangle$ については London の estimation があるが、²⁾ それによると 29 cal/mol である。この値を用いると $(m-m')/m'=1/3$ だから、われわれは

$$\Delta E = E_{II} - E_I \lesssim 9.6 \text{ cal/mol.} \quad (5)$$

を得ることになる。

ここで 0°K で純粋な He⁴ と He³ の二相が平衡にあり得るかという問題を考えてみよう。そのためには、1) 1ケの He⁴ が He³ の相にうつった時のエネルギーの得失、2) 1ケの He³ が He⁴ の相にうつった時のエネルギーの得失、を知らねばならない。1) に答えるには He³ の液体のなかの He⁴ の問題を解決しなければならない。これは、上のように簡単にはいかないようである。そこでこれはひとまず諦めることにして、2) の問題を考えてみよう。実験によると、純粋の He⁴ の液体から 1ケ He⁴ をとり出すのに要するエネルギー ϵ_4 は 14.3 cal/mol、純粋の He³ の液体から 1ケ He³ をとり出すのに要するエネルギー ϵ_3 は 5 cal/mol である。²⁾

(5) で不等号を等号にした値をとることにすると、

$$\epsilon_3 - \epsilon_4 + \Delta E = 0.3 \text{ cal/mol} = 0.15^\circ\text{K} \quad (6)$$

で、1ケの He³ が He⁴ の相にうつるとエネルギーはわずかながら損をする。つまり He³ は He⁴ の相に入りこまないという結論になる。しかし、問題は十分微妙なようである。第一に、ほんとうの ΔE はもう少し小さくなり得る。第二に $\langle p^2/2m \rangle$ の estimation に不確定さが残っている。(6) の符号が逆転する可能性は十分あると言わなければならない。だから、 ϵ_3 、 ϵ_4 の理論的な estimation ということを別にしても、変分によつて ΔE がどの程度さがるかを見ること、 $\langle p^2/2m \rangle$ のもう少し確実な estimation など、問題は残っているわけである。変分の問題としては、例えば、He³ は He⁴

より軽いので、 He^4 のなかの He^3 は若干まわりを押し広げているはずで、(3)のかわりにそのような効果を入れた変分函数をつかつて ΔE を求めることができるのではなからうか？

ここで He^3 と He^4 の統計のちがいの効果と、質量差の効果ということに言及しておこう。MMの重要な結論の一つは、統計の効果も二相分離をひきおこすことにきいているということであつた。はたして、この二つの効果は、(6)の値を大きくする方にきくか、小さくする方にきくか——すなわち、 He^3 を He^4 の相に入りにくくするか、入りやすくするか？まず ϵ_3 と ϵ_4 の大きな差がある。この差には二つの効果がともにきいているはずだが、二つともが $(\epsilon_3 - \epsilon_4)$ を減少させる方向に働いていることは自明であろう。一方 ΔE は純粹に質量差の効果である。結局、合計すれば、質量差の方は(6)を増加させ、統計の効果は減少させる。 He^3 が Fermion だということは、むしろ二相分離をおこりにくくさせていると言うべきだろう。

3° 再びMMにならつて He^4 の液体のなかに2ケの He^3 が入っている場合を考えよう。MMは He^3 は x_a と x_b に止つているとして、そのまわりの He^4 の系のエネルギーを求め、 He^3 の間に effective に引力が働くことを示した。これはまさしく断熱近似である。この近似のよし悪しはあとで論じるとして、ここでは、断熱近似をとれば、別のやり方でも引力が出ることを示そう。

いま condensate の波動函数を $\Psi(x)$ とする。 x_a と x_b に不純物が局在している場合を考えると、簡単のため相互作用はすべて δ -型として、系のエネルギーは

$$E = -\frac{1}{2m} \int \Psi(x) \nabla^2 \Psi(x) dx + v \int \Psi(x)^4 dx + v' [\Psi(x_a)^2 + \Psi(x_b)^2] \quad (7)$$

となる。不純物との相互作用は He⁴ 同志の相互作用 v とは異なり、 v' であるとしてある。ここで $\Psi(x)$ を

$$\Psi(x) = \sqrt{n_0} + \phi(x) \quad (8)$$

とおき、変分で $\phi(x)$ を決めようというのである。粒子数の決った閉じた系で考えるよりは、不純物を含まない大きな系と接した開いた系で考える方が都合がよい。すなわち、

$$\Omega = E - \mu_0 N, \quad N = \int \Psi(x)^2 dx \quad (9)$$

を minimize するように $\phi(x)$ を決めるのである。 μ_0 は不純物を含まない時の化学ポテンシャルで、 $\mu_0 = n_0 v$ である。簡単な計算で、 $\phi(x)$ を決める方程式は、最低次で

$$[\nabla^2 - \kappa^2] \phi(x) = 2m \sqrt{n_0} v' [\delta(x-x_a) + \delta(x-x_b)] \quad (10)$$

$$\kappa^2 = 4n_0 m v$$

となる。 $x \rightarrow \infty$ で 0 となるような解は

$$\phi(x) = -\frac{m \sqrt{n_0} v}{2\pi} \left\{ \frac{e^{-\kappa|x-x_a|}}{|x-x_a|} + \frac{e^{-\kappa|x-x_b|}}{|x-x_b|} \right\} \quad (11)$$

と得られる。これを (9) に代入して effective な相互作用が得られる。不純物の自己エネルギーにあたる部分が発散するが、これは相互作用を δ -型にしたせいだから気にしないことにして effective な相互作用の部分だけ書く、と、

$$E_{\text{int}}(x_a, x_b) = -\frac{2m n_0 v'^2}{\pi} \frac{e^{-\kappa|x_a-x_b|}}{|x_a-x_b|} \quad (12)$$

となつて screened Coulomb 型の引力が得られることになる。これは摂動でいうと，不純物が virtual に 1 個 phonon を交換することで生じる引力に相当していて，実際そのような計算をしても，全く同じ結果が得られる。⁴⁾

4° 3° でやつた計算は，実は x_a, x_b に止めた粒子が不純物である必要は全くない。純粋な He^4 のなかで特定の二つの He^4 の位置を人為的に止めたとしても， $v'=v$ とするだけで結果は全く同じである。勿論，実際にはこのような力は存在しない。何故か？ どの He^4 atom と止つてはいず，まわりの He^4 と一緒に動きまわっているからである。

He^4 のなかの He^3 の場合はどうだろうか？ この場合も基底状態では， He^3 はまわりの He^4 の 0 点運動と一緒に動きまわっているはずである。そうであれば，(12) のような力はこの場合も働かないと考えるべきではなかろうか？

それではどう考えるべきで，力が働くとすればどんな力か？ われわれはつぎのように推論する。

He^4 のなかに少量の He^3 がとけている場合，この系の phonon mode は He^4 の density だけではなく， He^3 も含めた total density で書かれるはずである。このようにして， He^3 の自由度はその一部が collective motion の方にもつていかれており， He^3 の individual motion はそれをさし引いた残りとして与えられることになる。その相互作用としてはつぎのようなものが期待される。

1) かりに He^4 と He^3 の質量が等しいとする。考える He^3 がともに $k \sim 0$ の状態にあると， He^3 は流れのままにただようだけであつて，その存在によつて付近の He^4 の運動はほとんど変化をうけないだろう。従つて He^3 間の相互作用もない。しかし He^3 の波数が 0 でなくなると， He^3 が動くことによつてまわりに back flow を作り，2 つの He^3 の back flow 同志が overlap すれば effective に He^3 の間に力を生じることになる。

この機構による相互作用は，作用しあう He^3 の波数に依存し，波数が 0 のところでは消える。

2) 実際には $m' < m$ であるから， $k \sim 0$ でも He^3 のまわりの He^4 は少し押し広げられる。この質量差による He^3 のまわりのひずみ同志が overlap しても He^3 同志の effective な相互作用が生じ得る。これは勿論 $m' = m$ とおくと消える。^{*})

最後に注意しなければならないのは，1)，2) の機構による相互作用が引力に出たとしても，それだけで低温で三相分離がおこるということにはならないということである。もう一つ， He^3 が Fermion だということを考慮しなければならない。Fermion であるために He^3 の間には effective に斥力が働く。理論的には He^3 の真の individual motion に働く相互作用を求め，さらに統計の効果も考慮してはじめて答が得られるのではなからうか？

reference

- 1) 松田・松原： 物研 1 (1963)，17.
- 2) London: "Superfluid II"
- 3) T. Soda: preprint

^{*}) この機構による相互作用はある意味で断熱近似によつて求めることができよう。但し，そのとき v^* は質量差によるある effective な値をとらなければならない。