

カオスの局在化

— 特に Spatio-Temporal intermittency について

京大理物理 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

§1 はじめに

Lorenz や Ruelle と Takens [1], [2] の研究以来, 流体现象にみられる不規則なゆらぎの由来をカオスと結びつける見方が急速に広まった。特にアスペクト比が小さい熱対流や Taylor-Couette 流などの流体の占める領域に強い制限がある系では、少数自由度の力学系で予見されたカオスへの普遍的な遷移過程— 周期倍化カスケード, 準周期運動の崩壊あるいは時間的な間欠性を経る道筋— を経て弱い乱流へ遷移する^①ことが実験により見い出された。しかし, 流体の空間的な広がりに対する制限が弱まると, 空間方向のゆらぎが重要になり考慮すべき系の自由度が増すため, やずしも少数自由度の力学系と対応しなくなる。我々が日常経験する流体の運動は後者であり, この様な現象を理解するための新しい視点が必要とされるであろう。

^① 数年, 空間的な広がりの方が大きい系である。後に述べる偏

微分方程式, Coupled-map を用いたシミュレーションや、熱対流, Taylor-Couette 流を用いた実験において、乱流(カオス)の部分と層流の部分が空間的に混在した状態を経る遷移過程が見い出されている。この乱流と層流の混在状態は spatio-temporal intermittency (以下 S.T.I. と略す) と呼ばれており、遷移過程においてのみならず、カオス(乱流)の存在形態の一つとして安定に存在する場合も創製されている。[3-8]

少数自由度の力学系においても、時間変動に対する間欠性 (intermittency) と呼ばれる現象がある。先にあげたカオスへの道筋の一つ (Pomeau-Mannville intermittency) や、カオスの一つの状態であるもの (Gratchfield intermittency) が知られており、これらの発生機構はよく理解されている。[7, 9] (Appendix)

これに反し、S.T.I. に関しては、研究が始まったばかりで、現象を説明する理論はまだ、たぐない状態であるが、以下の章で最近の定量的な結果を紹介する。

一方、空間的広がりをもつ系を多自由度の力学系とみなして、リャフノフスペクトルやリャフノフベクトル, エルミットロフエントロピーを用い、カオス特にストレンジアトラクターの性質を明らかにしようとする立場の研究がある。[10, 11] この立場は基本的には十分発達した乱流場の統計的性質を位相空間でのアトラクターの構造と関係づけようとするもので

あり、S.T.I. のような相空間の構造を問題にする立場には、あまり有効ではないように思われる。しかし、Ruelle は速度場の固く性とりやフノフスベクトルの零付近の分布密度の発散との関係を議論しており、あながち見込みがないわけではないかもしれない。[13]

この様子は比較的強いカオスでは、全体としてカオスではあるが空間の部分領域が独立したカオスのように振舞うカオスの局在化、が見られる場合がある。これは、位相空間の軌道の不安定な方向を表わすりやフノフベクトルが空間的に局在化していることから理解できる。[10, 12] S.T.I. と直接関係はないかもしれないが、空間的広がりが必要な系での状態の領域化の機構を理解する手がかりになると思われる。

以上は閉じた系（境界が固定されているか周期的な系）について概観したものである。しかし、S.T.I. は閉じた系だけでなく、境界層や管内流中のバースト及び乱流斑、ジェットや混合層にみられる乱流界面など開いた系においても特徴的な現象である。[9, 14, 24]

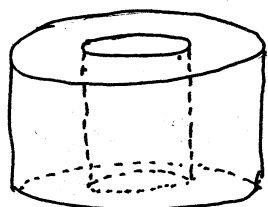
開いた系は、流れが流れ方向に発達すること、ヌノイズの影響が大きいなど、閉じた系とは異なる性質を持つ。[14] さらに閉じた系は多自由度のカオス系として扱うことも可能だが、開いた系ではカオスの定義としての軌道不安定性、

すら空間方向への発展を考慮して定義し直す必要があるなど取り扱いが難しい。^[15] 3章で用いた系のモデルとして1次元 Ginzburg-Landau 方程式を用い、ノイズと同次性の関係を扱った論文を紹介する。

8.2 閉じた系 (closed flow)

この章では、閉じた系での S.T.I. が存在するカオスへの遷移現象の1つとして、熱対流の実験で得られた結果を紹介する。同様の結果は、1次元 Coupled map 及び偏微分方程式を用いて得られている。^[8, 16, 17]

左図の様な2重円筒筒の熱対流を考える。^[16]

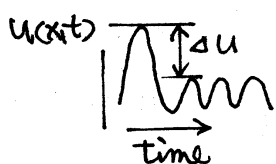


内径3cm, 外径4cm,
深さ1cm

観測量は、温度の方位角方向の勾配を軸方向に平均した量 $u(\theta, t) = (1/r_0) [\partial T(r_0, \theta, t) / \partial \theta]$ で、半径 $r_0 = 3.6 \text{ cm}$ の円周上128点で測定してい

る。支配パラメータは、対流開始の臨界値と与える温度差 ΔT_c で規格化した温度差 $\eta = \Delta T / \Delta T_c$ を用いる。

Fig 2.1 は $\eta = 248$ での $u(x, t)$ ($x = \theta/2\pi$) の時間発展を表わし、2おり強いバーストが空間的な秩序を局所的に破壊している。



この局所的な乱れと秩序を区別するために左図の様に $u(x_0, t)$ の時間方向の変動の1周期

分の振幅差 Δu が規準値 α を越えるとき乱流状

態、 α 以下のとき層流と定義する。Fig 2.2 a, b) で黒い領域は乱流、白い領域は層流を表わしており、それぞれ $\eta = 216, 248$ に対応する。

$\eta = 216$ では乱流領域は層流中にうめまわれており、その発生は他の乱流領域の存在と無関係に起る。一方、 $\eta = 248$ では乱流領域が層流領域を侵略していき、ここでは後者の状態を S.T.I. と呼んでおり、この2つの状態は $245 < \eta < 248$ でパーコレーション転移（二次相転移）を起こす。実際、層流領域の長さ x の分布 $P(x)$ は、

$$P(x) = \begin{cases} Ax^{-\mu} & 200 < \eta \lesssim \eta_s \\ (Ax^{-\mu} + B) \exp[-m(\alpha, \eta)x] & \eta_s \lesssim \eta < 400 \end{cases}$$

$$m(\alpha, \eta) = m_0(\eta) e^{-\alpha/\alpha_0} = m_1(\eta/\eta_s - 1)^{1/2}.$$

$$[A = 10^5, B \simeq 4 \times 10^3, \mu = 1.9 \pm 0.1, \eta_s = 247 \pm 1, m_1 = 11.7 \pm 2.]$$

と得る。(Fig 2.3, 24)

従って層流領域の平均長さ $\bar{x} = \int_0^L x P(x) dx$ は

$$\bar{x} \simeq \begin{cases} AL^{2-\mu}/(2-\mu) & \eta < \eta_s \\ B/(\eta - \eta_s) & \eta > \eta_s, \end{cases}$$

で、 $\eta \simeq \eta_s$ を境に層流領域の長さは系の長さのオーダーになり、 $\eta \lesssim \eta_s$ では巨視的にみると全体が層流状態になっていることを表わしている。一方、 $\eta > \eta_s$ では系は $\eta - \eta_s$ に応じた割合で乱流領域と層流領域の混在した状態になっていることを

示しており、このため $\eta > \eta_s$ の場合を S.T.I. と呼ぶのである。

以上のよう、S.T.I. を経た遷移現象は相転移で記述できるとことが明らかにされた。同様の現象や他のいくつかの系でも見られるが、この相転移が普遍性をもつのかどうか又、そのメカニズムについては、今後の研究により明らかにすることがあろう。

⑦ ニンビの乱流領域及び層流領域の区別はカオスの定義とはまったく別な任意性のあるものである。いまのところ、一意的な区別の方法は見い出されてはいない。

§3. 開いた系 (Open flow)

1章で閉じた系と開いた系では取り扱いが異なると書いた。とろじ、Sreenivasan は、円柱の後流が少数自由度の力学系と相似であることと実験により見出した。[14, 25] この様に円柱後流で特別な周波数をもつ強い振動が維持されるのは、円柱の近くで流れが絶対不安定 (absolutely unstable) であるからで、すべての開いた系で成り立つものではない。[23] むしろ流れは対流不安定 (convectively unstable) であることが多くこの場合系の固有の構造 (振動) より外からの影響 (たとえばノイズ) による構造が出現する。この結果、流れの中

に乱下部分と秩序的な部分が生じる。以下ではこのような
ノイズに依存した間欠性を示すモデルとして、1次元 Ginzburg-
Landau 方程式を用いた Deissler に対する論文を紹介する。[22]

Ginzburg-Landau 方程式は、単色波型擾乱の振幅の変動を
記述するもので

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\psi - v_g \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - c|\psi|^2\psi \quad \dots\dots (3.1)$$

の形をしている。係数 a, b, c は複素数で v_g は群速度である。
以下で示すように $v_g \neq 0$ が対流不安定を起す必要条件にな
っており、平板ポアソニユ流や風波などではこの条件を満し
ている。方程式 (3.1) の解 $\psi=0$ の線形安定性を調べると係数
の値によって以下のようになる。(添字 r は real part を表わす)

$$\begin{cases} a_r - v_g^2 b_r / 4|b|^2 > 0 & : \text{絶対不安定} \\ a_r < 0 & : \text{絶対安定} \\ a_r - v_g^2 b_r / 4|b|^2 < 0 \text{ かつ } a_r > 0 : \text{対流不安定} \end{cases}$$

以下、対流不安定であるように係数を求め (3.1) をシミュレ
ーションによって解の性質を調べるが計算の詳細は論文を参
照してほしい。境界条件は、ノイズの解への影響を見てい
るので $x=0$ で乱数を与えている。又、用いた系の近似として
他方の端 $x=L$ で $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$ とおいている。

解は Fig 3.1 にみられるような構造をしており、 $x=0$ で加え
たノイズを取り除くと $\psi=0$ の状態にもどるため(対流不安

定), この構造をノイズによって維持された構造 (Noise-Sustained structure) と呼ぶ。解は原点に近い方から、線形領域, 遷移領域及び乱流領域の3つの部分から成っている。以下各領域について概観する。

1. 線形領域

$x=0$ で加えられた擾乱が十分小さく線形と考えられる領域。 $(0 \leq x \leq 30$ の部分) 微小なランダム擾乱は振幅の増大とともに定まらねていく。(Fig 3.2) これは $Ae^{\beta x - i\omega t}$ 型の擾乱に対する線形分散関係 $-i\omega = \alpha\beta v_g + \beta^2 b$ で $\text{Re}(\beta)$ の最大値を与える振動数 ω_{max} のまわりで空間増幅率 $\text{Re}(\beta)$ が正になるため、これらの振動数をもつ擾乱が下流に行くに従って強く成長するためである。またこの結果、最大空間増幅率をもつ擾乱が選ばれることになる。 $x=0$ のノイズと各空間点での変動の相関は強く、この領域の構造がノイズにより維持されていることが明らかである。(Fig 3.3)

2. 遷移領域

線形領域で選振された擾乱が非線形な発展を経て乱流域へ遷移する領域。 $(35 \leq x \leq 270)$ この領域の前半部分は単色波に近い波形をしている。(Fig 3.4) これは、

$$\psi(x,t) = A e^{ikx - i\omega t}, \quad |A| = \frac{1}{c_r} \frac{1}{2} (a_r - k^2 b_r)^{1/2},$$

$$k = v_g \pm [v_g^2 - 4 \left(\frac{b_r c_i}{c_r} - b_i \right) \left(a_i - \frac{c_i a_r}{c_r} + \omega \right)]^{1/2} / 2 \left(\frac{b_r c_i}{c_r} - b_i \right),$$

$w = w_{max}$ で与えられる非線形平面波解に近く一致している。さらに下流に行くと、この平面波解は不安定化し(対流不安定)乱流化する。従って乱流への遷移は、平面波解の二次不安定性によっても引き起こされる。ノイズと各空間点の変動との相関は、上記平面波解の領域ではまだ強いが、乱流化した領域では消えてしまう。(Fig 3.5)。一方、原点で w_{max} で振動する擾乱を導入し、5周期目ごとの振幅だけ大きくしてやると下流ではこの振幅変動を加えた部分に不規則な変動が生じる。(Fig 3.6) このことより、平面波解の中にまじったノイズに由来する局所的なゆらぎが下流での局所的な不安定化(バースト)を引き起こし、この部分が周りの領域に広がることにより乱流へ遷移させる。つまり遷移領域に見られる固欠性はノイズに由来する。

3. 乱流領域

この領域の不規則に見える変動を乱流と呼んではが、いわゆるカオスの定義に従っているわけ不明である。この領域の変動を調べるために、速度に依存したリャプノフ指数を以下の様に定義する。

$$\Lambda(v; x_1, x_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [\xi(v; x_1, x_2, t) / \xi(v; x_1, x_2, 0)]$$

$$\xi(v; x_1, x_2, t) = \left[\int_{x_1+vt}^{x_2+vt} |\delta\psi(x, t)|^2 dx \right]^{1/2}$$

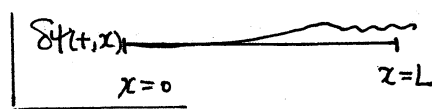
$$(\partial\delta\psi/\partial t = a\delta\psi - v_g\partial\delta\psi/\partial x + b\partial^2\delta\psi/\partial x^2 - 2c|\psi|^2\delta\psi - c\psi^2\delta\psi^*)$$

ここで $v=0$ とおけば通常のリャフノフ数の定義に一致する。

v_m を $\lambda(v; x_1, x_2)$ の最大値を与える速度とすると、
 $\lambda(v_m; x_1, x_2)$ が正のとき、領域 $\{x_1 + v_m t, x_2 + v_m t\}$ で系は
 カオスであるとする。又、 $|x_2 - x_1|$ を大きくすると、一般に
 それは x_1, x_2 に依存しなくなる。

(3.1)式に対し、全領域 $x \in [0, L]$ で通常のリャフノフ数を
 計算すると、 $\lambda(0; 0.300) = -0.89 \pm 0.01$ を得る。これは $\delta\psi$
 がノイズの影響を受けたいため ($\delta\psi(0, t) = 0$)、初期には増幅
 してもこの擾乱の中に部分が領域の外へ出てしまえば減衰する
 からである。(右図参照) 一方、 $L \rightarrow \infty$ $\delta\psi(0, x)$

とし局在化した擾乱 $\delta\psi$ を初期に
 領域 $[x_1, x_2]$ に与えたとき、適当な



v に対して正のリャフノフ数 $\lambda(v; x_1, x_2)$ が得られたとき、こ
 のタイプのカオスを対流型カオス (convective chaos) と呼
 ぶ。つまり、カオス自身の移動速度で動く座標系に乗るとき
 カオスが見えてくるのである。ここでこの定義にもとづ
 かず(実際上の計算不可能) 周期境界条件のもとで (3.1) 式
 を解き、通常のリャフノフ数を求め、正の値 (0.38 ± 0.01) を
 得ており、このカオスが対流型であると結論づけている。

以上の結果をまとめると、(1)線形領域では空間増幅率が
 最大の擾乱が選択される。ただしノイズとの相関は強い。

(2)遷移領域では前領域で選択された擾乱が非線形平面波解に発展した後、二次不安定化し乱流に移る。この不安定の原因はノイズに由来する局所的な変動で、この部分がすずバーストとして不安定化し回りの領域に広がるという。局所的な過程を経る。(3)乱流領域の不安定変動は対流型のカオスである。

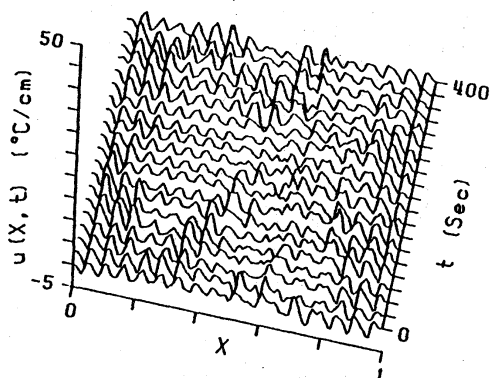
§.4. むすび

2章3章で空間的広がり大きな閉じた系及び開いた系についてのいくつかの研究を概観した。2章の例は実験から得た結果であったが、それ以外のもう、1次元偏微分方程式やcoupled mapをモデルに用いたものであり、流体现象との定性的なアナロジーを得てゐるだけである。これらの研究が目標にしてゐる乱流への道筋の解明、特にその過程にみられるS.T.I.の現象を完全に理解するためには、さらに新しい観点に立つたカオスの記述法や別のアプローチが必要であろう。

引用文献

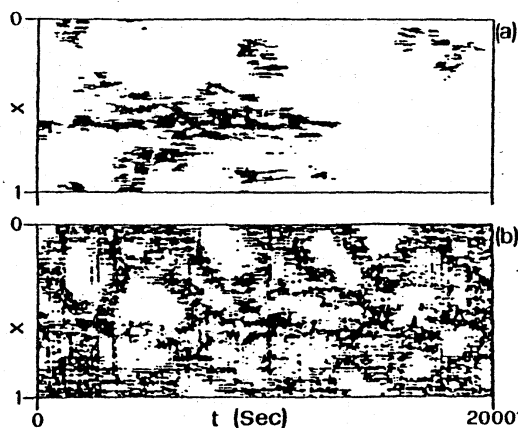
1. Lorenz, E.N.: J. Atoms. Sci. 20(1963) 130
2. Ruelle, D. and Takens, F.: Comm. Math. Phys. 20(1971) 162
3. Jensen, M.H. et al: Phys. Rev. Lett. 55(1985) 2798
4. Stavans, J. et al: Phys. Rev. Lett. 55(1985) 596
5. Andereck, C.D. et al: J. F. M. 164(1986) 155
6. Baxter, G.W. and Andereck, C.D.: Phys. Rev. Lett. 57(1986) 3046
7. Keeler, J.D. and Farmer, J.D.: Physica 23D(1986) 413
8. Kaneko, K.: Prog. Theor. Phys. 74(1985) 1033
9. 翼 友正編: 「乱流現象の科学」 東大出版(1986)
10. Ikeda, K. and Matsumoto, K: Physica 29D(1987) 223
11. Yamada, M. and Ohkitani, K.: Phys. Rev. Lett. 60(1988) 983
12. Livi, R. et al: J. Stat. Phys. 48(1987) 539
13. Ruelle, D.: Comm. Math. Phys. 87(1982) 287
14. Sreenivasan, K.R.: in Frontiers in Fluids Mechanics p.41
Edited by Davis, S.H. and Lumley, J.L.
15. Kaneko, K.: Physica 23D(1986) 436
16. Ciliberto, S. and Bigazzi, P.: Phys. Rev. Lett. 60(1988) 286
17. Chaté, H. and Manneville, P.: Phys. Rev. Lett. 58(1987) 112
18. Oppo, G.L. and Kapral, R.: Phys. Rev. A33(1986) 4219
19. 高安秀樹: 「フラクタル」 朝倉書店(1986)
20. Deissler, R.J.: J. Stat. Phys. 40(1985) 371

21. Deissler, R.J.: Phys. Lett. 120A(1987) 334
22. Deissler, R.J.: Physica 25D(1987) 233
23. Chomaz, J.M. et al: Phys. Rev. Lett. 60(1988) 25
24. Sreenivasan, K.R. and Meneveau, C. J. F. M. 173(1986) 357
25. Olinger, D.J. and Sreenivasan, K.R.: Phys. Rev. Lett. 60(1988) p.797
26. Deissler, R.J.: Phys. Fluids 30(1987) 2303



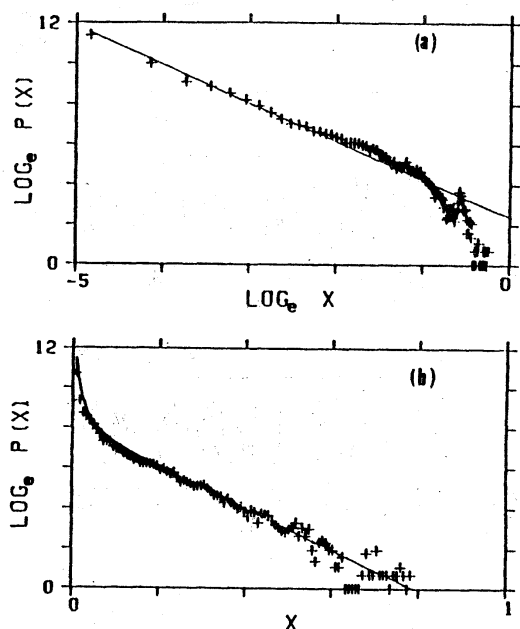
Space-time evolution of $u(x,t)$ at $n=248$.

Fig 2.1



Binary representation, at $\alpha=1.5^\circ\text{C/cm}$, of the space-time evolution of $u(x,t)$ at (a) $\eta=216$ and (b) $\eta=248$. The dark and white areas correspond to turbulent and laminar domains, respectively.

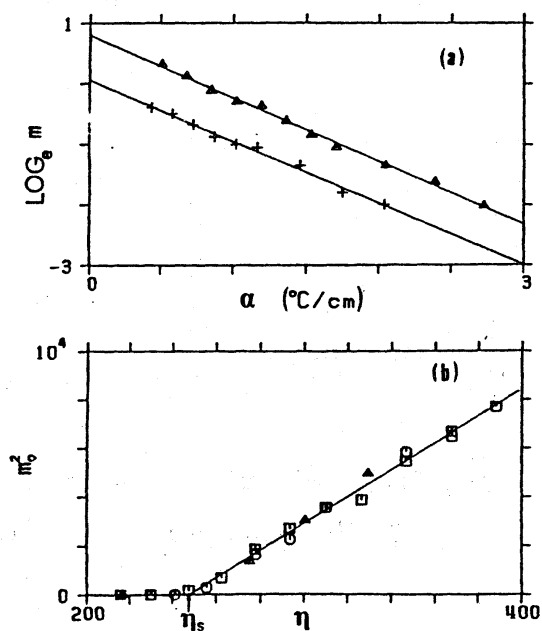
Fig 2.2



(a) $\eta=241$

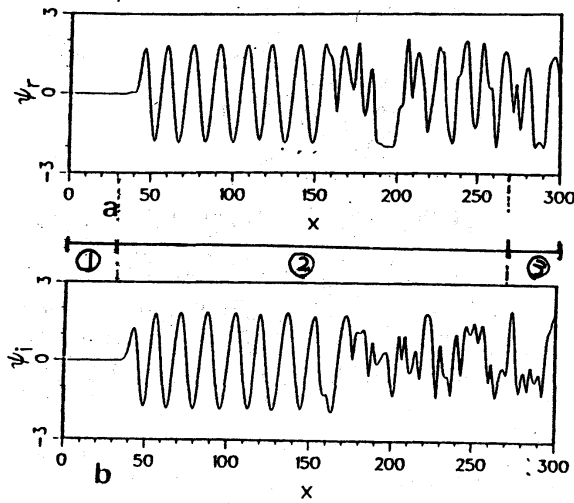
(b) $\eta=310$

Fig 2.3



(a) $+$: $\eta=263$, Δ : $\eta=310$

Fig 2.4.



$t=200$ での ψ_r, ψ_i の図

- ① 系集形領域, ② 遷移領域
③ 乱流領域

Fig 3.1

Fig 3.2

$\psi_r(t)$ の時間発展
(a) $x=0$ (b) $x=3$
(c) $x=6$ (d) $x=30$

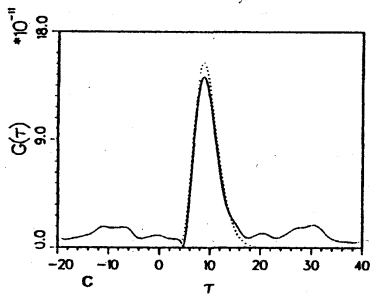
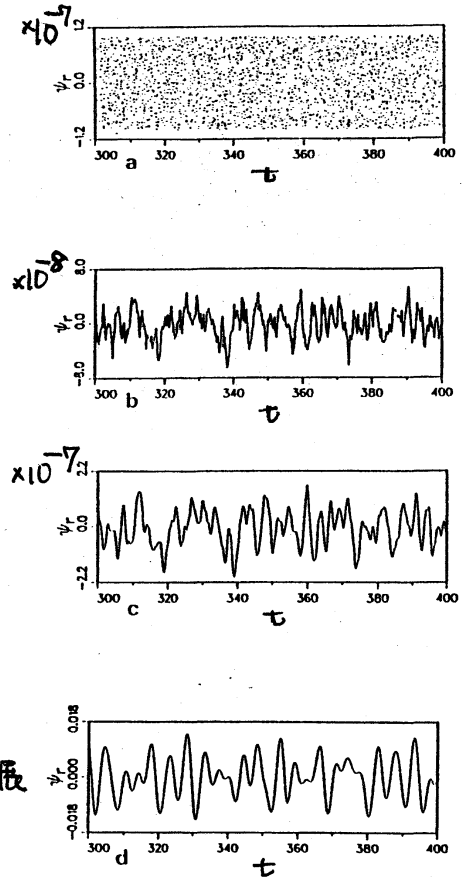
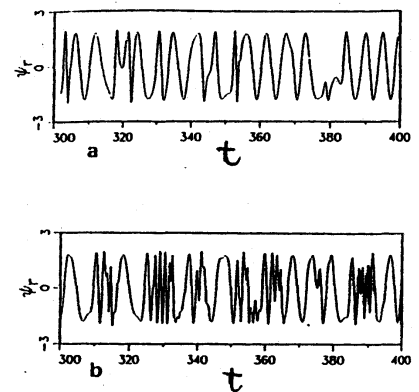


Fig 3.3 $\psi(0,t)$ と $\psi(x_0,t+\tau)$
の相関. $x_0=30$

Fig 3.4

$\psi_r(t)$.
(a) $x=60$
(b) $x=120$



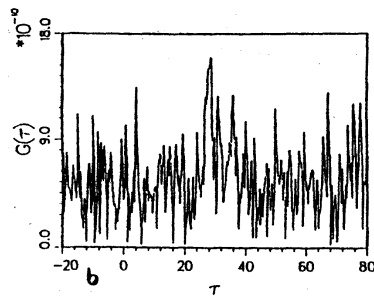
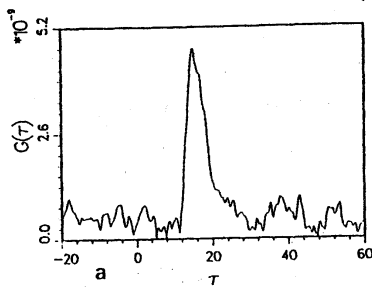


Fig 3.5 $\psi(0,t)$ と $\psi(x_0,t)$ の相関図 a) $x_0=60$
b) $x_0=180$

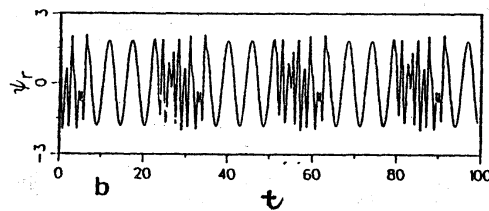
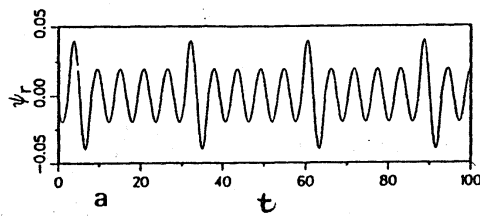


Fig 3.6 a) $\psi_r(0,t)$, b) $\psi_r(150,t)$