

On singularities arising from the minimal section
of ruled surfaces.

(Gorenstein 性と Frobenius 写像の関係)

専修大学 北海道短大 日高 文夫 (Fumio Hidaka)

筑波大学 数学系 泊 昌孝 (Masataka Tomari)

§ 1 Notations

本稿では以下の k の k 固定する。

k : 代数的閉体, $\text{ch}(k) = p \geq 0$.

A : 非特異射影曲線, genus $g \geq 2$ / k .

$\mathcal{L}$: line bundle / A , $\deg \mathcal{L} > 0$.

$$(\xi) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0.$$

ξ の extension は extension class $\xi \in H^1(A, \mathcal{L})$ で定まり、 ξ なる k の k である。

$$X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} S^n(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} A \quad \mathcal{E} \text{ による } \mathbb{P}^1\text{-bundle.}$$

exact sequence (ξ) は X/A に section ξ 定まる

これに $\pi^* \mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}_X$ と $\pi^* \mathcal{L}^{-1} \subset \mathcal{O}_X$ と

$$\mathcal{O}_X(A) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{L}^{-1} \quad \text{となる。}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & X \\ & \nearrow & \downarrow \pi \\ & & A \end{array}$$

$\deg \mathcal{L} > 0$ であるとき A は X の contraction となる。

$$\begin{array}{ccc} A \subset X & \xrightarrow{\psi} & W \ni w \\ \downarrow \pi & & \\ A & & \end{array}$$

即ち, ψ は proper, W は normal variety, $\psi(A) = \{w\}$ (一点)

$$X \setminus A \xrightarrow{\sim} W \setminus w.$$

本稿ではここで登場した特異点 (W, w) の Gorenstein 性について考えることとする。詳しく証明については [HT] 参照の事。

§ 2 Facts

$\xi = 0$ のとき, 即ち $\mathcal{E} = \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}^{-1}$ と分解するとき, W は自然に $\text{Spec} \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(A, \mathcal{L}^n)$ の projective closure である。

Fact 1 [H] $\xi \neq 0$ のとき

1) $\text{ch}(\mathcal{K}) = 0 \Rightarrow W$ は non-algebraic.

(このとき w のまわりには affine 近傍が存在しない)

2) $\text{ch}(\mathcal{K}) = p > 0 \Rightarrow W$ は projective.

$\xi = 0$ のときの (W, w) の Gorenstein 性については

Fact 2 [GW]

$(W, w) : \text{Gorenstein} \iff \exists a > 0 \text{ s.t. } K_A \simeq \mathcal{L}^a$

ここで K_A は A の canonical sheaf.

§ 3 $\xi \neq 0$ の case について.

まず $\xi \in H^1(A, \mathcal{L})$ であることより $0 < \deg \mathcal{L} \leq 2g-2$ である.

前節の Fact 2 に因連して $\xi \neq 0$ で 2 次である.

Lemma 3 $(W, \omega): \text{Gorenstein} \Rightarrow \exists a > 0$ s.t. $K_A \simeq \mathcal{L}^a$.

proof) (W, ω) が Gorenstein であることは ω の持ち方に十分注意して
 近傍 $W^0 \ni \epsilon$ により $\omega_{W^0} \cong \mathcal{O}_{W^0}$ と出来る. $X^0 := \phi^{-1}(W^0)$ である.

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{\phi} & W^0 \\ \cup & & \cup \\ A & \longrightarrow & \omega \end{array}, \quad X^0 \setminus A \xrightarrow{\sim} W^0 \setminus \omega \quad \text{なり}$$

$$\omega_{X^0} \cong \mathcal{O}_{X^0}(mA).$$

$X^0 \ni \epsilon$ の adjunction formula (なり)

$$K_A \simeq (\omega_{X^0} \otimes \mathcal{O}(A)) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{L}^{-(m+1)} \quad \text{g.e.d.}$$

(た $m, 2$, 以下 $\mathcal{L}$ に $m+2$ 次を仮定する.)

(仮定): $\exists a > 0$ s.t. $K_A \simeq \mathcal{L}^a$

Fact 2 に因連して $\mathcal{L}$ は a 得た結果は

Theorem 4 [HT] $\xi \neq 0$ ならば

1) $ch(\mathbb{K})=0$ ならば $(W, \omega): \text{Gorenstein} \Rightarrow \mathcal{L} \simeq K_A$

2) $ch(\mathbb{K})=p > 0$ ならば $(W, \omega): \text{Gorenstein} \Rightarrow p \mid a-1$

1) の略証) $\Leftarrow$ $K_X \simeq \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \sim -2A$ となり

(W, ω) の Gorenstein 性を得る. //

$\Rightarrow$) $\text{Pic } X = \mathbb{Z}[A] \oplus \pi^* \text{Pic } A$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\mathbb{Z}$ -divisor X $\perp$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$\Rightarrow$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$\psi^* \omega_w \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$ $\Rightarrow$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

X $\perp$ π^* exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_A(-A) \rightarrow \mathcal{O}_{2A} \rightarrow \mathcal{O}_A \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_{2A}^* \rightarrow \mathcal{O}_A^* \rightarrow 1$$

$\Rightarrow$ π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$$0 \rightarrow H^1(A, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Pic } 2A \rightarrow \text{Pic } A$$

$$A + \pi^*(\mathcal{L}) \in \text{Pic } X$$

$A + \pi^*(\mathcal{L})|_A = 0$ $\Rightarrow$ $A + \pi^*(\mathcal{L})|_{2A} \in H^1(A, \mathcal{L})$ $\Rightarrow$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$$A + \pi^*(\mathcal{L})|_{2A} = \text{Im}(-\xi)$$

$\Rightarrow$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$$\psi^* \omega_w|_{2A} = \text{Im}(-d\xi)$$

$\Rightarrow$ π^* divisor D π^* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$

$$\therefore \psi^* \omega_w \simeq \mathcal{O}_X$$

$$\therefore K_X \simeq \mathcal{O}(mA) \quad \text{for some } m$$

$$\simeq \mathcal{O}(-(a+1)A) \quad \text{by adjunction formula}$$

$$\simeq \mathcal{O}(-2A)$$

$$K_X \simeq \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \quad (*)$$

$$\therefore a=1$$

//

$\pi: X \rightarrow A$ の fibre $\mathbb{P}^1$ 上 $\pi^* \mathcal{O}_A(1) \cong \mathcal{O}_X(1)$ である。2) の証明
のため

Fact 5 [H] X 上の effective divisor D に対し $D \cap A = \emptyset$ ならば

$$\textcircled{1} \quad \text{ch}(K) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ch}(K) = p > 0 \Rightarrow p \mid (D \cdot f)$$

証明 2) W は projective Gorenstein variety である。

$$\omega_W \cong \mathcal{O}_W(D_1 - D_2) \quad (\text{1.7}). \quad \therefore D_1, D_2 \text{ は effective divisor}$$

で $D_i \not\subset W$ である。 $X \subset A \xrightarrow{\psi} W$ である。

$$\therefore \psi^*(D_i) \cong D_i \quad \text{である。}$$

$$K_X \cong \mathcal{O}_X(D_1 - D_2 + nA) \quad D_i \cap A = \emptyset$$

$\therefore A \subset X$ 上の adjunction formula である。

$$K_X \cong \mathcal{O}_X(D_1 - D_2 - (a+1)A) \quad \text{である。}$$

$$\therefore -2 = K_X \cdot f = pe_1 - pe_2 - a - 1 \quad (\because \text{Fact 5 a} \textcircled{2})$$

$$\therefore a - 1 = p(e_1 - e_2) \quad //$$

§ 4 $\text{ch}(K) = p > 0, \xi \neq 0$ の case について

$\text{ch}(K) = p > 0$ の場合の (W, ω) の Gorenstein 性に必要な条件
は次の結果である。

Proposition 6 $\text{ch}(k) = p > 0$, $\mathbb{E} \neq 0$ とする.

(W. w) : Gorenstein

$\Uparrow$

① $K_A \simeq \mathcal{L}^a$ for some a

② $a-1 = p^m g$ $(p, g) = 1$ とする.

③ $\exists$ divisor $D \subset X$ s.t. $|D| \cap A = \emptyset$ and

$$D \sim p^m (A + \pi^*(\mathcal{L}))$$

proof) $\Uparrow$ $K_X \simeq \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A$
 $\sim \pi^*(\mathcal{L}^{p^m g}) - 2A$
 $= g \{ p^m (A + \pi^*(\mathcal{L})) \} - (p^m g + 2)A$
 $\sim gD - (a+1)A$ //

$\Downarrow$ ① は Lemma 3, ② は Theorem 4 の 2) により $\mathbb{E} \neq 0$ ならば
 ③ となる. (W. w) は projective Gorenstein variety である
 のより $\omega_W \simeq \mathcal{O}_W(D)$ とする. $\therefore \omega \notin D$ とする
 $\therefore \omega \in \mathbb{E} \neq 0$. $\Psi^1(D) \simeq D$ である.

$$K_X \simeq D - (a+1)A \quad (\text{adjunction formula (2.3)})$$

$$\begin{aligned} \text{---} \Uparrow \quad K_X &\sim \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \\ &\sim \pi^*(\mathcal{L}^{a-1}) - 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore D &\sim \pi^*(\mathcal{L}^{a-1}) + (a-1)A \\ &= g \{ p^m (A + \pi^*(\mathcal{L})) \} \end{aligned}$$

Corollary 7 $ch(k) = p > 0, \xi \neq 0,$

$$K_A \sim \mathcal{L}^a, \quad a-1 = p^m g \quad (p, g) = 1 \quad \text{とある.}$$

$$\text{If } \text{Frob}^m(\xi) = 0 \quad \text{in } H^1(A, \mathcal{L}^{p^m})$$

$$\Downarrow \quad (W, w) : \text{Gorenstein.}$$

proof) Proposition 6 の証明と同様に $X_m = \mathbb{P}((\text{Frob}^m)^*(\mathcal{L}))$

(A) に 2 つの disjoint section σ_1, σ_2 と, 4 の positive section $A_w \in$

(A) " $D = g(A_w)_{\text{red}}$ とあるのは Prop. 6 の ③ を満たす. //

§ 5 Examples

Corollary 7 を用いて 3 を満たす ξ を探し出し, 4 1) の Gorenstein singularity の例を作ることになる.

Example 1 $ch(k) = p = 3, \quad g(A) = 3, \quad a = 4$ の例.

$$A \text{ 上の } - \text{点 } P \text{ において } 4P \sim K_A \quad \text{と仮定する.}$$

$$\therefore a \text{ と } 3 \quad \mathcal{L} := \mathcal{O}_A(P) \quad \text{とある.}$$

$$\text{Frob}: H^1(A, \mathcal{L}) \rightarrow H^1(A, \mathcal{L}^3)$$

$$\dim H^1(A, \mathcal{L}) = 2, \quad \dim H^1(A, \mathcal{L}^3) = 1 \quad \text{とある.}$$

$0 \neq \xi \in \ker \text{Frob}$ とある. Cor. 7 (1) (W, w) は Gorenstein とある.

± 3 に 11 体の 12 例を構成する。

Example 2 ($p=3, g=3, a=4$)

weighted projective space $\mathbb{P}(1, 3, 4) = \text{Proj } \mathbb{k}[x, y, z]$

11 の $\deg 12$ の 3 次式

$$f = -z^3 + x^{12} + y^4 + x^5 y z$$

に f を加えて projective curve $A = \text{Proj } \mathbb{k}[x, y, z]/f$

と定める。この A は non-singular $\mathbb{P}^2$ 上の curve $g(A)=3$ 。

$$R = \mathbb{k}[x, y, z]/f \quad \text{と定める。}$$

$$R/R_2 \cong \mathbb{k}[y, z]/y^4 - z^3 \quad \text{domain である。}$$

$$V_+(x) = P \in A \quad \text{一点を定める。}$$

$$\omega_A \cong \mathcal{O}_A(4P) \quad \text{である。}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{O}_A(P) \quad \text{と定める。}$$

Example 1 に $\mathbb{Z}$ 上の Frobenius action σ を 11 体の 12 例に記述する。

座標 $x \in \mathbb{A}^1$

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(A, \mathcal{O}(nP)) x^n$$

と定める。

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^1(A, \mathcal{O}(nP)) x^n \simeq H_{R+}^2(R)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (R/(x^{3t}, y^t))^{[6t]}$$

∞ の limit は

$$\begin{array}{ccc} (R/(x^{3t}, y^t)) [6t] & \longrightarrow & (R/(x^{3(t+1)}, y^{t+1})) [6(t+1)] \\ \psi & & \psi \\ \alpha & \longrightarrow & x^3 y \cdot \alpha \end{array}$$

に $\mathbb{Z}$ を定まる。 R は Cohen Macaulay であるから ∞ の injective system となる。 以下に $\mathbb{Z}$ の cohomology を示す。

$$\bigoplus_{n \geq -1} \left((R/(x^6, y^2)) [12] \right)_n \cong \bigoplus_{n \geq -1} H^1(A, \mathcal{O}_A(nP)) x^n$$

を示す。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ は cohomology の $\mathbb{Z}$ を示す。

n	$R_n = H^0(\mathcal{O}_A(nP)) x^n$	$\left((R/(x^6, y^2)) [12] \right)_n = H^1(\mathcal{O}_A(nP)) x^n$
0	1	$x^4 y z^2, x^5 z^2, x^6 y z$
1	x	$x^5 y z^2, x^6 z^2$
2	x^2	$x^6 y z^2$
3	x^3, y	$x^7 y z^2$
4	x^4, xy, z	$x^8 y z^2$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\zeta = x^2 y z^2, \zeta' = x^5 z^2 \in H^1(A, \mathbb{Z})$ とおく。

Frobenius action is

$$\begin{array}{ccc} ((R/(x^6, y^2))^{[12]})_1 & \xrightarrow{F^*} & ((R/(x^{18}, y^6))^{[36]})_3 \\ & \searrow \text{Frob} & \uparrow \cdot x^{12}y^4 \\ & & ((R/(x^6, y^2))^{[12]})_3 \end{array}$$

1st 2nd ζ_{12} 3rd 2nd

$$(x^2 y z^2)^3 \in R/(x^{18}, y^6)^{[36]} \text{ in } \mathbb{A}^1$$

$$z^3 = x^2 + y^4 + x^5 y z \in \mathbb{A}^1 \text{ is a unit}$$

$$F^*(\zeta) = x^{16} y^5 z^2$$

$$\therefore \text{Frob}(\zeta) = x^4 y z^2 \neq 0$$

Similarly ζ' is not a unit

$$F^*(\zeta') = 0$$

$$\therefore \text{Frob}(\zeta') = 0$$

Let $\zeta, \zeta' \in \mathbb{A}^1$ and let $\text{Cor. 7 (i)} (W, w)$ be Gorenstein and $\zeta = 3 \zeta'$.

Proposition 8.

$\zeta = \zeta'$ and (W, w) is Gorenstein.

証明には [TW] の injective criteria を用いる。

以上の様に (W, w) の Gorenstein 性については Frobenius mapping のみでは把握が出来なものの、例の構成には有用である。

References

- [GW] S. Goto, K-i. Watanabe, On graded rings I.
J. Math. Soc. Japan, 30 (1978) 179 - 213
- [H] F. Hidaka, Normal surface singularities associated to ruled surfaces.
Proc. of Symp. "Commutative Rings" No.7 (1985) 145 - 159
- [HT] F. Hidaka, H. Tomari, On singularities arising from the contraction of the minimal section of a ruled surface.
Manuscripta Math. 65 (1989) 329 - 347
- [TW] H. Tomari, K-i. Watanabe, Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with star-shaped resolution.
Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 no 5 (1989)

(日高 記)