

超関数とくりこみ不可能な場の理論

徳島大学工業短大部 長町重昭 (Shigeaki Nagamachi)

Wightman [3] 等によつて始められた公理的場の量子論は, Jaffe [1], 麦林 長町 [2] によつて, tempered distribution を用いた formulation から ultra distribution さらに hyperfunction を用いた formulation へと拡張された。この拡張の目的の一つは, くりこみ不可能な理論をもその公理系の枠内でとりあつかえるようにするためである。ここではその目的がある簡単なモデルに對して達せられていることを示す。まず自由場の話から始める。

§ 1. 自由場.

まず 2 点 Schwinger 関数 $S(y)$ を

$$(1.1) \quad S(y) = (2\pi)^{-4} \int \frac{e^{iP \cdot y}}{(P^0)^2 + P^2 + m^2} dP = (2\pi)^{-3} \int \frac{e^{-\sqrt{P^2 + m^2}|y^0|} e^{iP \cdot y}}{2\sqrt{P^2 + m^2}} dP$$

$$P = (P_0, \dots, P_3) = (P_0, P) \quad y = (y^0, \dots, y^3) = (y^0, y) \quad P \cdot y = P_0 y^0 + P \cdot y$$

で定義する。これは $y^0 \neq 0$ で正則であつて, 次に定義する

2 点 Wightman 関数 $D^{(-)}(x)$

$$(1.2) \quad D^{(-)}(x) = (2\pi)^{-3} \int e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) dk$$

$$= (2\pi)^{-3} \int \frac{e^{-i\sqrt{k^2 + m^2} x^0} e^{ik \cdot x}}{2\sqrt{k^2 + m^2}} dk$$

$$k \cdot x = k_0 x^0 - k \cdot x \quad k^2 = (k_0)^2 - k^2$$

とは

$$(1.3) \quad D^{(-)}(-iy^0, y) = S(y^0, y) = S(y)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S(ix^0 + \varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} D^{(-)}(x^0 - i\varepsilon, x) = D^{(-)}(x)$$

なる関係がある。 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ 上の双1次形式を

$$(1.4) \quad C(f, g) = \int S(x-y) f(x) g(y) dx dy$$

で定義すると、これは連続で正定値であるので

$$(1.5) \quad e^{-C(f, f)/2} = \int e^{i\phi(f)} d\phi_c$$

を満たすガウス測度 $d\phi_c$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ 上に存在する。

そして $d\phi_c$ は次の性質をもつ。

$$(1.6) \quad \int \phi(f_1) \cdots \phi(f_{2m}) d\phi_c = \sum_{i_2 < j_2} C(f_{i_1}, f_{j_1}) \cdots C(f_{i_m}, f_{j_m})$$

ただし和は pairing 全体にわたってとる。そして $2m$ 点 Schwinger 関数を

$$(1.7) \quad S_{2m}(y_1, \dots, y_{2m}) = \sum_{i_2 < j_2} S(y_{i_1} - y_{j_1}) \cdots S(y_{i_m} - y_{j_m})$$

で定義する。また $2m+1$ 点関数は、対応する (1.6) が 0 となることから、0 と定義する。Wightman 関数は、Schwinger 関数から関係 (1.3) によって定義される。

$$(1.8) \quad W_{2m}(x_1, \dots, x_{2m}) = \sum_{i_1 < j_1} D^{(-)}(x_{i_1} - x_{j_1}) \cdots D^{(-)}(x_{i_m} - x_{j_m})$$

このような Wightman 関数をもつ場を自由 (中性スカラー) 場という。つまり真空 $\psi_0 \in H$ に対して

$$(1.9) \quad (\psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m) \psi_0) = W_m(x_1, \dots, x_m)$$

を満足する, Hilbert 空間 H で定義された作用素を値にとる distribution $\varphi(x)$ を自由場という。

§2. Wick 積.

確率変数の積 $\phi(f_1) \cdots \phi(f_m)$ に対して Wick 積を

$$(2.1) \quad : \phi(f_1) \cdots \phi(f_l) : = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \sum_{C_r} \int \phi(f_{j_1}) \cdots \phi(f_{j_{2r}}) d\phi_c \phi(f_{k_1}) \cdots \phi(f_{k_{l-2r}})$$

C_r は $1, \dots, l$ を $j_1 < \cdots < j_{2r}; k_1 < \cdots < k_{l-2r}$

に分ける分割の全体

と定義し,

$$(2.2) \quad : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_l) : = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \sum_{C_r} (\psi_0, \varphi(x_{j_1}) \cdots \varphi(x_{j_{2r}}) \psi_0) \varphi(x_{k_1}) \cdots \varphi(x_{k_{l-2r}})$$

と自由場の積に対しても Wick 積を定義する。基本的な関係式は,

$$(2.3) \quad : e^{\phi(f)} : = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:\phi(f)^n:}{n!} = e^{-C(f,f)/2} e^{\phi(f)}$$

である。これより

$$(2.4) \quad \int : e^{\phi(x)} :: e^{\phi(y)} : d\phi_c = e^{c(x,y)}$$

が得られ, $x \rightarrow \delta x$ $y \rightarrow \delta y$ とするこにより,

$$(2.5) \quad \int : e^{\phi(x)} :: e^{\phi(y)} : d\phi_c = e^{S(x-y)}$$

これを解析接続して, 境界値をとることによって,

$$(2.6) \quad (\psi_0; e^{\phi(x)} :: e^{\phi(y)} : \psi_0) = e^{D^{(-)}(x-y)}$$

となるが, これは distribution ではない Fourier hyperfunction である。つきにこのことを示す。

§ 3. $D^{(-)}(x)$ の特異性

(1.2) において $m=0$ とおいたものは

$$\begin{aligned} (3.1) \quad D^{(-)}(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i|k|x^0} e^{i k \cdot x}}{|k|} dk \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i|k|(x^0-i\varepsilon)} e^{i|k||x|\cos\theta}}{|k|} |k|^2 \sin\theta d|k| d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(x^0-i\varepsilon)^2 - x^2} \end{aligned}$$

となる。(3.1) の k についての積分は $k=0$ の近くでは可積分であるので, (1.2) において $m \neq 0$ としたものと, 同じような特異性を示す。 $m \neq 0$ のときに, (3.1) のような特異性があらわにわかるような $D^{(-)}(x)$ の表示を求めるのは少しめんどうなので

$$(3.2) \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{e^{-\sqrt{k^2+m^2}\varepsilon}}{\sqrt{k^2+m^2}} dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{|k|^2+m^2}\varepsilon}}{\sqrt{|k|^2+m^2}} |k|^2 d|k|$$

とあくと,

$$(3.3) \quad |D(x^0-i\varepsilon, x)| \leq g(\varepsilon) = D(0-i\varepsilon, 0)$$

であって,

$$(3.4) \quad |k| = (s/\varepsilon)$$

とあくと,

$$(3.5) \quad \varepsilon^2 g(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \exp[-s\sqrt{1+(\varepsilon m/s)^2}] \frac{s}{\sqrt{1+(\varepsilon m/s)^2}} ds$$

であって

$$(3.6) \quad \varepsilon^2 g(\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty e^{-s} s ds \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

となるので $m \neq 0$ のときも ε^{-2} の位数の特異性を持つことがわかる。 $D^{(c)}(x)$ は (1.2), (1.3) からわかるように, $\text{Im } x^0 < 0$ に含まれる ある錐からの境界値であって, 実軸へ近づくときの位数が ε^{-2} だから 積は, distribution として定義できる。しかし

$$(3.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{(c)}(x)^n$$

が distribution になるのは, 有限個をのべて,

$a_n = 0$ となるときである。したがって (2.6) は distribution としては意味をもたない。それでは

hyperfunction としてはどうかを考える。場の理論では Fourier 変換が定義できないといけなないので、(3.7) がいかなる場合に Fourier hyperfunction を定義するかを調べてみる。まず $D^{(1)}(x)^2$ の Fourier 変換を計算する。これは超関数 $\delta(k^2 - m^2) \theta(k_0)$ の合成積だから

$$(3.8) \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int \delta(k^2 - m^2) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \theta(p_0 - k_0) dk$$

である。ここで

$$(3.9) \quad k_0 = k_0, \quad k_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad k_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ k_3 = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{(k_0)^2 - k^2}$$

と置いて

$$(3.10) \quad k^0, k^2, \theta, \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

を新しい変数とし、静止系 $p = (E, 0)$ において、

(3.8) を計算すると、

$$(3.11) \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int \delta(k^2 - m^2) \delta(E^2 - 2Ek_0 + k^2 - m^2) \theta(k_0) \theta(E - k_0) \\ \times \frac{r}{2} \sin \theta \, dk^2 d\theta d\varphi dk_0 \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \delta(E^2 - 2Ek_0) \theta(k_0 - m) \theta(E - k_0) \frac{1}{2} \sqrt{(k_0)^2 - m^2} \\ \times \sin \theta \, d\theta d\varphi dk_0 \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_m^E \frac{1}{2E} \delta\left(\frac{E}{2} - k_0\right) \sqrt{(k_0)^2 - m^2} \, dk_0 \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2} = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E^2 - (2m)^2}}{E}$$

となる。この関数はもともと Lorentz 不変であり、

(3.8) から P は $P_0 \geq 0$, $P^2 \geq (2m)^2$ を満足しなければならぬから (3.11) は

$$(3.12) \quad \frac{1}{4(2\pi)^3} \theta(P_0) \theta(P^2 - (2m)^2) \frac{\sqrt{P^2 - (2m)^2}}{\sqrt{P^2}}$$

$m=0$ のときは

$$(3.13) \quad \frac{1}{4(2\pi)^3} \theta(P_0) \theta(P^2)$$

となる。次に $D^{(-)}(x)^m$ の Fourier 変換を計算したいのであるが、 $m \neq 0$ のときはむしろ (3.11) ので、

$m=0$ の場合を計算する。そのときは

$$(3.14) \quad \frac{1}{(2\pi)^{2m-1}} \frac{1}{4^{m-1}} \frac{1}{(m-1)\{(m-2)!\}^2} (P^2)^{m-2} \theta(P_0) \theta(P^2)$$

である。 $m=2$ のときは (3.13) に一致する。あとは帰納法で示す。次の式が成立することより明らかである。

$$\begin{aligned} (3.15) \quad & \frac{1}{2\pi} \int (k^2)^{m-2} \theta(k^2) \theta(k_0) \delta((p-k)^2) \theta(p_0 - k_0) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int (k^2)^{m-2} \theta(k^2) \theta(k_0) \delta(E^2 - 2Ek_0 + k^2) \theta(E - k_0) \\ & \quad \times \frac{V}{2} \sin\theta dk^2 d\theta d\varphi dk_0 \\ &= \int \theta(2Ek_0 - E^2) (2Ek_0 - E^2)^{m-2} \theta(k_0) \theta(E - k_0) (E - k_0) dk_0 \\ &= \int_{E/2}^E E^{m-1} (2k_0 - E)^{m-2} (E - k_0) dk_0 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} E^{2(n-1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} (P^2)^{n-1} \theta(P_0) \theta(P^2) \end{aligned}$$

最後の式は (3.12) を導いたのと同様に導く。

$m \neq 0$ のときの $D^{(-)}(\alpha)^n$ の Fourier 像は

$$(3.16) \quad \frac{1}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{(n-1)!(n-2)!^2} (P^2)^{n-2} \theta(P_0) \theta(P^2 - (nm)^2)$$

で表される。 $n=2$ のときは (3.12) より明らかで、あとは帰納法で示す。次式がそれを示している。

$$\begin{aligned} (3.17) \quad & \frac{1}{2\pi} \int (k^2)^{n-2} \theta(k^2 - (nm)^2) \theta(k_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(p_0 - k_0) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int (k^2)^{n-2} \theta(k^2 - (nm)^2) \theta(k_0) \delta(E^2 - 2Ek_0 + k^2 - m^2) \\ & \quad \times \theta(E - k_0) \frac{V}{2} \sin\theta \, dk^2 d\theta d\varphi dk_0 \\ &= \int (-E^2 + 2Ek_0 + m^2)^{n-2} \theta(-E^2 + 2Ek_0 + m^2 - (nm)^2) \theta(k_0) \\ & \quad \times \theta(E - k_0) \sqrt{(k_0)^2 + E^2 - 2Ek_0 - m^2} \theta((k_0)^2 + E^2 - 2Ek_0 - m^2) dk_0 \\ &= \int_{\frac{E}{2} + \frac{(m^2-1)m^2}{2E}}^{E-m} (-E^2 + 2Ek_0 + m^2)^{n-2} \sqrt{(E-k_0)^2 - m^2} dk_0 \\ &= \int_{\frac{E}{2} + \frac{m^2}{2E}}^{E-m + \frac{m^2}{2E}} (-E^2 + 2Ek_0)^{n-2} \sqrt{(E-k_0 + \frac{m^2}{2E})^2 - m^2} dk_0 \\ &\leq \int_{\frac{E}{2}}^E E^{n-2} (2k_0 - E)^{n-2} (E - k_0) dk_0 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} E^{2(n-1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} (P^2)^{n-1} \theta(P_0) \theta(P^2 - \{(n+1)m\}^2) \end{aligned}$$

最後の等式は、(3.12) を導いたのと同様に導く。

$m=0$ のときは (3.14) より $m \geq 2$ に替えて

$$(3.18) \quad D^{(-)}(x)^n = \frac{1}{(2\pi)^{2m-1}} \frac{1}{4^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!(m-2)!^2} (-\square)^{m-1} D^{(-)}(x)^2$$

である。さて (3.7) が Fourier hyperfunction になるのはその Fourier 変換がそうなるときである。整関数

$$(3.19) \quad g(p) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^{2n}$$

が infra exponential になるための条件は

$$(3.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{(2n)! |b_n|} = 0$$

である。これは作用素

$$(3.21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (-\square)^n$$

が局所作用素になるための条件と一致している。(3.7)

と (3.14) より (3.19) が

$$(3.22) \quad b_n = \frac{1}{(2\pi)^{2n+3}} \frac{1}{4^{n+1}} \frac{1}{(n+1)(n!)^2} a_n$$

に対して infra exponential になるための条件は

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|a_n|} = 0 \quad \text{である。}$$

$a_n = \frac{1}{n!}$ はこの条件をみたすので (2.6) の $e^{D^{(-)}(x)}$ は Fourier hyperfunction である。 $M \neq 0$ のときも (3.16) を (3.14) でおさえることによって、 $e^{D^{(-)}(x)}$ が Fourier hyperfunction であることがわかる。

§ 4. <リ> = み不可能な場の理論

次の Lagrangian 密度

$$(4.1) \quad \begin{cases} L(x) = L_F(x) + L_I(x) \\ L_F(x) = -\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi(x) - \frac{1}{2}\{(\partial_\mu \phi(x))^2 + m^2 \phi(x)^2\} \\ L_I(x) = i\lambda(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x))\partial_\mu \phi(x) \end{cases}$$

で定義される理論を考える。<リ> = み可能性に関しては、次のことが知られている。光速度 c と Planck の定数 $\hbar$ を 1 とするよ) な単位系 (自然単位系) では、全ての物理量は長さのべきの次元をもつ。相互作用定数 λ の次元が $[\lambda] = L^\alpha$ となるとき $\alpha \leq 0$ ならば <リ> = み可能, $\alpha > 0$ ならば, <リ> = み不可能である。(4.1) の場合は $\alpha = 1$ となるので, <リ> = み不可能である。さて,

(4.1) を量子化するのであるが, ここでは Path integral によってそれを行うことにする。Feynman によると, (4.1) で定義される古典場に対応する, 量子場の Wightman 関数は

$$(4.2) \quad \int \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) e^{i \int L(\psi, \bar{\psi}, \phi) dx} \mathcal{D}(\psi, \bar{\psi}) \mathcal{D}(\phi)$$

で与えられる。ここで $\mathcal{D}(\phi)$ は関数空間上の Lebesgue 測度で $\mathcal{D}(\psi, \bar{\psi})$ は Grassmann 数を値にとる関数 $\psi, \bar{\psi}$ の空間上の測度である。これらの測度を数学的に構成するのは困難であるが, それはさておいて, 形式的に計算してみよう。

$$(4.3) \quad \psi(x) = e^{i\lambda\phi(x)} \psi'(x) \quad \bar{\psi}(x) = e^{-i\lambda\phi(x)} \bar{\psi}'(x)$$

と置いて, (4.1) に代入すると

$$(4.4) \quad L(\psi, \bar{\psi}, \phi) = L_F(\psi', \bar{\psi}', \phi)$$

となる。 (4.2) を変数変換 (4.3) を行って計算すると,

$$\begin{aligned} (4.5) \quad & \int e^{i\lambda\phi(x_1)} \psi'_\alpha(x_1) e^{-i\lambda\phi(x_2)} \bar{\psi}'_\beta(x_2) e^{i\int L_F(\psi', \bar{\psi}', \phi)(x) dx} \\ & \times \mathcal{D}(\psi', \bar{\psi}') \mathcal{D}(\phi) \\ & = \int e^{i\lambda\phi(x_1)} e^{-i\lambda\phi(x_2)} e^{i\int L_F(\phi)(x) dx} \mathcal{D}(\phi) \\ & \times \int \psi'_\alpha(x_1) \bar{\psi}'_\beta(x_2) e^{i\int L_F(\psi', \bar{\psi}')(x) dx} \mathcal{D}(\psi', \bar{\psi}') \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ は変数変換 (4.3) にともなう Jacobian であるが, ψ と $\bar{\psi}$ は逆数で変換されるので $\mathcal{D} = 1$ となるべきである。(4.5) の最後の積分は, 自由 Dirac 場の 2 点関数を与えるべきであり, その前の積分は, 直接計算しないで, 対応する Schwinger 関数を Gauss 測度を用いて計算して後に解析接続して Wightman 関数を求める。つまり

$$\begin{aligned} (4.6) \quad & \int \psi'_\alpha(x_1) \bar{\psi}'_\beta(x_2) e^{i\int L_F(\psi', \bar{\psi}')(x) dx} \mathcal{D}(\psi', \bar{\psi}') \\ & = S_{F, \alpha, \beta}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \int e^{i\lambda(\phi(x_1) - \phi(x_2))} d\phi_c$$

$$= \exp -\frac{\lambda^2}{2} C(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}, \delta_{x_1} - \delta_{x_2}) = e^{\lambda^2 [S(x_1 - x_2) - S(0)]}$$

である。最後の $e^{-\lambda^2 S(0)}$ は無意味な無限小だから,

これを おとす。つまり (4.7) の代わりに

$$(4.8) \quad \int : e^{i\lambda\phi(x_1)} : : e^{-i\lambda\phi(x_2)} : d\phi_c = e^{\lambda^2 S(x_1-x_2)}$$

とするのである。これから Wightman 関数は、

$$(4.9) \quad (\psi_0, : e^{i\lambda\phi(x_1)} : : e^{-i\lambda\phi(x_2)} : \psi_0) = e^{\lambda^2 D^{(-)}(x_1-x_2)}$$

となる。このように、この理論はくりこみ可能でないけれども、つまり (4.2) を λ のべき級数に展開して、各次数での発散を物理量に関連させて処理するという、せつどう論的くりこみはできないけれども、Wick 積を考えるという自然な方法で無限大は処理できて、結果は distribution でない Fourier hyperfunction となる。また一般に

$$\begin{aligned} (4.9) \quad & \int \prod_{j=1}^m : e^{i\lambda_j\phi(x_j)} : d\phi_c \\ &= \int e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j\phi(x_j)} e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j^2 C(\delta_{x_j}, \delta_{x_j})} d\phi_c \\ &= \exp -\frac{1}{2} C\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \delta_{x_j}, \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta_{x_k}\right) \exp \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 C(\delta_{x_j}, \delta_{x_j}) \\ &= \prod_{j < k}^m \exp -\lambda_j \lambda_k S(x_j - x_k) \end{aligned}$$

となるので

$$(4.10) \quad (\psi_0, \prod_{j=1}^m : e^{i\lambda_j\phi(x_j)} : \psi_0) = \prod_{j < k}^m e^{-\lambda_j \lambda_k D^{(-)}(x_j - x_k)}$$

となってこれも Fourier hyperfunction である。このようにして、 $\psi(x)$ についての Wightman 関数は、自由 Dirac 場 $\psi(x)$ の Wightman 関数 (= これは tempered

C は 1 の積分が 1 になるように正規化するための定数である。ただし $\psi_r^j(x), d\psi_r^j(x)$ は Grassmann 数であって、その積分は、規則

$$(5.5) \quad \int d\psi_r^j(x) = 0, \quad \int \psi_r^j(x) d\psi_r^j(x) = 1$$

により行う。 $G(\phi)$ は Gauss 測度で $d\phi_c$ が対応している。

$$(5.6) \quad L_I(x) = \frac{1}{2} \psi^2(x) e^{i\lambda\phi(x)} \gamma_\mu E [\psi'(x+e_\mu)(e^{-i\lambda\phi(x)} - e^{-i\lambda\phi(x+e_\mu)})/\Delta + \psi'(x-e_\mu)(e^{-i\lambda\phi(x)} - e^{-i\lambda\phi(x-e_\mu)})/\Delta]$$

と置く。これは無限小の差分を微分と思えば (4.1)

の $L_I(x)$ (の Euclid 化したもの) である。そして Schwinger 関数は、

$$(5.7) \quad \int \psi'_\alpha(x_1) \psi'_\beta(x_2) \exp\left(\sum_{x \in P^4} L_I(x)\right) D(\psi', \psi_2) G(\phi)$$

で与えられる。これは (4.2) に対応するものである。

$$(5.8) \quad \psi'(x) = e^{i\lambda\phi(x)} \psi'_1(x) \quad \psi^2(x) = e^{-i\lambda\phi(x)} \psi'^2(x)$$

と置くと、(5.7) は

$$(5.8) \quad \int e^{i\lambda\phi(x_1)} \psi'_\alpha(x_1) e^{-i\lambda\phi(x_2)} \psi'^2_\beta(x_2) D(\psi', \psi^2) G(\phi)$$

$$= \int \psi'_\alpha(x_1) \psi'^2_\beta(x_2) D(\psi', \psi^2) \int e^{i\lambda\phi(x_1)} e^{-i\lambda\phi(x_2)} G(\phi)$$

となり Wick 積によって無限大は処理できて、その標準部分は

$$(5.9) \quad (\psi_0, T(\hat{\psi}'_\alpha(x_1) \hat{\psi}'_\beta(x_2)) \psi_0) e^{\lambda^2 S(x_1 - x_2)}$$

となる。 $(\psi_0, T(\hat{\psi}'_\alpha(x_1)\hat{\psi}'_\beta(x_2))\psi_0)$ は自由 Dirac 場の
2点 Schwinger 関数である。これを解析接続することによ
って, Wightman 関数

$$(5.10) \quad S_{F,\alpha,\beta}(x_1-x_2) e^{\lambda^2 D^-(x_1-x_2)}$$

が得られる。

参考文献

- [1] A. Jaffe : High-Energy Behavior in Quantum Field Theory I.
phys. Rev. 158 1454-1461 (1967)
- [2] Nagamachi, S. Mugibayashi, N : Hyperfunction Quantum
Field Theory. Commun. math. Phys. 46, 119-134 (1976)
- [3] Wightman, A.S. Gårding, L. : Fields as operator
valued distributions in relativistic quantum theory.
Ark. Fys. 28, 13 129-184 (1964)

超準解析を用いたものについては,

Nagamachi, S. Mugibayashi, N : Construction of Euclidean
Fermi fields (preprint)

がある。