

数値多項式と関数空間

村上 弘

HIROSHI MURAKAMI

首都大学東京 数理情報科学専攻

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCES,

Tokyo Metropolitan University *

要約：通常の数値係数多項式の表現や代数的な操作は、変数の単項式 $(x - c)^k$ を基底とする展開表現を用いて行われることが普通である。しかし応用上では、対象とする多項式は、変数の値がある領域付近にあるときの近似により得られたもので係数の数値に誤差を含んでいたり、あるいは多項式の求めたい性質を変数の値の範囲をある領域に限って調べれば十分なことがある。そのような場合には、多項式の表現の基底として単項式ではなく適切な重みに基づいた直交多項式をとる方が、領域内での多項式の値を低精度の数値係数を用いても平均的に良く近似できるので有利であろう。このような立場に基づいた考察を試みる。

1 導入

数値係数多項式の代数的処理を数値的に扱うことを試みる。今回、多項式は一変数の場合に限定する。近似値と数値の演算には、精度を固定した浮動小数点数を用いることとする。数値係数多項式は係数に最初から誤差が含まれ得るものとする。数値的な応用では、多項式が近似誤差を含む場合や、変数値が領域内に限られた近似の問題を扱うことがある。そのような純代数的ではない問題は、半ば解析的であるととらえて、領域内での多項式の空間にノルムによる位相を入れ、一点 $x = c$ に於いてではなく領域内で平均された量を扱うのがより妥当であろう。このような方針に基づいた取扱いを考察したい。

1.1 直交多項式基底の重要性

多項式は $(x - c)$ の巾による展開形で表されるのが普通だが、単項式型の基底 $\{(x - c)^k\}$ は $x = c$ または $x = \infty$ の近傍だけで線形独立性が高い。多項式が分点 x_i を与えて値

*mrkmhrsh@tmu.ac.jp

$F(x_i)$ を返す手続きとして与えられる場合には、次数が上がると多項式の値から単項式 $\{(x-c)^n\}$ の係数を求める計算は、条件数（グラム行列の条件数）が急増加するので演算に必要な精度（有効桁数）も増し、浮動小数点数などの近似数値を用いて計算を行う場合には困難を生じ得る。

単項式基底系は次数が上がるとつれて区間の中で数値的に線形従属に近付くが、直交多項式基底系では線形独立性が良好に保たれるので、演算を限られた精度で行う場合、一点を展開中心とする $(x-c)$ の巾による展開（テイラー展開）よりも、領域（区間）内での直交関数列による直交展開（一般フーリエ展開）の方が数値的には有利となる。

（再度強調）： 基底 $\{(x-c)^k\}_{k=0,1,\dots,N}$ は（中心 $x=c$ と無限遠 $x=\infty$ 以外で）線形独立性が低い。関心のある領域内（区間）で、多項式が分点に於ける値で与えられる場合に、分点での値から $(x-c)^k$ の係数を求める計算は極めて悪条件となる。線形展開は領域内で線形独立性の良い基底多項式系を用いて行うべきで、展開の基底系には（ある適切な重み $w(x)$ による関数内積による）領域内での直交多項式系を採用するのが良い。

2 直交多項式の導入

解析対象の実区間 $[a, b]$ を一次変換を用いて標準区間 $[-1, 1]$ に移して考察する。区間 $[-1, 1]$ 上の直交多項式列を $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$ とする。 $\phi_n(x)$ は n 次の直交多項式で、区間内部で正値な連続関数 $w(x)$ を重みとする内積に関して互いに直交する： $(\phi_j, \phi_k)_w = \int_{-1}^1 \phi_j(x)\phi_k(x)w(x)dx = \lambda_j\delta_{j,k}$ 。

2.1 直交多項式の持つ三項漸化式

直交多項式の三項漸化式は、単項式 $1, x, x^2, \dots$ からグラム-シュミットの直交化により、一般に $(\phi_{-1} = 0$ として) $\phi_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\phi_{n-1}(x) - \gamma_n\phi_{n-2}(x); n \geq 1$ となる。チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ の場合には $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ となる。ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ の場合は $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$ である。

2.2 標準区間 $[-1, 1]$ 上の直交多項式の例

ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ ： $w(x) = 1, P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$ 。 $\int_{-1}^1 P_j(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2j+1}\delta_{j,k}$ 。

チェビシエフ多項式 $T_n(x)$: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

$$\int_{-1}^1 T_j(x)T_k(x)w(x)dx = \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{j,0})\delta_{j,k}.$$

区間内で一様な近似を行う用途には、チェビシエフ（第一）多項式が通常最も便利である。

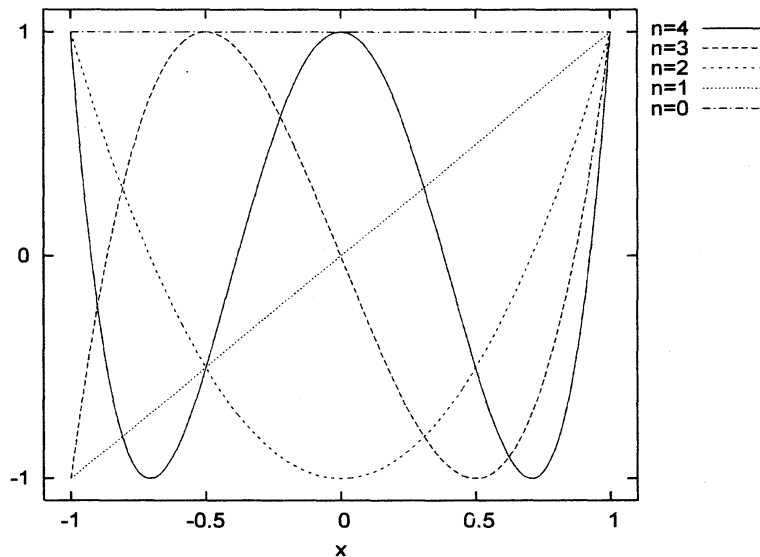


図 1: チェビシエフ多項式のグラフ

第二種チェビシエフ多項式 $U_n(x)$: $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$, $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$. $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin\{(n+1)\theta\}}{\sin \theta}$. $\int_{-1}^1 U_j(x)U_k(x)w(x)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{j,k}$.

ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$: $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)dx = c_j^{(\alpha,\beta)}\delta_{j,k}$. $c_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2j+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j+\beta+1)}{j!\Gamma(j+\alpha+\beta+1)}$.

その他の直交多項式: そのほかにも、区間 $[0, \infty)$ で重み $w(x) = e^{-x}$ のラゲール多項式 $L_n(x)$ や、区間 $(-\infty, \infty)$ で重み $w(x) = e^{-x^2}$ のエルミート多項式 $H_n(x)$, ルジャンドル陪関数と関係する多項式などもある。

2.3 直交多項式の選点直交関係

重み $w(x) > 0$ に伴う直交多項式列 $\{\phi_j(x)\}_{j=0,1,\dots,N+1}$ は、 $\phi_{N+1}(x)$ の零点 $\{x_\nu\}_{\nu=1,2,\dots,N+1}$ を選点とする選点直交性 $\sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_j(x_\nu) \phi_k(x_\nu) = \lambda_j \delta_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq N$ を持つ。但し、 $\lambda_j = (\phi_j, \phi_j)_w$, $\omega_\nu \equiv (\sum_{j=0}^N \frac{\{\phi_j(x_\nu)\}^2}{\lambda_j})^{-1}$.

N 次多項式が $F(x) = \sum_{j=0}^N f_j \phi_j(x)$ なら, $f_j = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu F(x_\nu) \phi_j(x_\nu)$ で, 内積の積分計算は有限離散和を用いて計算できる.

ルジャンドル多項式の選点直交性: $(N+1)$ 次のルジャンドル点 ($P_{N+1}(x)$ の零点) を $\{x_\nu\}_{\nu=1,2,\dots,N+1}$, 重率 $\omega_\nu = \frac{2}{(1-x_\nu^2)\{P'_{N+1}(x_\nu)\}^2}$ とすると, $\sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu P_j(x_\nu) P_k(x_\nu) = \frac{2}{2j+1} \delta_{j,k}$, $0 \leq j, k \leq N$ が成立する (選点と重率は, 低次用は表にしておき, 高次では必要に応じてそのつど計算する方法がとれる).

チェビシェフ多項式の選点直交性: $(N+1)$ 次のチェビシェフ点 ($T_{N+1}(x)$ の零点) は $x_\nu = \cos\{\frac{(\nu-1/2)\pi}{N+1}\}$, $\nu = 1, 2, \dots, N+1$; 重率 $\omega_\nu = \frac{2}{N+1}$ (定数) で, $\frac{2}{N+1} \sum_{\nu=1}^{N+1} T_j(x_\nu) T_k(x_\nu) = (1 + \delta_{j,0}) \delta_{j,k}$, $0 \leq j, k \leq N$ が成立する. チェビシェフ多項式は, 選点と重率が簡単な式で計算できる点が極めて便利である.

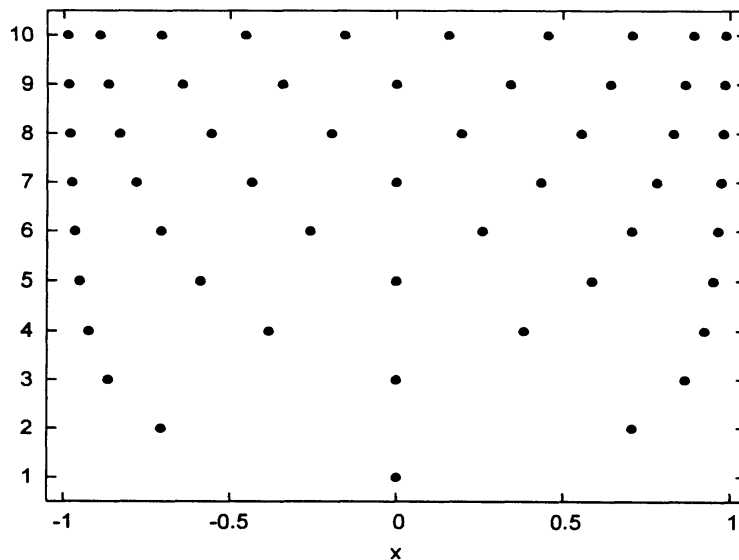


図 2: チェビシェフ多項式の零点の分布

3 数値多項式に対する演算

3.1 展開係数から多項式の値を求める

直交展開 $F(x) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(x)$ の係数 $\{f_k\}$ が与えられた時, $(N+1)$ 個の選点集合 $\{x_\nu\}$ 上の値 $F(x_\nu) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(x_\nu)$ の計算は, $(N$ があまり大きくなければ) $\phi_k(x_\nu)$ をあらかじめ求めておくと行列ベクトル積として $O(N^2)$ でできる (チェビシェフ多項式の基底の場合には高速離散フーリエ余弦変換 (FCT) を用いて高速に計算できる).

任意に与えられた分点 x に対して展開係数から関数値を求めるには、直交多項式の三項漸化式を用いて $\phi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$ の値を順に求めて、展開係数 f_k との積和を作ることによって $F(x)$ を計算できる。その場合の分点 1 個あたりの演算量は $O(N)$ である。

3.2 多項式の選点での値から任意点での値を求める (補間)

N 次以下の多項式 $F(x)$ の, $(N+1)$ 個の選点 x_ν での値 $\{F(x_\nu)\}_{\nu=1, \dots, N+1}$ から, 任意の点 x での $F(x)$ の値を求める方法として, ラグランジュの補間法がある。

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{N+1} F(x_\nu) b_\nu(x), \quad b_\nu(x) = \frac{\prod_{\mu(\neq \nu)} (x - x_\mu)}{\prod_{\mu(\neq \nu)} (x_\nu - x_\mu)}$$

上式に忠実に従い, 与えられた 1 つの x の値から全ての $b_\nu(x)$ を計算し, それにより $F(x)$ の値を求めると, 全演算量は $O(N^2)$ となる。

実際には, より高速な計算法がある。まず事前に $c_\nu \equiv \prod_{\mu(\neq \nu)} (x_\nu - x_\mu)$ を求めて表にしておく。そして x が与えられたときに $P(x) \equiv \prod_{\mu} (x - x_\mu)$ の値を計算し, $b_\nu(x) = \frac{P(x)}{(x - x_\nu)c_\nu}$, $\nu = 1, \dots, N+1$ の値を求めて, $F(x) = \sum_{\nu=1}^{N+1} F(x_\nu) b_\nu(x)$ を計算する。この方法を用いれば, x を与えてから $F(x)$ を計算するまでの全演算量は $O(N)$ になる。 x がどれかの選点 x_ν に一致する場合は, b_ν の分子と分母が共に零となり不定型になるが, そのような場合には (多項式は連続関数だから) x を僅かに丸め誤差程度ずらして計算することで (途中の浮動小数点演算でアンダーフローが起きなければ) 困難を回避できる。

3.3 多項式の選点での値から展開係数を求める

N 次以下の多項式 $F(x)$ の $(N+1)$ 個の選点 $\{x_\nu\}$ 上での値 $F(x_\nu)$ から, 展開係数 $\{f_k\}_{k=0,1,\dots,N}$ は $f_k = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$ と計算できる。 $\phi_k(x_\nu)$ をあらかじめ求めておけば, 行列ベクトル積として N^2 回の積和で求まる。選点 $\{x_\nu\}$ (x_ν の値が全く任意であっても) 全てに対して三項漸化式で $\phi_k(x_\nu)$ の値を次数を $k = 0, 1, \dots, N$ と上げながら $\omega_\nu F(x_\nu)$ との内積を作ると $O(N^2)$ の手間で求まる。

特別な直交多項式を基底として採用した場合は, 高速な計算法がある。例えば基底がチェビシェフ多項式の場合は, 選点上での値から全ての展開係数を求める処理 (及びその逆) の演算量は, 高速離散フーリエ余弦変換 (FCT) を用いると $O(N \log N)$ になる。

3.4 展開基底の自然な拡張

多項式 $F(x)$ が N 次以下で, N 次の直交基底系 $\{\phi_k\}_{k \leq N}$ により展開係数で $F(x) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(x)$ と与えられている場合に, 拡張された M 次 ($M > N$) の直交基底系 $\{\phi_k\}_{k \leq M}$ で表した展開 $F(x) = \sum_{k=0}^M \tilde{f}_k \phi_k(x)$ の係数は, $k \leq N$ では $\tilde{f}_k = f_k$, $N < k$ で $\tilde{f}_k = 0$ となる。

$F(x)$ が N 次の基底系に対応した $(N+1)$ 個の選点 $\{x_\nu\}$ 上での値 $F(x_\nu)$ により表されている場合、拡張された基底に対応する $(M+1)$ 個の選点 $\{y_\mu\}$ 上の値 $F(y_\mu)$ を得るには、まず展開係数を $f_k = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$ により求めてから $F(y_\mu) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(y_\mu)$, $\mu = 1, \dots, M+1$ を作る。

3.5 異なる直交基底系による再展開

多項式 $F(x)$ が N 次以下で、 N 次の直交基底系 $\{\phi_k\}_{k \leq N}$ による展開 $F(x) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(x)$ を別の M 次 ($N \leq M$) の直交基底系 $\{\hat{\phi}_\ell\}_{\ell \leq M}$ による新しい展開へ変換するには以下のようにする。まず最初に、新しい基底系の $(M+1)$ 個の選点 $\{y_\mu\}$ 上での値 $F(y_\mu) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(y_\mu)$ を求める。次に、新しい基底系 $\{\hat{\phi}_\ell\}$ の展開 $F(x) = \sum_{\ell=0}^M \hat{f}_\ell \hat{\phi}_\ell(x)$ の係数を (対応する重率 $\hat{\omega}_\mu$ を用いて) $\hat{f}_\ell = \sum_{\mu=1}^{M+1} \hat{\omega}_\mu \hat{\phi}_\ell(y_\mu) F(y_\mu)$ により求める。

$F(x)$ が N 次の基底系 $\{\phi_k\}_{k \leq N}$ に対応する $(N+1)$ 個の選点 $\{x_\nu\}$ 上で、値 $F(x_\nu)$ により表されている場合に、新しい基底の $(M+1)$ 個の選点 $\{y_\mu\}$ 上での $F(x)$ の値 $F(y_\mu)$ を用いて表す為には、まず $F(x)$ の展開係数 $f_k = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$, $k = 0, \dots, N$ を求めて、それを用いて新しい基底の選点 $\{y_\mu\}$ 上での値 $F(y_\mu) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(y_\mu)$ を求める。

3.6 展開基底の縮小

多項式 $F(x)$ が真に M 次以下 ($M < N$) である場合は、 N 次までの基底 $\{\phi_k(x)\}_{k \leq N}$ を用いた直交展開の M 次を越える係数は全て零となるので、 $F(x)$ を表すのに規模を縮小した基底系 $\{\phi_k(x)\}_{k \leq M}$ を採用できる。

N 次の基底に対応した選点集合 $\{x_\nu\}$ 上での値 $F(x_\nu)$ により表わされた多項式が、実際は M 次 ($M < N$) 以下の場合は、 N 次の基底での展開係数 $f_k = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$ を求めると、 $k > M$ では $f_k = 0$ である。その場合、多項式 $F(x)$ が M 次以下であることを前提として、 $(M+1)$ 個の選点集合 $\{y_\mu\}$ 上での値 $F(y_\mu)$ を用いて $F(x)$ を表すことができる。

高次展開項の切断 (射影): 高次項の展開係数が真の零でなくても小さい場合には、省略する (切断する) 近似を採用することがある。高次項の切断は、関数空間の中で低次数の多項式の空間への射影になる。

直交多項式による展開の収束性が十分に良い場合は、適当な次数までで展開を切断しても十分良い結果が得られると期待できる。多項式の切断による減次、あるいは連続関数の多項式近似は、切断の採用により導入される値への誤差の限界を意識して用いる。

3.7 多項式の線形結合

多項式 $F(x)$, $G(x)$ の選点での値を $F(x_\nu)$, $G(x_\nu)$ とすると、係数 α , β による「多項式の線形結合」 $\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x)$ の選点 x_ν での値は、「多項式の選点での値」の線形結合

$\alpha \cdot F(x_\nu) + \beta \cdot G(x_\nu)$ となる.

同様に, 多項式 $F(x)$, $G(x)$ が展開係数で表されている場合には, 「多項式の線形結合」の展開係数は, 「多項式の展開係数」の線形結合になる.

3.8 多項式の乗算

選点での値で表された多項式の乗算: 多項式が選点上での値によって表されている場合は, 多項式 $F(x)$ と $G(x)$ の積が N 次以下ならば, 積の多項式 $F(x)G(x)$ の選点上での値は $F(x)$ と $G(x)$ の $(N+1)$ 個の選点上での値 $F(x_\nu)$, $G(x_\nu)$ を用いて, $F(x_\nu)G(x_\nu)$ である.

展開係数で表された多項式の乗算: 展開係数から選点上での値を求めて, 選点での値の積を作り, 展開係数に戻す方法がある. チェビシエフ展開の場合には, 高速離散フーリエ余弦変換 (FCT) を用いると展開係数から選点での値を求める操作と選点での値から展開係数を求める操作はどちらも演算量が $O(N \log N)$ で, 漸近的に高速な算法が得られる.

基底がチェビシエフ多項式の場合には, 基底同士の積公式が $T_k(x) \cdot T_\ell(x) = \frac{1}{2}(T_{k+\ell}(x) + T_{|k-\ell|}(x))$ と極めて簡単である. このことから, 二つの多項式の積は $F(x)G(x) = \sum_k f_k T_k(x) \cdot \sum_\ell g_\ell T_\ell(x) = \sum_k \sum_\ell f_k g_\ell T_k(x) T_\ell(x) = \sum_k \sum_\ell \frac{1}{2} f_k g_\ell (T_{k+\ell}(x) + T_{|k-\ell|}(x)) = \sum_j h_j T_j(x)$ と計算できる. この (単項式の場合と類似した非再帰的な) 方法による演算量は $O(N^2)$ である.

3.9 多項式の除算

多項式の代数演算には加減乗の他に除算が極めて重要であり, 多項式の商や剰余の計算が必要になる. そこで, 直交多項式展開により与えられた多項式同士の除算について考察してみることにする.

注: 今回の考察対象は通常が多項式の除算と同じもの (剰余多項式の次数が割る側の多項式の次数よりも小とする) で, (指定した多項式の空間内で) 剰余多項式の関数ノルムを最小とするような除算ではない.

選点の値で与えられた多項式の除算: $F(x)$ を m 次以下, $G(x)$ を丁度 n 次で, $n \leq m \leq N$ とする. 多項式の展開基底を $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N\}$. 分点 $\{x_\nu\}_{\nu=1,2,\dots,N+1}$ は $\phi_{N+1}(x)$ の零点, 重率を $\{\omega_\nu\}_{\nu=1,2,\dots,N+1}$ とする.

$$F(x) = f_0 \phi_0(x) + \dots + f_m \phi_m(x),$$

$$G(x) = g_0 \phi_0(x) + \dots + g_n \phi_n(x).$$

$F(x)$ の k 次展開係数 f_k は, $f_k = \langle \phi_k, F \rangle = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$.

基底 $\phi_k(x)$ の主係数を γ_k とすれば, $\tilde{F}(x) = F(x) - (f_m/g_n)(\gamma_m/(\gamma_n \cdot \gamma_{m-n})\phi_{m-n}(x)G(x)$ の次数は m よりも低い.

式の簡単の為, 以下では直交多項式 ϕ_n の主係数を 1 に規格化しておく. いま $\deg F(x) = m$, $\deg G(x) = n$ で, $n \leq m \leq N$ とする.

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0\phi_0(x) + \cdots + f_m\phi_m(x), \\ G(x) &= g_0\phi_0(x) + \cdots + g_n\phi_n(x). \end{aligned}$$

$f_k = \langle \phi_k, F \rangle \equiv \frac{1}{\lambda_k} \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu \phi_k(x_\nu) F(x_\nu)$, 但し $\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{N+1} \omega_\nu (\phi_k(x_\nu))^2$. g_k も同様に, $g_k = \langle \phi_k, G \rangle$.

$F(x)$ の m 次の項を消すには, $\tilde{F}(x) = F(x) - (f_m/g_n)\phi_{m-n}(x) \cdot G(x)$ とする. x_ν での値は, $\tilde{F}(x_\nu) = F(x_\nu) - (f_m/g_n)\phi_{m-n}(x_\nu) \cdot G(x_\nu)$ となる. $\tilde{F}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i \phi_i(x)$

同様に, $\tilde{F}(x)$ から $(m-1)$ 次の項を消すには, $\tilde{\tilde{F}}(x) = \tilde{F}(x) - (\tilde{f}_{m-1}/g_n)\phi_{m-1-n}(x) \cdot G(x) = F(x) - \{(f_m/g_n)\phi_{m-n}(x) + (\tilde{f}_{m-1}/g_n)\phi_{m-1-n}(x)\} \cdot G(x) = F(x) - \{f_m\phi_{m-n}(x) + \tilde{f}_{m-1}\phi_{m-1-n}(x)\}/g_n \cdot G(x)$.

これを繰り返すと, $F^{[m]} = F$ から始めて, $F^{[m-1]} = \tilde{F}(x)$, $F^{[m-2]} = \tilde{\tilde{F}}(x)$, $F^{[m-3]} = \tilde{\tilde{\tilde{F}}}(x)$, $\dots$. そうして $R \equiv F^{[n-1]}$ に於いて $\deg R(x) < n$ となって停止し, 多項式除算の関係 $R(x) = F(x) - Q(x)G(x)$ を得る, ここで $Q(x) \equiv \sum_{\ell=0}^{m-n} q_\ell \phi_\ell(x)$. 但し $\gamma_{m-n} = F_m^{[m]}$, $\gamma_{m-1-n} = F_{m-1}^{[m-1]}$, $\dots$, $\gamma_0 = F_0^{[n]}$ により $q_k \equiv \gamma_k/g_n$.

計算は, 基底関数による展開係数と $\{x_\nu\}$ での多項式の値を配列に格納して行うことができる.

$$\begin{aligned} m &:= \deg F; \quad n := \deg G; \\ R(x_\nu) &:= F(x_\nu); \\ g_n &:= \langle \phi_n, G \rangle; \\ \text{for } \ell &:= 0 \text{ to } m-n \text{ do begin} \\ \quad k &:= m-n-\ell; \\ \quad q_k &:= \langle \phi_{m-\ell}, R \rangle / g_n; \\ \quad R(x_\nu) &:= R(x_\nu) - q_k \phi_k(x_\nu) G(x_\nu) \\ \text{end;} \\ Q(x_\nu) &:= \sum_{\ell=0}^{m-n} q_\ell \phi_\ell(x_\nu); \end{aligned}$$

選点での値により与えられた多項式の除算 (別方法): $R(x) = F(x) - Q(x)G(x)$ で, $Q(x) = \sum_{\ell=0}^{m-n} q_\ell \phi_\ell(x)$ とする. そのとき, $\deg R(x) < \deg G(x)$ となる係数 $\{q_\ell\}$ を決めるには, $R(x)$ の $m, m-1, \dots, n$ 次の各展開項の係数が消えるという条件から, $0 = \langle \phi_{n+k}, R \rangle = \langle \phi_{n+k}, F \rangle - \sum_{\ell=0}^{m-n} q_\ell \langle \phi_{n+k} \phi_\ell, G \rangle$, for $k = 0, 1, \dots, m-n$ である.

いま, $A_{k,\ell} \equiv \langle \phi_{n+k} \phi_\ell, G \rangle$, $b_k \equiv \langle \phi_{n+k}, F \rangle$ と置くと, $\sum_{\ell=0}^{m-n} A_{k,\ell} q_\ell = b_k$, あるいは行列形式で $Aq = b$ を得る.

これを解いて商 $Q(x)$ の係数 $\{q_\ell\}$ を決めると、選点に於ける剰余 R の値は、 $R(x_\nu) = F(x_\nu) - Q(x_\nu)G(x_\nu) = F(x_\nu) - (\sum_{\ell=0}^{m-n} q_\ell \phi_\ell(x_\nu))G(x_\nu)$ となる。

展開係数で与えられた多項式の除算 (チェビシェフ基底の場合): $F(x)$ は高々 m 次の多項式 $F(x) = \sum_{\ell=0}^m f_\ell T_\ell(x)$ で、 $G(x)$ は真に n 次の多項式 $G(x) = \sum_{\ell=0}^n g_\ell T_\ell(x)$ とする。基底がチェビシェフ多項式の場合、基底の積公式 $T_i(x) \cdot T_\ell(x) = \frac{1}{2}(T_{i+\ell}(x) + T_{|i-\ell|}(x))$ を用いると、 $T_i(x)$ を $G(x)$ に乗じた $(i+n)$ 次の多項式を $H^{(i+n)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n+i} h_\ell^{(i+n)} T_\ell(x)$ と置くと、その展開係数 $h_\ell^{(i+n)}$, $\ell = 0, \dots, n+i$ は $G(x)$ の係数 g_ℓ , $\ell = 0, \dots, n$ から容易に作れる。

k 次多項式 $R^{(k)}(x) \equiv \sum_{\ell=0}^k r_\ell^{(k)} T_\ell(x)$ を、最初 $k = m$ のとき $F(x)$ と置いて、以下のよう $R^{(k)}(x)$ から次数を下げた $R^{(k-1)}(x)$ を作る処理を $k = m, m-1, \dots, n$ と繰り返して計算する。

$R^{(k)}(x)$ と $H^k(x) = T_{k-n}(x)G(x)$ 双方の最高次 (k 次) の展開係数の商を $q_{k-n} := r_k^{(k)} / h_k^{(k)}$ と置く。そうして $R^{(k-1)}(x) := R^{(k)}(x) - q_{k-n} H^k(x)$ を作る。これを展開係数で表せば $r_\ell^{(k-1)} = r_\ell^{(k)} - q_{k-n} h_\ell^{(k)}$, $\ell = 0, \dots, k-1$ である。

そうして $R(x) := R^{(n-1)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} r_\ell^{(n-1)} T_\ell(x)$, $Q(x) := \sum_{j=0}^{m-n} q_j T_j(x)$ と置くと、多項式除算の関係 $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$ が得られる。

展開係数で与えられた多項式の除算 (一般の直交基底の場合): $\deg F(x) = m$, $\deg G(x) = n$ で、 $n \leq m \leq N$ とし、多項式は $F(x) = f_0 \phi_0(x) + \dots + f_m \phi_m(x)$, $G(x) = g_0 \phi_0(x) + \dots + g_n \phi_n(x)$ と、基底による展開係数によって与えられたとする。直交多項式の三項漸化式 $\phi_k(x) = (\alpha_k x + \beta_k) \phi_{k-1}(x) - \gamma_k \phi_{k-2}(x)$ を用いて、 $G^{(k)} \equiv \phi_k(x)G(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} G^{(k)} &= \phi_k(x)G(x) \\ &= \{(\alpha_k x + \beta_k) \phi_{k-1}(x) - \gamma_k \phi_{k-2}(x)\} G(x) \\ &= (\alpha_k x + \beta_k) G^{(k-1)}(x) - \gamma_k G^{(k-2)}(x) \\ &= \alpha_k x G^{(k-1)}(x) + \beta_k G^{(k-1)}(x) - \gamma_k G^{(k-2)}(x). \end{aligned}$$

$x \cdot G^{(k-1)}(x) = x \sum_{\ell=0}^{m+k-1} g_\ell^{(k-1)} \phi_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{m+k} g_{\ell-1}^{(k-1)} x \phi_{\ell-1}(x)$. そこで、いま三項漸化式を $x \phi_{\ell-1}(x)$ について解いた関係式を $x \phi_{\ell-1}(x) = a_\ell \phi_\ell(x) + b_\ell \phi_{\ell-1}(x) + c_\ell \phi_{\ell-2}(x)$ と置くと、 $x G^{(k-1)}(x) = \sum_{\ell=1}^{m+k} g_{\ell-1}^{(k-1)} (a_\ell \phi_\ell(x) + b_\ell \phi_{\ell-1}(x) + c_\ell \phi_{\ell-2}(x)) = \sum_{\ell=0}^{m+k} h_\ell^{(k-1)} \phi_\ell(x)$ となる $h_\ell^{(k-1)}$ を作ることができる。結局、 $G^{(k)}(x) = \alpha_k \sum_{\ell=0}^{m+k} h_\ell^{(k-1)} \phi_\ell(x) + \beta_k \sum_{\ell=0}^{m+k-1} g_\ell^{(k-1)} \phi_\ell(x) - \gamma_k \sum_{\ell=0}^{m+k-2} g_\ell^{(k-2)} \phi_\ell(x)$ を $G^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{m+k} g_\ell^{(k)} \phi_\ell(x)$ の形にまとめ直すと、 $g_\ell^{(k)}$ の漸化関係が得られて、

$$\begin{aligned} \phi_0(x)G(x) &= g_0^{(0)} \phi_0(x) + \dots + g_n^{(0)} \phi_n(x), \\ \phi_1(x)G(x) &= g_0^{(1)} \phi_0(x) + \dots + g_{n+1}^{(1)} \phi_{n+1}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(x)G(x) &= g_0^{(2)}\phi_0(x) + \cdots + g_{n+2}^{(2)}\phi_{n+2}(x), \\
&\vdots \\
\phi_{m-n}(x)G(x) &= g_0^{(m-n)}\phi_0(x) + \cdots + g_m^{(m-n)}\phi_m(x).
\end{aligned}$$

となる係数 $g_j^{(\ell)}$ が比較的少ない計算量で順次作れる.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= q_0\phi_0(x) + \cdots + q_{m-n}\phi_{m-n}(x), \\
R(x) &= r_0\phi_0(x) + \cdots + r_{n-1}\phi_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

多項式除算の関係を $G(x)Q(x) = F(x) - R(x)$ とすると,

$$\begin{bmatrix} g_m^{(m-n)} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & g_n^{(0)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_0^{(m-n)} & \cdots & g_0^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{m-n} \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ \vdots \\ f_n \\ \hline f_{n-1} - r_{n-1} \\ \vdots \\ f_0 - r_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_H \\ \mathbf{f}_L - \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

下三角の線形方程式 $L\mathbf{q} = \mathbf{f}_H$ を $\mathbf{q}$ について解けば, 剰余は $\mathbf{r} = \mathbf{f}_L - B\mathbf{q}$ から計算される.

(チェビシェフ基底展開の場合に比べると非常に複雑で計算量も多いため, 一般的な三項漸化式の係数を持つ直交多項式を基底とする場合は, 有用性が極めて低いであろう.)

4 今後の課題

多項式除算の計算法については, 現時点の考察は十分とはいえないため, まだ整理改良工夫の余地があると思われる.

多項式の直交関数展開を背景に持つ近似的な数値を用いた各種演算の具体的な実装や実例, 有効性の評価, 高速計算法, 多変数化の方向, などは今後の課題である.

参 考 文 献

- [1] Abramowitz M. and Stegun I.A. Eds.: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York, Dover (1972).
- [2] Cheney E.W.: *Introduction to Approximation Theory*, 2nd Ed., A.M.S., Chelsea Pub. (1982), Chap.3: 'Tchebycheff approximation by polynomials and other linear families'.
(初版 McGraw-Hill(1966) に対しては, 一松信, 新島耕一による邦訳「近似理論入門」, 共立出版(1977)がある(絶版).)

- [3] David Gottlieb and Steven A. Orszag: *Numerical Analysis of Spectral Methods – Theory and Applications*, CBMS 26, SIAM (1977), Sec.3: ‘Survey of Approximation Theory’.
- [4] Davis P.J. and Rabinowitz P., *Methods in Numerical Integration*, Academic Press, 1975.
邦訳: 森正武「計算機による数値積分法」, 日本コンピュータ協会 (1981).
- [5] Márcia Alves Deinda, Rob H. Bisseling and David K. Maslen, "Parallel Fast Legendre Transform", ECMWF Workshop "Towards TeraComputing - The Use of Parallel Processors in Meteorology", Nov.1998, published by World Scientific Pub. Co. (1999).
- [6] Hasegawa T., Torii T. and Sugiura H.: "An algorithm based on the FFT for a generalized Chebyshev interpolations", *Math. Comp.*, **v54** (1990), pp.195–210.
- [7] 石岡圭一: 「スペクトル法による数値計算入門」, 東大出版会 (2004).
- [8] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 「数学公式 III – 特殊函数 –」, 岩波全書, (1960). 第 IV 篇: ‘直交多項式’.
- [9] 森正武: 「数値解析」, 共立出版 (1973), 第 4 章: ‘関数近似’.
- [10] 二宮市三 監修: *NUMPAC*(名古屋大学数学パッケージ), 「ライブラリ・プログラム利用の手引 (数値計算編)」, VOL.1,2,3, 名古屋大学大型計算機センター (1991).
- [11] 二宮市三 編集: 「数値計算のつぼ」, 共立出版 (2004), 第 4 章: ‘補間と数値積分’, p.63.
- [12] Potts D., Steidl G. and Tasche M., "Fast algorithms for discrete polynomial transforms", *Math. Comp.* **v67** (1998), pp.1577–1590.
- [13] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P, *Numerical Recipes in Fortran77*, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press (1992),
Chap.4.5: ‘Gaussian Quadratures and Orthogonal Polynomials’, Chap.12.3: ‘FFT of Real Functions, Sine and Cosine Transformations’.
- [14] Theodore J. R.: *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover Pub.Inc., New York (1969).
- [15] "Algorithm 749: fast discrete cosine transform", *ACM Trans. Math. Soft.*, **v21**, Issue 4 (Dec.1995), pp.372–378.
- [16] 杉原正顕, 室田一雄: 「数値計算法の数理」, 第 7 章: ‘最小 2 乗法と直交多項式’, 岩波書店 (1994).
- [17] Szegő G.: *Orthogonal Polynomials*, 4th Ed., AMS Colloquium Publications XXIII, New York (1975).
- [18] 山内二郎・宇野利雄・一松 信、共編: 「電子計算機のための数値計算法 I」, 培風館 (1965), 第 5 章: ‘函数計算’;
「電子計算機のための数値計算法 III」, 培風館 (1972).