

Retracts of Compact Homogeneous Spaces and 0-dimensional Spaces

横浜国大・工 寺田敏司 (Toshiji Terada)

§ 1. Introduction. 位相空間 X は、任意の点 x, y に対して、 $f(x) = y$ をみたす X の homeomorphism f が存在するとき、(topologically) homogeneous とよばれる。

Uspenskii の結果として、すべての Tychonoff 空間 X に対して、積空間 $X \times Y$ が homogeneous となるように Tychonoff 空間 Y を選べることが知られている。すなわち、Tychonoff 空間のカテゴリーでは、homogeneity に関する問題は、余り多くは残っていない。ところが、コンパクト T_2 -空間のカテゴリーにおいては、homogeneity に関する多くの問題が残されている。たとえば、

問 (Arhangel'skii) すべてのコンパクト T_2 -空間は、homogeneous コンパクト T_2 -空間の連続像となり得るか?

問 (van Douwen) 特に, コンパクト T_2 -空間 X が,
 $\beta\mathbb{N}$ 上に連続写像で写されるとき, X は *non-homogeneous*
 か?

などが, 未解決な代表的問題である。ところで, 上述の
 Uspenskij の結果と関連して, Motorov が, 次のような結果を
 与えた。"任意のコンパクト T_2 -空間 Y との積 $X \times Y$ が
homogeneous でないコンパクト T_2 -空間 X が存在する。"
 実際, "*homogeneous* コンパクト T_2 -空間の *retract* とならな
 いコンパクト T_2 -空間 X が存在する。"

ここでの目的は, Motorov の結果と関連した Arhangel'skij
 の 2, 3 の問題に對して, その解を与えるところとする。

§ 2. Definitions. 以下の定義は, Arhangel'skij [1] に
 よる。

Def. X を位相空間とする。 X の閉集合全体を 2^X で表
 す。(連続性などを仮定しない) 写像 $F: X \rightarrow 2^X$ が,
 次の条件をみたすとき, F は, X 上の *cellularity* とよばれる。

- 1) $x \in F(x)$,
- 2) $y \in F(x) \longrightarrow F(y) \subset F(x)$,

3) $f: X \rightarrow X$ が $f(x)=y$ をみたす homeomorphism ならば, $f(F(x)) = F(y)$.

各 $F(x)$ は, cellularity F の term とよばれる。

X 上の cellularity F が, 任意の $x, y \in X$ に対して, $F(x) = F(y)$ または, $F(x) \cap F(y) = \emptyset$ をみたすとき, F は disjoint であるといわれる。

Th. (Arhangel'skii) 位相空間 X が homogeneous である必要十分条件は, 少なくとも一つのコンパクトな term を持つ cellularity (on X) は disjoint となることである。

Cellularity の作り方の例として, 次のようなものがある。今, $\mathcal{F} = (Y, \mathcal{Z}, \mathcal{E})$, ここで Y は位相空間, $\mathcal{Z}$ は Y の部分空間, $\mathcal{E}$ は Y の部分集合族とする。位相空間 X を任意にとる。 X の閉集合 P が, 次の条件をみたすとき, $\mathcal{F}$ -saturated といわれる。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の連続写像 } f: Y \rightarrow X \text{ に対して,} \\ f(E) \cap P \neq \emptyset \text{ for } \forall E \in \mathcal{E} \text{ ならば, } f(\mathcal{Z}) \subset P \end{array} \right.$$

そこで, $F_{\mathcal{F}}: X \rightarrow 2^X$ と

$$F_{\mathcal{F}}(x) = \cap \{ P : P \text{ は } x \text{ を含む } \mathcal{F}\text{-saturated 部分集合} \}$$

と定める。このとき、 F_q が確かに X 上の cellularity となる。
これを、 q から得られた cellularity とよぶことにする。

Def. X を位相空間とする。上のような任意の ω 個の q に対して、 q から得られる X 上の cellularity が、少なくとも1つの term をコンパクトにしているとき、disjoint となるならば、 X は cell soluble であるとよぶことにする。

Th. (Arhangel'skiĭ) homogeneous コンパクト T_2 -空間の retract は cell soluble である。

全 Tychonoff 空間と全連続写像からなるカテゴリーを $\mathbf{T}$ で表す。

Def. 各 $X \in \mathbf{T}$ に X 上の1つの cellularity F^X を対応させる規則 $\mathbf{F}$ が、次の条件をみたすとき、abstract cellularity とよばれる：

任意の $f: X \rightarrow Y$ ($Y \in \mathbf{T}$) に対して、

$$f(F^X(x)) \subset F^Y(f(x)) \quad \text{for } \forall x \in X.$$

$q = (Y, z, E)$ を前述のような ω 個とある。各 X

$\in \mathbf{T}$ に, g から得られる X 上の cellularity F_g^X を対応させると, abstract cellularity $\mathbf{F}_g = \{F_g^X : X \in \mathbf{T}\}$ が得られる。このような abstract cellularity を representable という。

Def. X をコンパクト T_2 -空間とする。任意の abstract cellularity $\mathbf{F}$ に対して, その X 上の cellularity F^X が disjoint となるとき, X は completely cell soluble であるとする。

§3. Results. Arhangel'skiĭ は, 次の問題を出している。

問題 1. non-representable abstract cellularity は, 存在するか？

この問題は, 次のように解決される。各 $X \in \mathbf{T}$ に対して, $F_c^X : X \rightarrow 2^X$ と

$F_c^X(x) = \text{the connected component of } x \text{ in } X$

で定義する。このとき,

$$F_c = \{F_c^X : X \in \mathbb{T}\}$$

は, abstract cellularity であることがわかる。

Th. F_c は non-representable である。

この定理の証明の概略は, 次のとおりである。任意の組 $q = (Y, Z, E)$ を前の様なものとする。 $F_q \neq F_c$ が示せばよい。そこで, q の場合別に調べる。たとえば, Y の clopen subset G で $G \cap Z \neq \emptyset$ かつ $E - G = \emptyset$ が各 $E \in E$ に対して成立している場合は, $F_q^X(x) = X$ が任意の $X \in \mathbb{T}$, 任意の $x \in X$ に対して成り立つ。したがって, 連結でない空間 X に対して, $F_q^X \neq F_c^X$ となる。また, Y の任意の clopen subset G に対して, $G \cap Z \neq \emptyset$ ならば, $E \subset G$ とみたす $E \in E$ が存在する場合には, $\kappa = |Y|$ として, 長さ κ^++1 の long line L を考えると, $F_q^L \neq F_c^L$ が示せる。

この結果に関連して, 次の問題が考えられる。

問 Cell soluble コンパクト T_2 -空間は completely cell soluble か？

Arhangel'skiĭ は、次の問題も提出している。

問題 2. 任意の 零次元 コンパクト T_2 -空間は、completely cell soluble か？

問題 3. $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ は completely cell soluble か？

これらの問題は、次のように解けた。

Th. 任意の 零次元 コンパクト T_2 -空間は completely cell soluble である。特に、 $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ も、そうである。

この定理を証明することは、結局、2点 discrete 空間の所の話に帰着される。F と、かつ T は abstract cellularity とするとき、2点 discrete 空間 $D = \{0, 1\}$ 上の cellularity F^D と考えたと、次の場合がある。

$$(1) \quad F^D(0) = \{0\} \quad \text{かつ} \quad F^D(1) = \{1\}$$

$$(2) \quad F^D(0) = F^D(1) = D$$

(1) の場合は、 $F^x(x) = \{x\}$ が、任意の零次元コンパクト T_2 -空間 X と任意の $x \in X$ に対して成り立ち、 F^x は disjoint となる。(2) の場合は、 $F^x(x) = X$ が、任意の $x \in X$ と任意の $x \in X$ に対して成り立ち、同様に、 F^x は, disjoint となる。

この定理に関連した次の問題が考えられる。

問 任意の零次元コンパクト T_2 -空間は homogeneous コンパクト T_2 -空間の retract となるか？

実際, Arhangel'skiĭ は、次の問題を出している。

問題 4. 任意の零次元コンパクト T_2 -空間 X に対して、積 $X \times Y$ が homogeneous となる compact T_2 -空間 Y が存在するか？

この問題の部分解的なものを与えることはできる。

Def. 位相空間 X が次の条件をみたすとき、 X は weakly homogeneous であると呼ぶことにする。

任意の $x, y \in X$ と任意の近傍 $U \ni x, V \ni y$ に対して, X からそれ自身への homeomorphism f が存在し, $f(x) \in V$ かつ $f^{-1}(y) \in U$ とできる。

明らかに, homogeneous ならば, weakly homogeneous である。

Prop. X が 零次元 T_1 -空間のとき, X が weakly homogeneous である必要十分条件は, X の任意の点 x, y に対して, x, y の任意の近傍 U_x, V_y に対し, x, y の clopen 近傍 U'_x, V'_y 。

$$\begin{cases} (1) & U'_x \subset U_x, V'_y \subset V_y \\ (2) & U'_x \text{ と } V'_y \text{ は homeomorphic} \end{cases}$$

をみたすように選べることである。

また, 次の事実も明らか。

Prop. X が 零次元 T_1 -空間のとき, X が homogeneous である必要十分条件は, X の任意の点 x, y に対して, x, y の任意の近傍 U_x, V_y をとると, x, y の clopen 近傍 U'_x, V'_y 。

- $\left\{ \begin{array}{l} (1) U'_x \subset U_x, V'_y \subset V_y. \\ (2) (U'_x, x) \text{ と } (V'_y, y) \text{ は pair として homeomorphic.} \end{array} \right.$
 をみたすように選べることである。

Prop. X が 1st countable, 零次元 のとき, weakly homogeneous と homogeneous は 同値である。

一般には, weakly homogeneous space は, homogeneous とは限らない。

Example. $\mathbb{Q}$ を有理数全体の作る普通の位相を与えた空間とするとき, $\beta\mathbb{Q}$ は, weakly homogeneous であるが, homogeneous ではない。

Th. X を 零次元 コンパクト T_2 -空間 とすれば, $X \times Y$ が weakly homogeneous となるように, 零次元 コンパクト T_2 -空間 Y を選べる。

実際, $\mathcal{B}$ を X の clopen 部分集合 からなる基底 とする。
 そこで,

$$Y = \prod \{ B^\omega : B \in \mathcal{B} \} \times X^\omega$$

とすれば, Y は weakly homogeneous 2, いかも, $X \times Y$ は Y と homeomorphic となる。

Cor. 任意の零次元コンパクト T_2 -空間は, weakly homogeneous compact T_2 -空間の retract となる。

さらに, Introduction で述べた, Arhangel'skiĭ の問題に対しても, 次の部分解が得られたことになる。

Cor. 任意の compact T_2 -空間は weakly homogeneous コンパクト T_2 -空間の連続像となる。

References

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, Topological homogeneity. Topological groups and their continuous images, Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), 69-105 = Russian Math. Surveys 42 (1987), 83-131.