

単純代数群の正則概均質ベクトル空間の b -関数について

筑波大数学研究科 笠井伸一 (Shin-ichi Kasai)

序文 既約概均質ベクトル空間の分類は [1] において完成しています。さらに、既約正則概均質ベクトル空間の b -関数はすでに (一つを除いて) すべて決定されています ([10])。この場合は基本的相対不変式が一個の場合であり、 b -関数の決定には [8] で示された超局所解析を用いて計算する方法が使われています。正則概均質ベクトル空間で基本的相対不変式が二個以上の場合にも [8] と同様の結果が成り立つことは [9] において示されています。ここではこの [9] の結果を用いて、単純代数群の既約でない正則概均質ベクトル空間の b -関数を決定します。単純代数群の既約でない概均質ベクトル空間は [2] において分類されていて、その正則性および基本的相対不変式の具体的形が求められています。可約代数群の表現で軌道の数有限個になるものはすでに [5] において決定されています。単純代数群の既約でない概均質ベクトル空間

間で有限個の軌道を持つものに対しては、それらの空間の軌道分解が[6],[7]に示されています。以上の結果を用いて[9]の超局所解析を用いた計算法を実行します。この結果は2年ほど前に計算してあったものですが、この機会に得られている結果をまとめておくことにします。b-関数の定義、計算のために必要な結果は§1にまとめてあります。§2では個々の単純代数群の既約でない正則概均質ベクトル空間に対して得られている結果(ホロ)ミ-図形など)を述べ、§3に結果をまとめておきます。

木村達雄先生には、[9]のpreprintや超局所解析を用いた計算法について等多くの事を教えていただきました。ここに感謝の意を表します。

§1. 準備

1-1. b-function. (G, ρ, V) を概均質ベクトル空間(以下 P.V. とかく)とし、 S をその singular set とする。 $X(G)$ を G のすべての有理指標のなす群とする。 V 上の有理関数 $f(x)$ が (G, ρ, V) の 相対不変式 であるとは、ある $\chi \in X(G)$ が存在して $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ ($g \in G, x \in V$) が成り立つことをいう。このとき χ を $f(x)$ の指標という。 $S_1, \dots, S_\ell$ を S の余次元1の既約成分連とする。そのとき各 S_i はある既約多項式 $f_i(x)$ の零点集合である: $S_i = \{x \in V; f_i(x) = 0\}$ ($1 \leq i \leq \ell$)。このときそれ

$f_1(x), \dots, f_\ell(x)$ は互いに代数的に独立な相対不変式で、 $\mathbb{C}$ か
 もすべての相対不変式 $f(x)$ は $f(x) = c \cdot f_1(x)^{m_1} \cdots f_\ell(x)^{m_\ell}$ ($c \in \mathbb{C}, (m_1, \dots,$
 $m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$) の形に一意的にあらわされる。 $f_1(x), \dots, f_\ell(x)$ のことを
 基本的相対不変式とよぶ。 $G_1 \in [G, G]$ と generic isotropy subgroup
 $G_x (x \in V - S)$ により生成される G の部分群とする。 G_1 は $x \in V - S$
 のとり方によるない。このとき $\chi \in X(G)$ がある相対不変式に対
 応しているための必要十分条件は $\chi|_{G_1} = 1$ なることである。し
 たが、 $X_1(G) := \{\chi \in X(G); \chi|_{G_1} = 1\}$ は $\chi_1, \dots, \chi_\ell$ により生成される階
 数 ℓ の自由アーベル群である。(以上については [1] の §4 をみよ)

$\mathfrak{g}$ を G のリー環, $\mathfrak{g}_1$ を G_1 のリー環とし, $\delta\chi_1, \dots, \delta\chi_\ell$ を $\chi_1, \dots, \chi_\ell$
 の微分とする。 $\overline{X}_1 := \{\omega \in \mathfrak{g}^*; \omega|_{\mathfrak{g}_1} = 0\}$ とおけば, 各 $\delta\chi_i \in \overline{X}_1$ ($1 \leq i \leq \ell$)
 である。 $\overline{X}_0$ を $\delta\chi_1, \dots, \delta\chi_\ell$ で生成される $\overline{X}_1$ の部分空間とする。P. V.
 (G, ρ, V) が 正則 であるとは, ある $\omega = \sum_{i=1}^{\ell} s_i \delta\chi_i \in \overline{X}_0$ が存在して
 $\text{grad} \log f_1^{s_1} \cdots f_\ell^{s_\ell} : V - S \rightarrow V^*$ の像が Zariski-稠密となることを
 いう。群 G が reductive であるときは, P. V. (G, ρ, V) が正則
 であることとその singular set S が超曲面 (すなわち余次元
 2 以上の既約成分をもたない) であることは同値である。 $(G,$
 $\rho^*, V^*)$ が (G, ρ, V) の dual であるとは, ρ^* が V の双対空間 V^* 上
 での ρ の反傾表現であることという, i.e., $\langle \rho(g)x, \rho^*(g)y \rangle = \langle x, y \rangle$
 $(g \in G, x \in V, y \in V^*)$ 。 (G, ρ, V) が正則 P. V. ならばその dual $(G,$
 $\rho^*, V^*)$ も正則 P. V. であり, その singular set S^* の余次元 1 の

既約成分の数 ℓ^* は ℓ に一致する。

(G, ℓ, V) を正則 P. V. とし, $f_1^*(y), \dots, f_\ell^*(y)$ をその dual P. V. (G, ℓ^*, V^*) の基本的相対不変式連とし, $\chi_1^*, \dots, \chi_\ell^*$ をその指標連とする, 即ち $f_i^*(\ell^*(g)y) = \chi_i^*(g) f_i^*(y)$ ($g \in G, y \in V^*$) ($i=1, \dots, \ell$)。そのとき $X_1(G)$ は $\chi_1^*, \dots, \chi_\ell^*$ で生成される自由アベル群でもある。任意の $\chi \in X_1(G)$ に対して $\chi = \prod_{i=1}^{\ell} \chi_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{\ell} \chi_i^*{}^{m_i}$ ($n_i, m_i \in \mathbb{Z}$) となる。多項式 $f_i(x), f_i^*(y)$ ($1 \leq i \leq \ell$) を以下固定し, $f^\chi(x) := \prod_{i=1}^{\ell} f_i(x)^{n_i}$, $f^*\chi = \prod_{i=1}^{\ell} f_i^*(y)^{m_i}$ とおく。 $\overline{X}_0 = \langle \delta\chi_1, \dots, \delta\chi_\ell \rangle_{\mathbb{C}} \ni \omega = \sum_{i=1}^{\ell} s_i \delta\chi_i \mapsto s = (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ により $\mathbb{C}^\ell$ と同一視する。 $s \in \overline{X}_0$ に対し $f^s(x) := \prod_{i=1}^{\ell} f_i(x)^{s_i}$ とおく。 $\chi = \prod_{i=1}^{\ell} \chi_i^{n_i} \in X_1(G)$ に対して $\delta\chi = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \delta\chi_i \in \overline{X}_0$ で $f^{\delta\chi}(x) = \prod_{i=1}^{\ell} f_i(x)^{n_i}$ である。したがって $f^\chi(x) = f^{\delta\chi}(x)$ ($\chi \in X_1(G)$)。

Prop. 1. (G, ℓ, V) を正則 P. V. とする。 $\chi \in X_1(G)$ を $f^{*\chi^{-1}}(y)$ が V^* 上の多項式となる指標とする。そのとき $s \in \overline{X}_0$ のある多項式 $b_\chi(s)$ が存在して $f^{*\chi^{-1}}(\text{grad}_x) f^{s+\delta\chi}(x) = b_\chi(s) f^s(x)$ が成り立つ。

上の命題の s の多項式 $b_\chi(s)$ を b-関数 (b-function) という。

(以上については [8] の § 1 をみよ)

1-2. good holonomic variety. P. V. (G, ℓ, V) を固定する。 V の余接束 T^*V を $V \times V^*$ と同一視する。

V の点 x_0 に対して, conormal vector space $V_{x_0}^* \in V_{x_0}^* = (d\ell(g)x_0)^\perp = \{y \in V^*; \langle d\ell(A)x_0, y \rangle = 0 \text{ for all } A \in \mathfrak{g}\}$ によって定義する。 $V_{\ell(g)x_0}^* = \ell^*(g) V_{x_0}^*$ ゆえ, isotropy subgroup G_{x_0} が $\ell_{x_0} := \ell^*|_{G_{x_0}}$ により $V_{x_0}^*$ に作

用する。こうして得られる三つ組 $(G_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*)$ を (G, e, V) の x_0 における colocalization という。 $(G_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*) \cong (G_{x_1}, e_{x_1}, V_{x_1}^*)$ for $x_1 \in e(G)x_0$ である。

軌道 $e(G)x_0$ の conormal bundle $T(e(G)x_0)^\perp (= T_{e(G)x_0}^* V)$ を集合 $\{(x, y) \in V \times V^*; x \in e(G)x_0, y \in V_{x_0}^*\}$ の $V \times V^*$ における Zariski-閉包として定義する。これは $(\dim V)$ -次元の代数的集合である。
 G は $(x, y) \mapsto g \cdot (x, y) := (e(g)x, e^*(g)y)$ for $g \in G$ により $T(e(G)x_0)^\perp$ に作用する。そのとき G が $T(e(G)x_0)^\perp$ に概均質に作用（すなわち Zariski-稠密な軌道が存在）することと, colocalization $(G_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P. V. であること, 及びある $y_0 \in V^*$ が存在して $T(e(G)x_0)^\perp = \overline{G(x_0, y_0)}$ となることは同値である。ここに $G(x_0, y_0) = \{(e(g)x_0, e^*(g)y_0); g \in G\}$ 。

軌道 $e(G)x_0$ の conormal bundle $\Lambda = T(e(G)x_0)^\perp$ が good holonomic variety であるとは次の2つの条件をみたすことをいう。

- (1) 群 G は Λ に概均質に作用する, 即ち $\Lambda = \overline{G(x_0, y_0)}$ for $\exists y_0 \in V^*$.
- (2) $\Lambda \subset W$. ここに W は集合 $\{(x, \text{grad } \log f^s(x)) \in V \times V^*; x \in V - S, s \in \mathbb{C}^d\}$ の $V \times V^*$ における Zariski-閉包をあらわす。

一般に P. V. (G, e, V) が正則であることと, 原点の conormal bundle $\Lambda = \{0\} \times V^*$ が good holonomic variety であることは同値である。また $\Lambda = V \times \{0\}$ はつねに good holonomic variety である。

次の命題は G -軌道の conormal bundle Λ が $\Lambda \subset W$ となるため

の十分条件を与える。

Prop. 2. (Proposition 6.20 in [9]; cf. Proposition 6.6 in [8])

Λ_0 と Λ_1 をそれぞれある G -軌道の conormal bundle とする。ある $\varphi \in \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ に対して $\dim \varphi = \dim V - l$ が成り立つと仮定する。ここに $\varphi_0 := \{A \in \varphi; \delta x_i(A) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, l\}$ 。 Λ_0 (又は Λ_1) $\subset W$ と仮定する。そのとき $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \subset W$ が成り立つ。

1-3. $b_{\Lambda_1}^X(s)/b_{\Lambda_0}^X(s)$. Λ を good holonomic variety とし, f^X が多項式であるとする。 $s = (s_1, \dots, s_l) \in X_0$ の多項式 $b_{\Lambda}^X(s)$ が Λ 上の local b-function であるとは, Λ の generic point の近傍で定義された s によらない可逆擬微分作用素 P_X が存在して $P_X f^{s+\delta_X} = b_{\Lambda}^X(s) f^s$ をみたすことをいう ([8] の Def. 5.1 をみよ)。local b-function $b_{\Lambda}^X(s)$ は Λ に対して定数倍を除いて一意に存在する。

(G, e, V) が正則 P. V. ならば, b-function $b_X(s)$ は原点の conormal bundle $\Lambda = \{0\} \times V^*$ の local b-function である。一方 $\Lambda = V \times \{0\}$ に対しては $b_{\Lambda}^X(s) = 1$ である。そこで2つの local b-function $b_{\Lambda}^X(s)$ と $b_{\Lambda'}^X(s)$ の関係が Λ と Λ' がある条件をみたすときにわかれば $b_{V \times \{0\}}^X(s) = 1$ から出発して $b_X(s) = b_{\{0\} \times V^*}^X(s)$ が求められることが期待される。

2つの good holonomic variety Λ_0 と Λ_1 とが余次元1で交わる (すなわち $\dim \Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \dim V - 1$) とし, 商 $b_{\Lambda_1}^X(s)/b_{\Lambda_0}^X(s)$ は次の定理により与えられる。

Th. 3. (Main Theorem 7.9 in [9]; cf. Theorem 7.5 in [8])

2つの good holonomic variety Λ_0 と Λ_1 とが余次元 1 で交わり, その intersection exponent が $(\mu: \nu)$ であるとする。 $m = \varepsilon f^s$ が $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ に support をもつ simple holonomic system であると仮定する。 $\text{ord}_{\Lambda_j} f^s = -\sum_{i=1}^l m_{ji} s_i - \frac{\mu_j}{2}$ ($j=0,1$) のとき, $s = (s_1, \dots, s_l)$ の linear form $e_1(s)$ を $e_1(s) := \frac{1}{\nu+1} \left(\sum_{i=1}^l (m_{1i} - m_{0i}) s_i \right)$ と定義する。 $e_1(\delta x) > 0$ と仮定する。 そのとき

$$b_{\Lambda_1}^x(s) / b_{\Lambda_0}^x(s) = \text{const.} \prod_{k=0}^{\nu} \left[\frac{1}{\nu+1} (\text{ord}_{\Lambda_0} f^s - \text{ord}_{\Lambda_1} f^s) + \frac{\mu}{2(\mu+\nu)} + \frac{k}{\mu+\nu} \right] e_1(\delta x),$$

ただし $k > 0$ に対して $[\alpha]_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ 。

Cor. 4. (cf. Corollary 7.6 in [8])

Λ_0 と Λ_1 との intersection exponent が $\mu=1$ かつ $\nu=0$ のとき,

$$b_{\Lambda_1}^x(s) / b_{\Lambda_0}^x(s) = \text{const.} \left[\text{ord}_{\Lambda_0} f^s - \text{ord}_{\Lambda_1} f^s + \frac{1}{2} \right] e_1(\delta x).$$

上の定理は, もし $\text{ord}_{\Lambda_j} f^s$ ($j=0,1$) と $(\mu: \nu)$ が計算されれば, 商 $b_{\Lambda_1}^x(s) / b_{\Lambda_0}^x(s)$ が (ある条件の下で) 得られることを述べている。 その $\text{ord}_{\Lambda_j} f^s$ と $(\mu: \nu)$ は次の命題 5, 6 により計算される。

Prop. 5. (Proposition 4.11 in [9]; cf. Proposition 4.14 in [8])

$\Lambda = \overline{G(x_0, y_0)}$ を good holonomic variety とする。 G の リー環 の元 A_0 で $de(A_0)x_0 = 0$ かつ $de^*(A_0)y_0 = y_0$ なるものを一つとる。

そのとき $\text{ord}_{\Lambda} f^s = \sum_{i=1}^l s_i \delta x_i(A_0) - \text{tr}_{V_{x_0}^*} de_{x_0}(A_0) + \frac{1}{2} \dim V_{x_0}^*$ 。

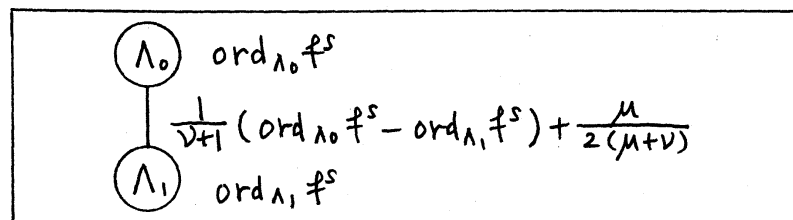
ここに $\text{tr}_{V_{x_0}^*} A_0$ は $de_{x_0}(A_0)$ の $V_{x_0}^*$ における trace を表わす。

Prop. 6. (Proposition 6.5 in [8])

$\Lambda_0 = \overline{G(x_0, y_0)}$ と $\Lambda_1 = \overline{G(x_1, y_1)}$ を good holonomic variety と

$\vee, (x_0, y_1) \in \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ かつ $\dim \mathcal{G}(x_0, y_1) = \dim V - 1$ であるとする。
 今の元 A_1 で $de(A_1)x_0 = 0$ かつ $de^*(A_1)y_1 = y_1$ なるものを一つとる。
 そのとき A_1 は 1 次元ベクトル空間 $\bar{V} := V_{x_0}^* \text{ modulo } de_{x_0}(\mathcal{G}_{x_0})y_1$ に作用する。
 β をその固有値, 即ち $\beta = \text{tr}_{\bar{V}} A_1$ とする。そのとき μ と ν は $\beta = \frac{\mu}{\mu + \nu}, (\mu, \nu) = 1$ により与えられる。もし β が一意的に定まらなければ, 即ち β が A_1 に依存するならば, $\mu = 1, \nu = 0$ である。注. $(\mu: \nu)$ は非負整数の組である。

1-4. holonomy diagram. $(\mathcal{G}, e, V)$ を有限個の軌道を持つ正則 P.V. とする。 $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\}$ を W に含まれる V のある $\mathcal{G}$ -軌道の conormal bundle の全体とする。各 Λ_i に円を対応させ Λ_i と Λ_j とが余次元 1 で交わる (即ち $\dim \Lambda_i \cap \Lambda_j = \dim V - 1$) としかつそのときに限って対応する円を線でつなぐ。こうして得られる図形を P.V. $(\mathcal{G}, e, V)$ のホロミニ図形 (holonomy diagram) という。一般に, Λ_i, Λ_j が good holonomic variety のとき, Λ_i に対応する円の右側に $\text{ord}_{\Lambda_i} f^S$ を記し, Λ_i と Λ_j が余次元 1 で交わるときに結び線の右側に $\frac{1}{\nu+1}(\text{ord}_{\Lambda_i} f^S - \text{ord}_{\Lambda_j} f^S) + \frac{\mu}{2(\mu+\nu)}$ を書く。



ホロミニ図形の典型的な作り方 (Remark 6.2 in [8]):

$x_0 \in V$ とし, $(\mathcal{G}, e, V)$ の x_0 における colocalization $(\mathcal{G}_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*)$

が P. V. であると仮定する。軌道 $e(G)x_0$ の conormal bundle $\Lambda_0 = T(e(G)x_0)^\perp$ を考える。 $y_0 \in P. V. (G_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の generic point とすれば $\Lambda_0 = \overline{G(x_0, y_0)}$ である。 $y_1 \in V_{x_0}^*$ を $\text{codim}_{V_{x_0}^*} e_{x_0}(G_{x_0})y_1 = 1$ なる点とする。そのとき軌道 $G(x_0, y_1)$ は $(\dim V - 1)$ -次元かつ $G(x_0, y_1) \subset \Lambda_0$ となる。このときさらに (G, e, V) の dual P. V. (G, e^*, V^*) の y_1 における colocalization $(G_{y_1}, e_{y_1}^*, V_{y_1}^*)$ が P. V. であると仮定し、 x_1 をその generic point とする。そのとき $x_1 \in V$ を通る軌道 $e(G)x_1$ の conormal bundle $\Lambda_1 = T(e(G)x_1)^\perp$ は $\Lambda_1 = \overline{G(x_1, y_1)}$ となる。そのとき、もし $e(G)x_0 \neq e(G)x_1$ ならば、 $G(x_0, y_1) \subset \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ かつ $\dim G(x_0, y_1) = \dim V - 1$ ゆえ、 $\dim \Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \dim V - 1$ となる、即ち Λ_0 と Λ_1 とは余次元 1 で交わる。したがって 2 次のホロノミー図形を得る。

$$\Lambda_0 \text{ --- } \Lambda_1 = T_{e^*(G)y_1}^* V^*.$$

$x_0 \in V$ に対し、colocalization $(G_{x_0}, e_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P. V. であると仮定し、 y_0 をその generic point とする。 (G, e^*, V^*) に対し $V = (V^*)^*$ と考えて、 V^* の軌道 $e^*(G)y_0$ の conormal bundle $T_{e^*(G)y_0}^* V^* (\subset V \times V^*)$ を作ったとき、 $T_{e(G)x_0}^* V = T_{e^*(G)y_0}^* V^*$ となる。したがって V の軌道 $e(G)x_0$ と V^* の軌道 $e^*(G)y_0$ が 1 対 1 に対応する。それらを互いに conormal bundle で対応する軌道という。 G が reductive のとき、P. V. として $(G, e, V) \cong (G, e^*, V^*)$ ゆえ、 $>$ により V と V^* を同一視すれば、 V^* の軌道 $e^*(G)y_0$ は V のある軌道 $e(G)x_0'$ と同一視できる。このとき軌道 $e(G)x_0$ と $e(G)x_0'$ は互いに dual orbit であるという。

§ 2.

Th. ([2]) 単純代数群の(既約でない)正則概均質ベクトル空間は次の通り。ここに N は代数的に独立な相対不変式の個数をおさやす (§ 1 の 2 のこと)。

(I) $N = 1$

- (1) $(GL(1)^2 \times SL(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1^*, V(n) \oplus V(n)^*)$.
- (2) $(GL(1)^n \times SL(n), \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_1, V(n) \oplus \cdots \oplus V(n))$.
- (3) $(GL(1)^2 \times SL(2m+1), \lambda_2 \oplus \lambda_1, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1))$.
- (4) $(GL(1)^2 \times Sp(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1, V(2n) \oplus V(2n))$.
- (5) $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{偶半スピ表現} \oplus \text{偶半スピ表現}, V(16) \oplus V(16))$.

(II) $N = 2$ その 1.

- (6) $(GL(1)^3 \times SL(2m), \lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1, V(m(2m-1)) \oplus V(2m) \oplus V(2m))$.
- (7) $(GL(1)^3 \times SL(2m), \lambda_2 \oplus \lambda_1^* \oplus \lambda_1^*, V(m(2m-1)) \oplus V(2m)^* \oplus V(2m)^*)$.
- (8) $(GL(1)^2 \times SL(n), 2\lambda_1 \oplus \lambda_1, V(\frac{1}{2}n(n+1)) \oplus V(n))$.
- (9) $(GL(1)^2 \times SL(n), 2\lambda_1 \oplus \lambda_1^*, V(\frac{1}{2}n(n+1)) \oplus V(n)^*)$.
- (10) $(GL(1)^2 \times SL(7), \lambda_3 \oplus \lambda_1, V(35) \oplus V(7))$.
- (11) $(GL(1)^2 \times SL(7), \lambda_3 \oplus \lambda_1^*, V(35) \oplus V(7)^*)$.
- (12) $(GL(1)^2 \times Sp(3), \lambda_3 \oplus \lambda_1, V(14) \oplus V(6))$.
- (13) $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{半スピ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(16) \oplus V(10))$.

その 2.

- (14) $(GL(1)^3 \times SL(2m), \lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1^*, V(m(2m-1)) \oplus V(2m) \oplus V(2m)^*)$.

$$(15) \quad (\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{Spin}(7), \text{スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(8) \oplus V(7)).$$

$$(16) \quad (\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{Spin}(8), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(8) \oplus V(8)).$$

$$(17) \quad (\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{Spin}(12), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(32) \oplus V(12)).$$

(III) $N = 3$

$$(18) \quad (\mathrm{GL}(1)^3 \times \mathrm{SL}(2), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(2) \oplus V(2) \oplus V(2)).$$

(IV) $N \geq 4$

$$(19) \quad (\mathrm{GL}(1)^{n+1} \times \mathrm{SL}(n), \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(n) \oplus \cdots \oplus V(n) \oplus V(n)) (n \geq 3) \quad N = n+1.$$

$$(20) \quad (\mathrm{GL}(1)^{n+1} \times \mathrm{SL}(n), \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*, V(n) \oplus \cdots \oplus V(n) \oplus V(n)^*) (n \geq 3) \quad N = n+1.$$

$$(21) \quad (\mathrm{GL}(1)^4 \times \mathrm{SL}(2m+1), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1)) \quad N=4.$$

$$(22) \quad (\mathrm{GL}(1)^4 \times \mathrm{SL}(2m+1), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1)^* \oplus V(2m+1)^*) \quad N=4.$$

注. (2) with $n \geq 4$, (5), (19), (20), (21), (22) は無限個の軌道を持ち,

他はすべて有限個の軌道を持つ ([5]).

2-1. $N = 1$ の場合.

$$(1) \quad (\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{SL}(n), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*, V(n) \oplus V(n)^*).$$

基本的相対不変式は $f(\tilde{x}) = \langle x, y \rangle$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V(n) \oplus V(n)^*$ であり、
 与えられる ([2] の § 3. A の (1)). $f(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ に対して
 定義により $f(\mathrm{grad} x) f(x)^{s_1+1} = b_{\chi_1}(s_1) f(x)^{s_1}$ を直接計算すること
 により $b_{\chi_1}(s_1) = (s_1+1)(s_1+n)$ を得る。よって $b_{\chi_1^{m_1}}(s_1) = [s_1+1]_{m_1} \cdot$
 $[s_1+n]_{m_1}$ for $m_1 > 0$ を得る。なお軌道分解およびホロミ図形は次の通り。

$(\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{SL}(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1^*)$ は次の

5 個の軌道に分解する.

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) (e_1, e_1)	0	(5) $(0, 0)$	$2n$
(2) (e_1, e_2)	1	(self-dual)	
(3) $(e_1, 0)$	n	(4) $(0, e_1)$	n

$$(2) \quad (\mathrm{GL}(1)^n \times \mathrm{SL}(n), \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_1, V(n) \oplus \cdots \oplus V(n)).$$

基本的相対不変式は $f_1(x) = \det(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V(n) \oplus \cdots \oplus V(n)$ である ([2] の § 3. A の (2)). $(\mathrm{GL}(1)^n \times \mathrm{SL}(n), \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_1) \cong (\mathrm{SL}(n) \times \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{GL}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{GL}(1) \end{smallmatrix} \right), \lambda_1 \oplus \lambda_1) \hookrightarrow (\mathrm{SL}(n) \times \mathrm{GL}(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ により, (2) の b -関数は既約正則 P. V. $(\mathrm{SL}(n) \times \mathrm{GL}(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ の b -関数に帰着される. したがって $b_{\chi^{m_1}}(s_1) = [s_1+1]_{m_1} [s_1+2]_{m_1} \cdots [s_1+n]_{m_1}$ for $m_1 > 0$ である. 注. $n = 2, 3$ のとき (2) は有限個の軌道に分解する. それらの軌道分解およびホロミ図形は次の通り.

$(\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{SL}(2), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ は次の 5 個の

軌道をもつ (Prop. 4(I) in [7]).

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(0, 0)$	4	(5) (e_1, e_2)	0
(2) $(e_1, 0)$	2	(3) $(0, e_1)$	2
(4) (e_1, e_1)	1	(self-dual)	

図 1. $(\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{SL}(n), \lambda_1 \oplus \lambda_1^*)$

のホロミ図形.

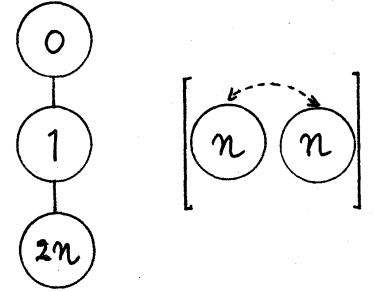
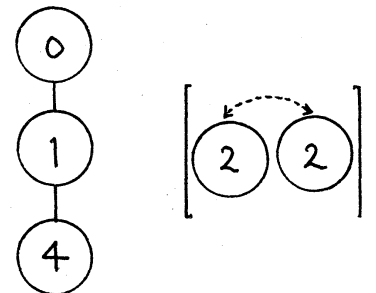


図 2. $(\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{SL}(2), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$

のホロミ図形.



$(GL(1)^3 \times SL(3), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$ は次の 16 個

の軌道をもつ (Prop. 4 III) in [7]).

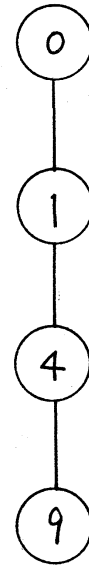
代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(0, 0, 0)$	9	(16) (e_1, e_2, e_3)	0
(2) $(e_1, 0, 0)$	6	(9) $(0, e_1, e_2)$	3
(3) $(0, e_1, 0)$	6	(10) $(e_1, 0, e_2)$	3
(4) $(0, 0, e_1)$	6	(11) $(e_1, e_2, 0)$	3
(5) $(0, e_1, e_1)$	5	(13) (e_1, e_2, e_2)	2
(6) $(e_1, 0, e_1)$	5	(14) (e_1, e_2, e_1)	2
(7) $(e_1, e_1, 0)$	5	(12) (e_1, e_1, e_2)	2
(8) (e_1, e_1, e_1)	4	(15) $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$	1

ここに dual orbits を横にならべてある.

図 3.

$(GL(1)^3 \times SL(3), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$

のホロノミー図形.



(3) $(GL(1)^2 \times SL(2m+1), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1))$.

$V = \{ \tilde{x} = \begin{bmatrix} X & y \\ -y^t & 0 \end{bmatrix}; X = -X^t \in M(2m+1), y \in \mathbb{C}^{2m+1} \}$ とし, $G = \{ g = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} A & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix} \in GL(2(m+1)); (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(2m+1) \}$ とおくとき, 作用は $e(g)\tilde{x} = g\tilde{x}g^t = \begin{bmatrix} \alpha A X^t A & \beta A y \\ -\beta^t y^t A & 0 \end{bmatrix}$ for $g \in G, \tilde{x} \in V$ で与えられる. そのとき基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = Pf(\tilde{x})$ for $\tilde{x} \in V$ で与えられる ([2] の § 3. A の (8)). $(GL(1)^2 \times SL(2m+1), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1, V(m(2m+1)) \oplus \mathbb{C}^{2m+1}) \cong (G, e, V) \hookrightarrow (GL(2(m+1)), \Lambda_2, V((m+1)(2m+1)))$ により, (3) の b -関数は既約正則 $P.V.(GL(2(m+1)), \Lambda_2)$ の b -関数に帰着される. したがって $h_{X_1^{m_1}}(s_1) = \prod_{k=1}^{m+1} [s_1 + 2k - 1]_{n_1}$ for $m_1 > 0$ である. 注. 軌道分解およびホロノミー

一図形は次の通りである。

$(GL(1)^2 \times SL(2m+1), \lambda_2 \oplus \lambda_1)$ は次の

$3m+2$ 個の軌道に分解する。

$$\therefore \text{ここに } J'_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2m+1), J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

代表点

dual orbit

$(1), k$	(J'_k, e_{2m+1})	$(0 \leq k \leq m)$	$(J'_{m-k}, 0)$
$(2), k$	(J'_k, e_1)	$(1 \leq k \leq m)$	(J'_{m-k+1}, e_1)
$(3), k$	$(J'_k, 0)$	$(0 \leq k \leq m)$	(J'_{m-k}, e_{2m+1})

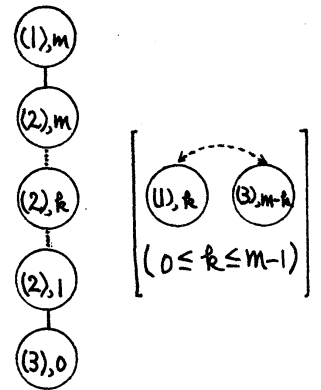


図4において $(i), k$ は軌道 $(i), k$ の conormal bundle を表わす。

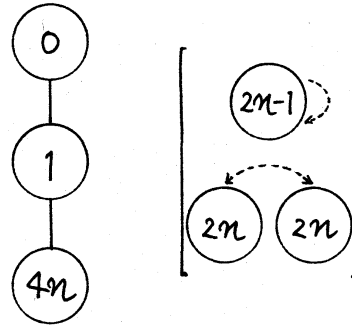
$$(4) \quad (GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1, V(2m) \oplus V(2m)).$$

基本的相対不変式は $f_1(x) = Pf^t(x, y) J(x, y)$ for $x = (x, y) \in V(2m) \oplus V(2m)$ ($J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$) で与えられる ([2] の § 3, A の (20)). $(GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1) \cong (Sp(m) \times (GL(1) \times GL(1)), \lambda_1 \oplus \lambda_1) \hookrightarrow (Sp(m) \times GL(2), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ により, (3) は既約正則 P. V. $(Sp(m) \times GL(2), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ の場合に帰着される。また, $(GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1) \cong (GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1^*) \hookrightarrow (GL(1)^2 \times SL(2m), \lambda_1 \oplus \lambda_1^*)$ と見れば, (1) の結果に帰着される。したがって $\theta_{x, m_1}(s_1) = [s_1 + 1]_{m_1}$, $[s_1 + 2m]_{m_1}$ for $m_1 > 0$ である。注. 軌道分解およびホロ) ミー図形は次の通り。

$(GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ ($m \geq 2$) は 6 個の軌道をもつ (Prop. 5(II) in [7]).

図5. $(GL(1)^2 \times Sp(m), \lambda_1 \oplus \lambda_1)$ のホロ) ミー図形。

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) (e_1, e_{m+1})	0	(6) $(0, 0)$	$4n$
(2) (e_1, e_2)	1	(self-dual)	
(3) (e_1, e_1)	$2n-1$	(self-dual)	
(4) $(0, e_1)$	$2n$	(5) $(e_1, 0)$	$2n$



(5) $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{偶半スピノ表現} \oplus \text{偶半スピノ表現}, V(16) \oplus V(16)).$

偶半スピノ α は $\alpha = \alpha_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \alpha_{ij} e_i e_j + \sum_k \alpha_k^* e_k^*$, $e_k e_k^* = e_1 \cdots e_5$ と表わせる (pp. 110-112 in [1]). $X = (x_{ij})$ を n 行 n 列の得られる 5×5 歪対称行列, X_i を $(-1)^i X$ から i 行 i 列を除いて得られる 4×4 歪対称行列とする。一般に 4×4 歪対称行列 $y = (y_{ij})$ に対し $Pf(y) = y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23}$ とおく (即ち Pfaffian)。偶半スピノ表現空間 $V(16)$ 上に次の 10 個の 2 次形式 $Q_i(\alpha)$ ($i=1, \dots, 10$) を定義する。 $Q_i(\alpha) = \sum_{j=1}^5 \alpha_{ij} \alpha_j^*$, $Q_{i+5}(\alpha) = \alpha_0 \alpha_i^* + Pf(X_i)$ ($i=1, \dots, 5$)。また $B_i(\alpha, \beta) = Q_i(\alpha + \beta) - Q_i(\alpha) - Q_i(\beta)$ とおく。そのとき基本的相対不変式は $f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^5 B_i(\alpha, \beta) B_{i+5}(\alpha, \beta)$ for $\tilde{\alpha} = (\alpha, \beta) \in V(16) \oplus V(16)$ である ([10] の p. 21; [2] の § 3. A (17))。 $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{偶半スピノ表現} \oplus \text{偶半スピノ表現}) \cong (Spin(10) \times \begin{pmatrix} GL(1) \\ GL(1) \end{pmatrix}, \text{偶半スピノ表現} \otimes \lambda_1) \hookrightarrow (Spin(10) \times GL(2), \text{偶半スピノ表現} \otimes \lambda_1)$ により, 既約正則 P. V. $(Spin(10) \times GL(2), \text{偶半スピノ表現} \otimes \lambda_1)$ の場合に帰着される。したがって $\chi_{n_1}(S_1) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+4]_{n_1} \cdot [S_1+5]_{n_1} \cdot [S_1+8]_{n_1}$, for $n_1 > 0$ である。

2-2. $N = 2$ (その1) の場合.

(b) $(GLU)^3 \times SL(2m)$, $\lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1$, $V(m(2m-1)) \oplus V(2m) \oplus V(2m)$.

$$V = \left\{ \tilde{x} = \left[\begin{array}{c|cc} X & y, z \\ \hline -{}^t y & 0 \\ -{}^t z & 0 \end{array} \right]; {}^t X = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m} \right\} \text{ とし,}$$

$$G = \left\{ g = \left[\begin{array}{ccc|cc} \sqrt{\alpha} A & & & & \\ & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} & & & \\ & & \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} & & \\ \hline & & & \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} & \\ & & & & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{array} \right]; (\alpha, \beta, \gamma; A) \in (GLU)^3 \times SL(2m) \right\} \text{ とおくとき,}$$

$$\text{作用は } \rho(g) \tilde{x} = g \tilde{x} {}^t g = \left[\begin{array}{c|cc} \alpha A X {}^t A & \beta A y, \gamma A z \\ \hline -\beta {}^t y {}^t A & 0 \\ -\gamma {}^t z {}^t A & 0 \end{array} \right] \text{ for } g \in G, \tilde{x} \in V$$

である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$, $f_2(\tilde{x}) = Pf(\tilde{x})$ for $\tilde{x} \in V$ で与えられる ([2] の § 3. A の (5) の $f_2(\tilde{x})$ は既約でない)。したがって $\delta X_1(\tilde{A}) = m\alpha$, $\delta X_2(\tilde{A}) = (m-1)\alpha + \beta + \gamma$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in (GLU)^3 \oplus sl(2m)$ である。

$(GLU)^3 \times SL(2m)$, $\lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1$ は次の $13m-3$ 個の軌道を持つ (cf. Prop. 6 (III) in [7]). $\therefore \therefore$ に $J'_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2m)$, $J_k = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array} \right]$ である。

代表点	codim.	dual orbit
(1), k (J'_k, e_{2m}, e_{2m-1}) ($0 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1)$	(b), $m-k$ ($J'_{m-k}, 0, 0$)
(2), k (J'_k, e_1, e_{k+1}) ($1 \leq k \leq m$)	$(m-k)(2m-2k-1) + 4(m-k)$	(5), $m-k+1$ (J'_{m-k+1}, e_1, e_2) ($k \neq m$) (b), 0 ($J'_0, 0, 0$) ($k=m$ のとき)
(3), k ($J'_k, e_{2m}, e_1 + e_{2m}$) ($1 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1) + 2m-2k-1$	(4), $m-k$ (J'_{m-k}, e_1, e_1)
(4), k (J'_k, e_1, e_1) ($1 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1) + 4m-2k-1$	(3), $m-k$ ($J'_{m-k}, e_{2m}, e_{2m} + e_1$)
(5), k (J'_k, e_1, e_2) ($2 \leq k \leq m$)	$(m-k)(2m-2k-1) + 4m-4k+1$	(2), $m-k+1$ ($J'_{m-k+1}, e_1, e_{m-k+2}$)
(6), k ($J'_k, 0, 0$) ($0 \leq k \leq m$)	$(m-k)(2m-2k-1) + 4m$	(1), $m-k$ ($J'_{m-k}, e_{2m}, e_{2m-1}$) ($k \neq 0$) (2), m (J'_m, e_1, e_{m+1}) ($k=0$ のとき)

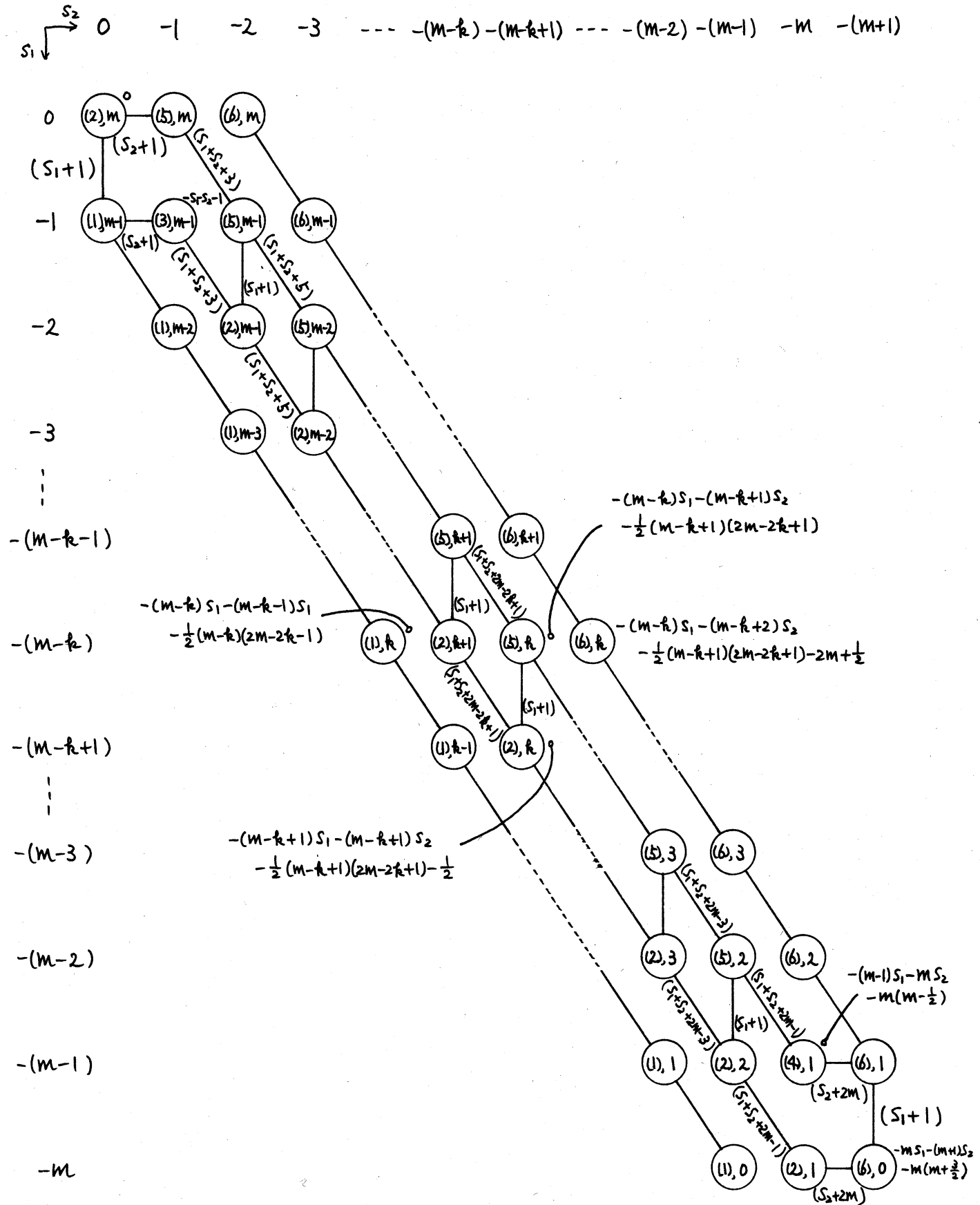


図 6. $(GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 + \Lambda_1 + \Lambda_1, V(m(2m+1)) + V(2m) + V(2m))$ ($m \geq 3$) のホロノミ図形

$$(7), k \quad (J'_k, e_1, e_{2m}) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$(8), k \quad (J'_k, e_{2m}, e_1) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$(9), k \quad (J'_k, e_1, 0) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$(10), k \quad (J'_k, 0, e_1) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$(11), k \quad (J'_k, e_{2m}, e_{2m}) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$(12), k \quad (J'_k, e_{2m}, 0) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$(13), k \quad (J'_k, 0, e_{2m}) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$m \geq 3$ のときのホロミニ図形は図6のようになる。ただし $(i), k$ は軌道 $(i), k$ の conormal bundle を表わす。よって ψ -関数は, $\chi = \chi_1^{n_1} \cdot \chi_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) に対して

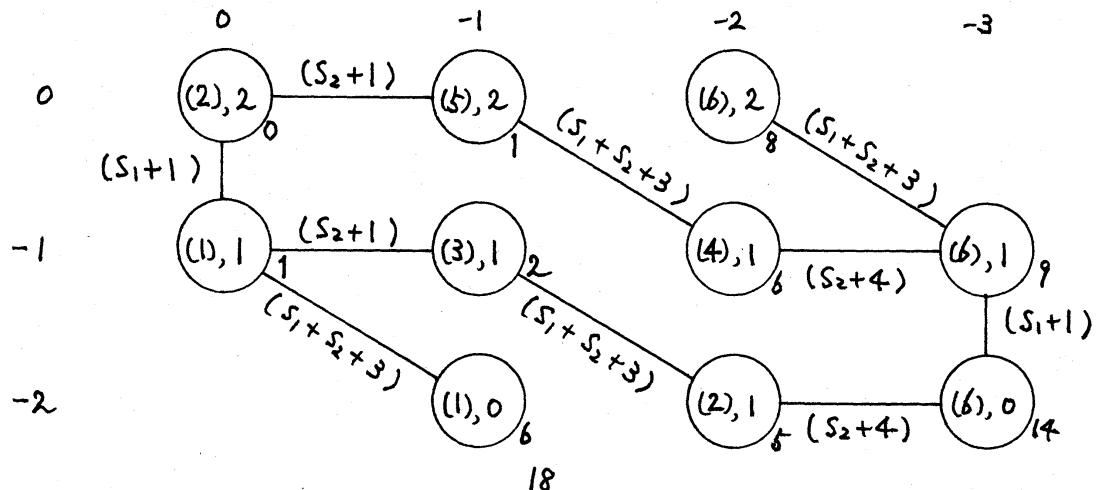
$$\begin{aligned} \psi\chi(S_1, S_2) = & [S_1+1]_{n_1} \times \prod_{k=2}^{m-1} [S_1+S_2+2k-1]_{n_1+n_2} \times [S_1+S_2+2m-1]_{n_1+n_2} \\ & \times [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+2m]_{n_2} \end{aligned}$$

で与えられる。

$m=2$ のときのホロミニ図形は図7のようになる。したがって ψ -関数は, $\chi = \chi_1^{n_1} \cdot \chi_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) に対して

$$\psi\chi(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+S_2+3]_{n_1+n_2} \cdot [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+4]_{n_2}$$

である。図7. $(GL(1)^3 \times SL(4), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(6) \oplus V(4) \oplus V(4))$ のホロミニ図形。



$$(7) \quad (\mathrm{GL}(1)^3 \times \mathrm{SL}(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*, V(m(2m-1)) \oplus V(2m)^* \oplus V(2m)^*).$$

$V = \{ \tilde{x} = (X, y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m} \} \subset \mathbb{C}^n$, 作用は
 $\rho(g) \tilde{x} = (\alpha A X {}^tA, \beta {}^tA^{-1}y, \gamma {}^tA^{-1}z)$ for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in \mathrm{GL}(1)^3 \times \mathrm{SL}(2m)$,
 $\tilde{x} = (X, y, z) \in V$ である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$,
 $f_2(\tilde{x}) = {}^ty X z$ for $\tilde{x} = (X, y, z) \in V$ であられる ([2] の § 3. A の (7)).
 また $\delta \chi_1(\bar{A}) = m\alpha$, $\delta \chi_2(\bar{A}) = \alpha + \beta + \gamma$ for $\bar{A} = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in$
 $\mathrm{GL}(1)^3 \oplus \mathfrak{sl}(2m)$ である。

$(\mathrm{GL}(1)^3 \times \mathrm{SL}(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*)$ は次の $13m-3$ 個の軌道を持つ
 (Prop. 6 (II) in [7]).

代表点	codim.	dual orbit
(1), k (J'_k, e_1, e_{k+1}) ($1 \leq k \leq m$)	$(m-k)(2m-2k-1)$	(6), $m-k$ $(J'_{m-k}, 0, 0)$
(2), k (J'_k, e_1, e_2) ($2 \leq k \leq m$)	$(m-k)(2m-2k-1)+1$	(5), $m-k+1$ $(J'_{m-k+1}, e_{2m}, e_{2m-1})$
(3), k (J'_k, e_1, e_1+e_{2m}) ($1 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1)+2k-1$	(4), $m-k$ $(J'_{m-k}, e_{2m}, e_{2m})$
(4), k (J'_k, e_{2m}, e_{2m}) ($1 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1)+2m+2k-1$	(3), $m-k$ $(J'_{m-k}, e_1, e_1+e_{2m})$
(5), k (J'_k, e_{2m}, e_{2m-1}) ($0 \leq k \leq m-1$)	$(m-k)(2m-2k-1)+4k$	$\begin{cases} (2), m-k+1 (J'_{m-k+1}, e_1, e_2) (k \neq 0) \\ (6), m (J'_m, 0, 0) (k=0 \text{ or } k \neq) \end{cases}$
(6), k $(J'_k, 0, 0)$	$(m-k)(2m-2k-1)+4m$	$\begin{cases} (1), m-k (J'_{m-k}, e_1, e_{m-k+1}) (k \neq m) \\ (5), 0 (J'_0, e_{2m}, e_{2m-1}) (k=m \text{ or } k \neq) \end{cases}$
(7), k (J'_k, e_{2m}, e_1) ($1 \leq k \leq m-1$)		
(8), k (J'_k, e_1, e_{2m}) ($1 \leq k \leq m-1$)		
(9), k $(J'_k, e_{2m}, 0)$ ($1 \leq k \leq m-1$)		
(10), k $(J'_k, 0, e_{2m})$ ($1 \leq k \leq m-1$)		

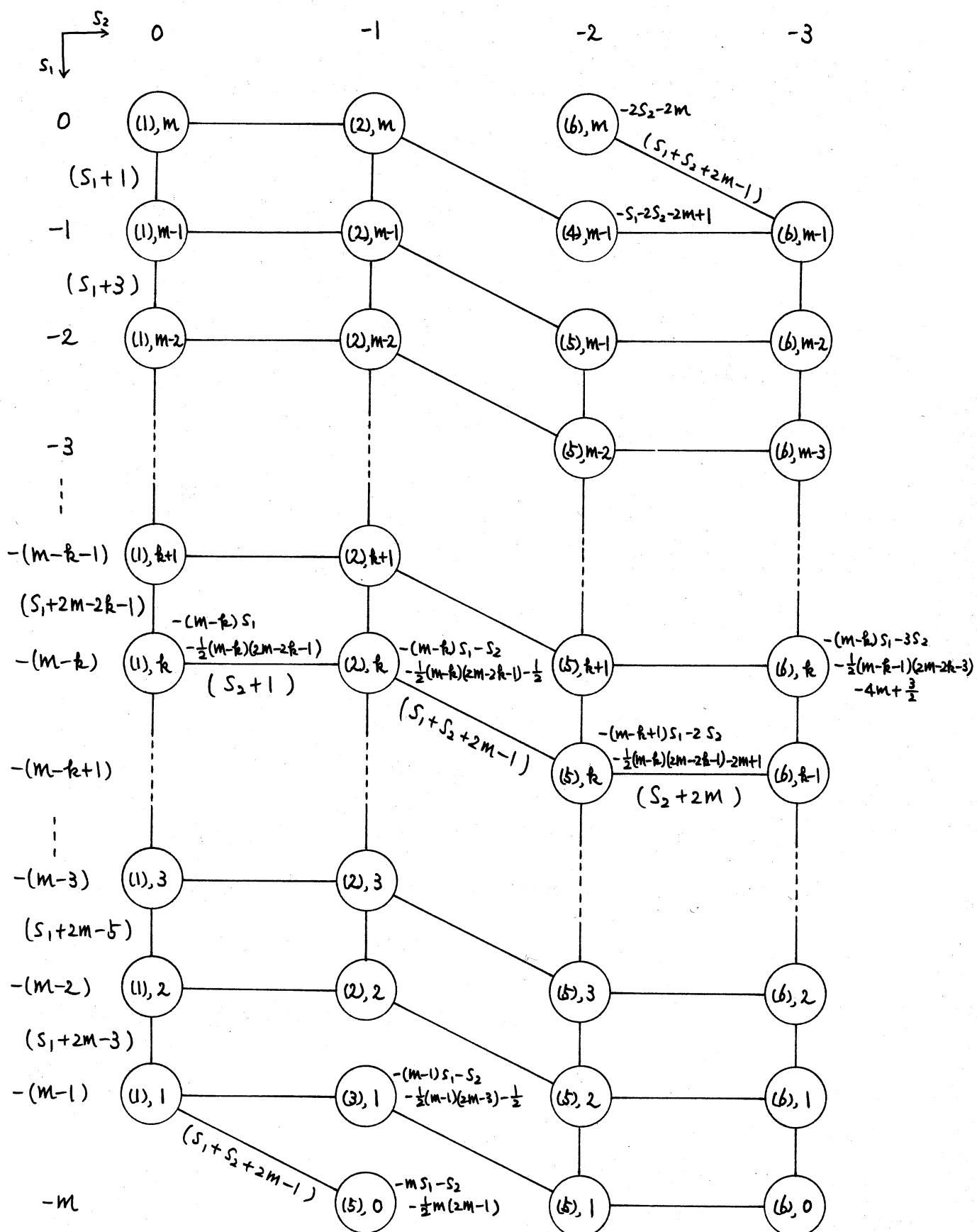


図 8. $(GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*, V(m(2m+1)) \oplus V(2m)^* \oplus V(2m)^*)$ ($m \geq 3$) のホロミニ図形

$$(1), k (J'_k, e_1, e_1) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$(12), k (J'_k, e_1, 0) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$(13), k (J'_k, 0, e_1) \quad (0 \leq k \leq m)$$

$m \geq 3$ のときのホロミ図形は図 8 のようになる。ただし $(i), k$ は軌道 $(i), k$ の conormal bundle を表わす。よって ψ -関数は

は, $\chi = \chi_1^{m_1} \cdot \chi_2^{m_2} \quad (m_i > 0)$ に対して

$$\begin{aligned} \psi \chi(S_1, S_2) = & [S_1+1]_{n_1} \times \prod_{k=2}^{m-1} [S_1+2k-1]_{n_1} \times [S_1+S_2+2m-1]_{n_1+n_2} \\ & \times [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+2m]_{n_2} \end{aligned}$$

で与えられる。

$m = 2$ のときのホロミ図形は図 9 のようになる。したがって ψ -関数は, $\chi = \chi_1^{m_1} \cdot \chi_2^{m_2} \quad (m_i > 0)$ に対して

$$\psi \chi(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+S_2+3]_{n_1+n_2} \cdot [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+4]_{n_2}$$

である。

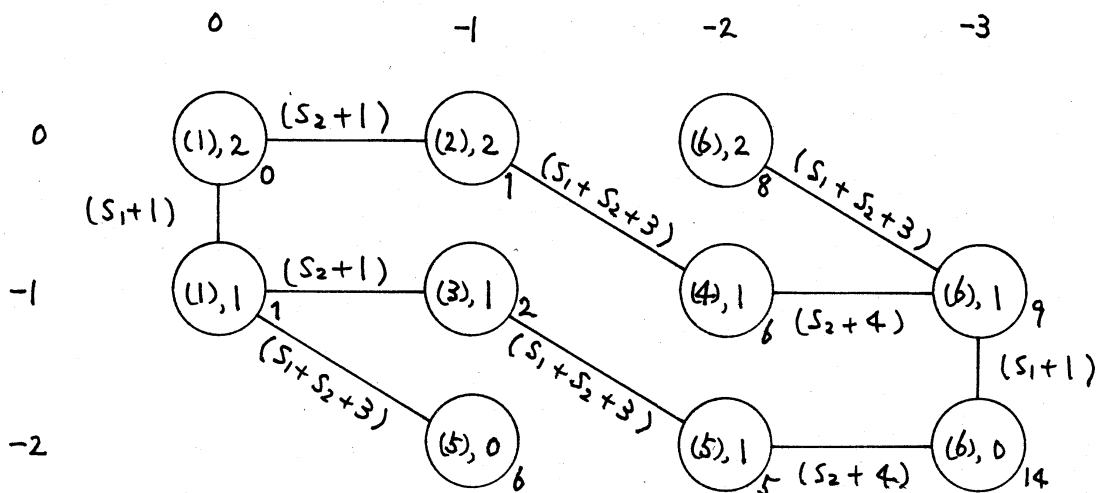


図 9 $(GL(1)^3 \times SL(4), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1^* \otimes \Lambda_1^*, V(6) \oplus V(4)^* \otimes V(4))$ のホロミ図形

(8) $(GL(1)^2 \times SL(m), 2\lambda_1 \oplus \lambda_1, V(\frac{1}{2}m(m+1)) \oplus V(m)).$

$V = \{ \tilde{x} = \begin{bmatrix} X & y \\ \pm y & 0 \end{bmatrix}; \pm X = X \in M(m), y \in \mathbb{C}^m \}$ とし, $G = \{ g = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} A & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix}; (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(m) \}$ とおくとき, 作用は $\ell(g)\tilde{x} = g\tilde{x}g^\pm = \begin{bmatrix} \alpha AX^\pm A & \beta Ay \\ \beta \pm y^\pm A & 0 \end{bmatrix}$ for $g \in G, \tilde{x} \in V$ である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = \det X, f_2(\tilde{x}) = \det \tilde{x}$ for $\tilde{x} \in V$ で与えられる ([2] の §3. A の (11))。したがって $\delta\chi_1(\tilde{A}) = m\alpha, \delta\chi_2(\tilde{A}) = (m-1)\alpha + 2\beta$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta; A) \in gl(1)^2 \oplus sl(m)$ である。

$(GL(1)^2 \times SL(m), 2\lambda_1 \oplus \lambda_1)$ は次の $4m$ 個の軌道を持つ (cf. Prop. 3.1 in [6])。ここに $I'_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(m)$ 。

代表点	codim.	dual orbit
(1), k (I'_k, e_m) $(0 \leq k \leq m)$	$\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1)$	(4), $m-k$ $(I'_{m-k}, 0)$
(2), k (I'_k, e_1) $(1 \leq k \leq m-1)$	$\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1) + (m-k)$	(3), $m-k+1$ $(I'_{m-k+1}, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$
(3), k $(I'_k, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$ $(2 \leq k \leq m)$	$\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1) + (m-k+1)$	(2), $m-k+1$ (I'_{m-k+1}, e_1)
(4), k $(I'_k, 0)$ $(0 \leq k \leq m)$	$\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1) + m$	(1), $m-k$ (I'_{m-k}, e_m)

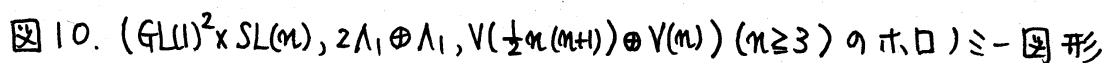
$m \geq 3$ のときホロミニ図形は図 10 のようになる。ただし

(ii), k は軌道 $(L), k$ の conormal bundle を表す。よって k -関数は

$$b_X(S_1, S_2) = [S_1 + 1]_{n_1} \times \prod_{k=3}^m \left[S_1 + S_2 + \frac{k}{2} \right]_{n_1+n_2} \times \left[S_1 + S_2 + \frac{m+1}{2} \right]_{n_1+n_2} \\ \times [S_2 + 1]_{n_2} \cdot \left[S_2 + \frac{m}{2} \right]_{n_2}$$

for $X = \chi_1^{n_1} \chi_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) とする。

$m = 2$ のときのホロミニ図形は図 11 のようになる。(3つの conormal bundle の交わりは今のところ未確認である)。この



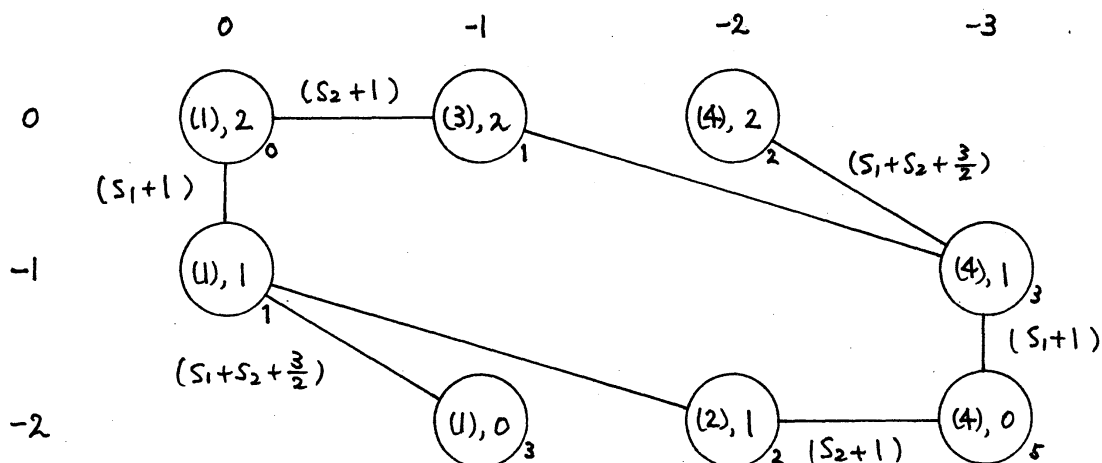


図11 $(GL(1)^2 \times SL(2), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(3) \oplus V(2))$ のホロミニ図形

ときは [11] の Chapter 1 より

$$\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{3}{2}]_{m_1 + m_2} \cdot [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + 1]_{m_2}$$

for $\chi = \chi_1^{m_1} \chi_2^{m_2}$ ($m_i > 0$) であることがわかる。

$$(9) \quad (GL(1)^2 \times SL(n), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*, V(\frac{1}{2}n(n+1)) \oplus V(n)^*).$$

表現空間は $V = \{ \tilde{x} = (X, y); {}^t X = X \in M(n), y \in \mathbb{C}^n \}$ で、作用は $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha A X {}^t A, \beta {}^t A^{-1} y)$ for $g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(n)$, $\tilde{x} = (X, y) \in V$ である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = \det X$, $f_2(\tilde{x}) = {}^t y X y$ for $\tilde{x} = (X, y) \in V$ である ([2] の § 3. A の (12))。したがって $\delta \chi_1(\tilde{X}) = n\alpha$, $\delta \chi_2(\tilde{X}) = \alpha + 2\beta$ for $\tilde{X} = (\alpha, \beta; A) \in gl(1)^2 \oplus sl(n)$ である。

$(GL(1)^2 \times SL(n), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$ は次の $4n$ 個の軌道を持つ (Prop. 3.1 in [6])。ここに $I'_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n)$ 。

代表点		codim.		dual orbit
(1), k	(I'_k, e_1)	$(0 \leq k \leq n)$	$\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$	(4), $n-k$ $(I'_{n-k}, 0)$
(2), k	$(I'_k, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$	$(2 \leq k \leq n)$	$\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) + 1$	(3), $n-k+1$ (I'_{n-k+1}, e_n)
(3), k	(I'_k, e_n)	$(1 \leq k \leq n-1)$	$\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) + k$	(2), $n-k+1$ $(I'_{n-k+1}, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$
(4), k	$(I'_k, 0)$	$(0 \leq k \leq n)$	$\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) + n$	(1), $n-k$ (I'_{n-k}, e_1)

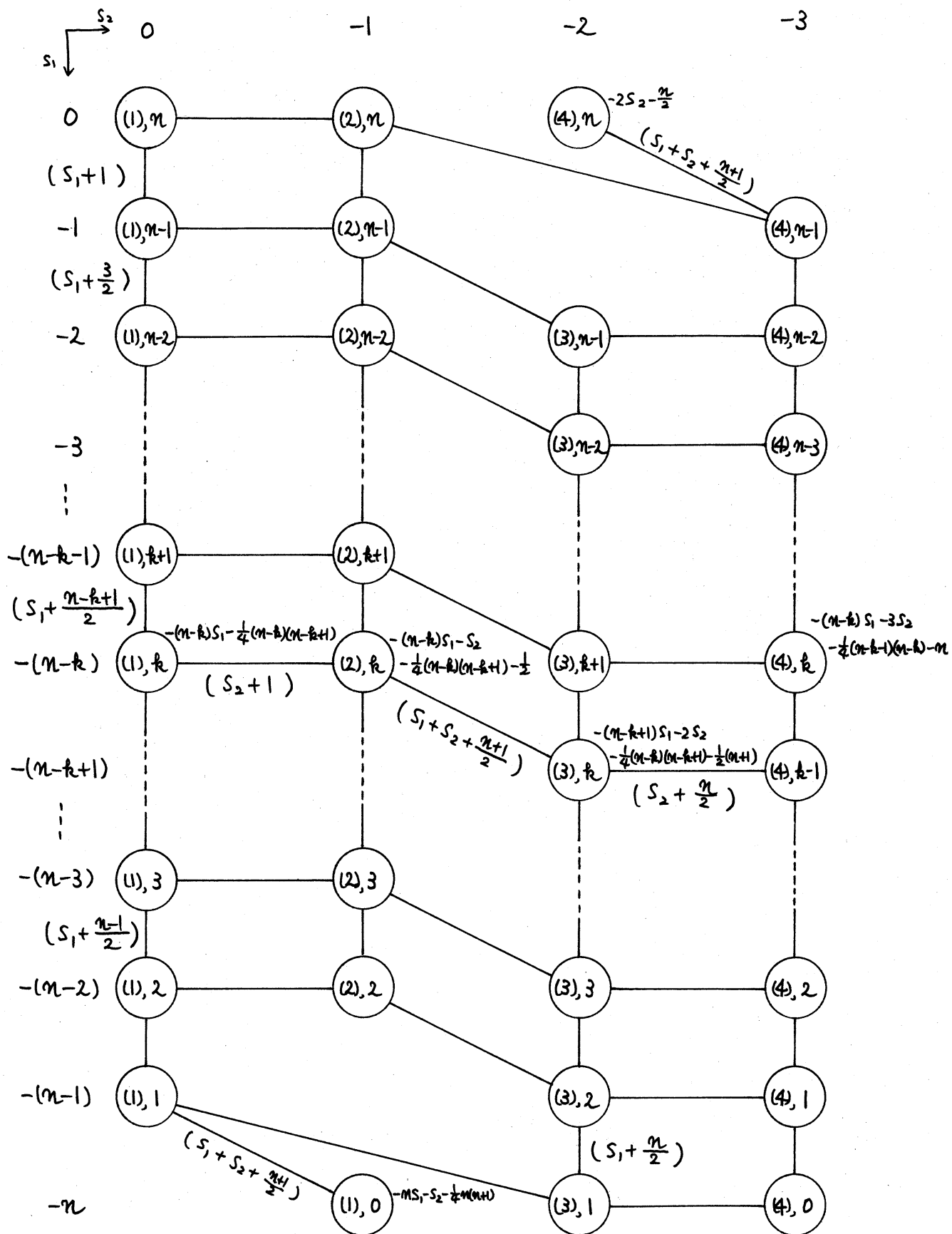


図 12 $(GL(1) \times SL(n), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*, V(\frac{1}{2}n(n+1)) \oplus V(n)^*)$ ($n \geq 3$) のホロミニ-図形

$n \geq 3$ のとき, ホロミ一図形は図12のようになる。ただし (i, k) は軌道 (i) , k の conormal bundle を表す。よって関数は

$$\begin{aligned} \psi_X(S_1, S_2) = & [S_1+1]_{n_1} \times \prod_{k=3}^n [S_1+\frac{k}{2}]_{n_1} \times [S_1+S_2+\frac{n+1}{2}]_{n_1+n_2} \\ & \times [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+\frac{n}{2}]_{n_2} \end{aligned}$$

for $X = X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) とする。

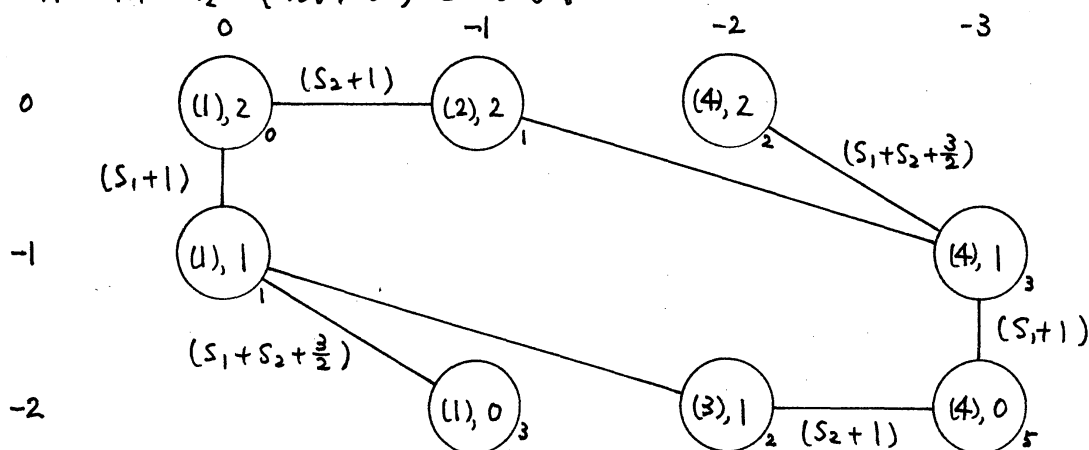


図13 $(GL(1)^2 \times SL(2), 2\lambda_1 \oplus \lambda_1^*, V(3) \oplus V(2)^*)$ のホロミ一図形

$n = 2$ のときのホロミ一図形は図13のようになる (3つの conormal bundle の交わりは今のところ調べてない)。このときは [11] の Chap. 1 より

$$\psi_X(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+S_2+\frac{3}{2}]_{n_1+n_2} \cdot [S_2+1]_{n_2} [S_2+1]_{n_2}$$

for $X = X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) である。

(10) $(GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1, V(35) \oplus V(7))$.

表現空間は $V = \{\tilde{x} = (x, y); x = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} x_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \in \wedge^3 \mathbb{C}^7, y \in \mathbb{C}^7\}$ で, 作用は $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha \rho_3(A)x, \beta Ay)$ for $g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(7)$, $\tilde{x} = (x, y) \in V$ である。ここに $\rho_3(A)x = \sum x_{ijk} (Ae_i) \wedge (Ae_j) \wedge (Ae_k)$.

$\frac{\partial}{\partial e_l}$ と $\frac{\partial}{\partial e_l}(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = \delta_{il} e_j \wedge e_k$ for $j, k \neq l$ で定める。3 次の同次多項式 $\phi_{ij}(x)$ を $\phi_{ij}(x) e_1 \wedge \cdots \wedge e_7 = x \wedge \frac{\partial x}{\partial e_i} \wedge \frac{\partial x}{\partial e_j}$ ($i, j = 1, \dots, 7$) で定義し, 7×7 対称行列 $\phi(x)$ を $\phi(x) = (\phi_{ij}(x))$ で定める。そのとき $\phi(\rho_3(A)x) = (\det A) \cdot A \phi(x) {}^t A$ for $A \in GL(7)$ が成り立つ。次に, 4 次の同次多項式 $\phi_{ij}^*(x)$ を $\phi_{ij}^*(x) = \sum_{s,t=1}^7 f_{it}^s(x) f_{sj}^t(x)$ で定義する。ここに 2 次形式 $f_{jk}^i(x)$ は $f_{jk}^i(x) e_1 \wedge \cdots \wedge e_7 = x \wedge \frac{\partial x}{\partial e_i} \wedge e_j \wedge e_k$ ($i, j, k = 1, \dots, 7$) で定める。 7×7 対称行列 $\phi^*(x)$ を $\phi^*(x) = (\phi_{ij}^*(x))$ で定める。そのとき $\phi^*(\rho_3(A)x) = (\det A)^2 \cdot {}^t A^{-1} \phi^*(x) A^{-1}$ for $A \in GL(7)$ が成り立つ。このとき $f(x) = {}^t \phi(x) \phi^*(x)$ は $(GL(7), \Lambda_3, V(35))$ の 7 次の相対不変式である。(以上については [3] の Remark 4.4 を見よ。)

$(GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$ の基本的相対不変式は $f_1(x) = {}^t \phi(x) \phi^*(x)$, $f_2(\tilde{x}) = {}^t y \phi^*(x) y$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V$ で与えられる ([2] の § 3. A の (13)).
 したがって $\delta x_1(\tilde{A}) = 7\alpha$, $\delta x_2(\tilde{A}) = 4\alpha + 2\beta$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta; A) \in gl(1)^2 \oplus sl(7)$ である。

$x_0 = 234 + 567 + 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $x_1 = 235 + 346 + 1 \cdot (27 - 45)$,
 $x_4 = 134 + 256 + 127$, $x_7 = 234 + 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $x_9 = 123 + 456$,
 $x_{10} = 126 - 135 + 234$, $x_{14} = 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $x_{15} = 1 \cdot (24 + 35)$,
 $x_{22} = 123$, $x_{35} = 0$ とおく。ここに i, j, k は $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ を表わす。
 このとき, $(GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$ は次の 38 個の軌道を持つ (Prop. 3.3 in [6]).

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) (x_0, e_1)	0	(38) $(x_{35}, 0)$	42
(2) (x_0, e_2)	1	(35) (x_{22}, e_1)	26
(3) (x_1, e_5)	1	(36) $(x_{22}, 0)$	29
(4) (x_1, e_6)	2	(32) (x_{15}, e_1)	21
(5) $(x_1, e_1 + e_4)$	4	(24) (x_{10}, e_1)	14
(6) (x_4, e_7)	4	(33) $(x_{15}, 0)$	22
(7) (x_1, e_1)	5	(29) (x_{15}, e_2)	17
(8) $(x_4, e_3 + e_5)$	5	(21) (x_7, e_1)	13
(9) $(x_0, 0)$	7	(37) (x_{35}, e_1)	35
(10) (x_4, e_3)	7	(22) (x_9, e_1)	13
(11) (x_7, e_5)	7	(28) $(x_{10}, 0)$	17
(12) $(x_1, 0)$	8	(34) (x_{22}, e_4)	22
(13) $(x_4, e_1 + e_2)$	9	(16) (x_7, e_2)	10
(14) (x_9, e_7)	9	(31) $(x_{14}, 0)$	21
(15) (x_4, e_1)	10	(19) (x_{10}, e_4)	11
(17) $(x_9, e_1 + e_4)$	10	(30) (x_{14}, e_1)	20
(18) (x_{10}, e_7)	10	(23) $(x_7, 0)$	14
(20) $(x_4, 0)$	11	(26) (x_{15}, e_6)	15
(25) (x_{14}, e_2)	14	(27) $(x_9, 0)$	16

上では dual orbits を横にならべておいてある。

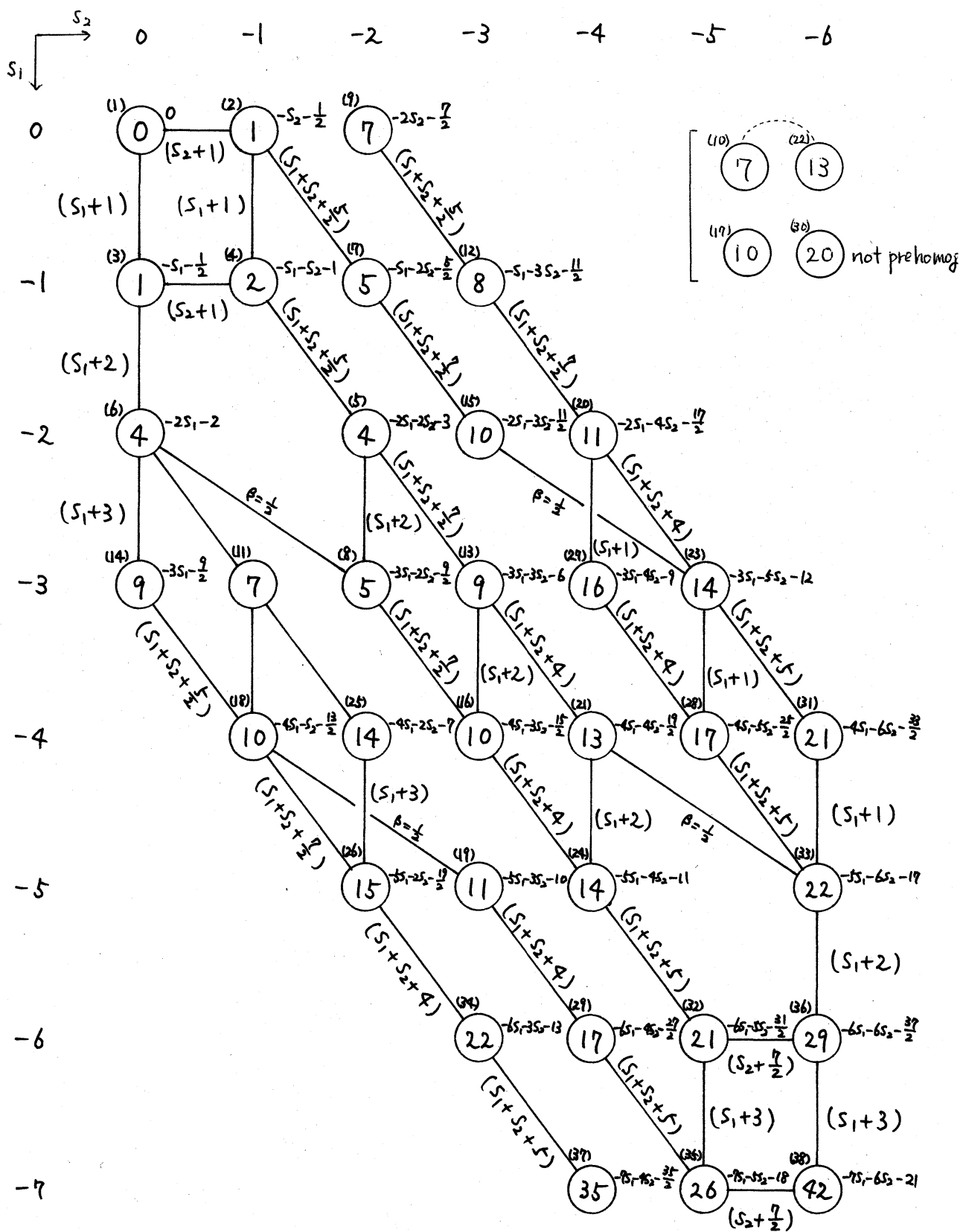


図 14 $(GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1, V(35) \oplus V(7))$ のホロミ - 図形

ホロ) ミー図形は図14のようになる。ただし $\overset{(ii)}{\circ} j$ は余次元 j の軌道 (i) の conormal bundle を表す。よって関数は

$$h_X(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} [S_1+\frac{4}{2}]_{n_1} [S_1+S_2+\frac{5}{2}]_{n_1+n_2} [S_1+\frac{6}{2}]_{n_1} [S_1+S_2+\frac{7}{2}]_{n_1+n_2} \\ \times [S_1+S_2+\frac{8}{2}]_{n_1+n_2} [S_1+S_2+5]_{n_1+n_2} [S_2+1]_{n_2} [S_2+\frac{7}{2}]_{n_2}$$

for $X = X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) とする。

$$(II) \quad (GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1^*, V(35) \oplus V(7)^*).$$

表現空間は $V = \{ \tilde{x} = (x, y); x \in \Lambda^3 \mathbb{C}^7, y \in \mathbb{C}^7 \}$ で、作用は $\rho(g) \tilde{x} = (\alpha \rho_3(A)x, \beta^t A^{-1}y)$ for $g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(7)$, $\tilde{x} = (x, y) \in V$ である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = \text{tr} \phi(x) \phi^*(x)$, $f_2(\tilde{x}) = \text{tr} y \phi(x) y$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V$ で与えられる ([2] の §3, A の (14))。したがって $\delta X_1(\tilde{A}) = 7\alpha$, $\delta X_2(\tilde{A}) = 3\alpha + 2\beta$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta; A) \in gl(1)^2 \oplus sl(7)$ である。

$(GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1^*)$ は次の38個の軌道を持つ (cf. Prop. 3.3 in [6])。ただし x_i は (40) の軌道分解で用いたものと同じ。

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) (x_0, e_1)	0	(38) $(x_{35}, 0)$	42
(2) (x_0, e_2)	1	(35) (x_{22}, e_4)	25
(3) $(x_1, e_1 + e_4)$	1	(36) $(x_{22}, 0)$	29
(4) (x_1, e_1)	2	(31) (x_{15}, e_6)	20
(5) $(x_4, e_1 + e_2)$	4	(33) $(x_{15}, 0)$	22
(6) (x_1, e_5)	5	(21) (x_{10}, e_4)	13
(7) (x_4, e_1)	5	(28) (x_{10}, e_7)	16

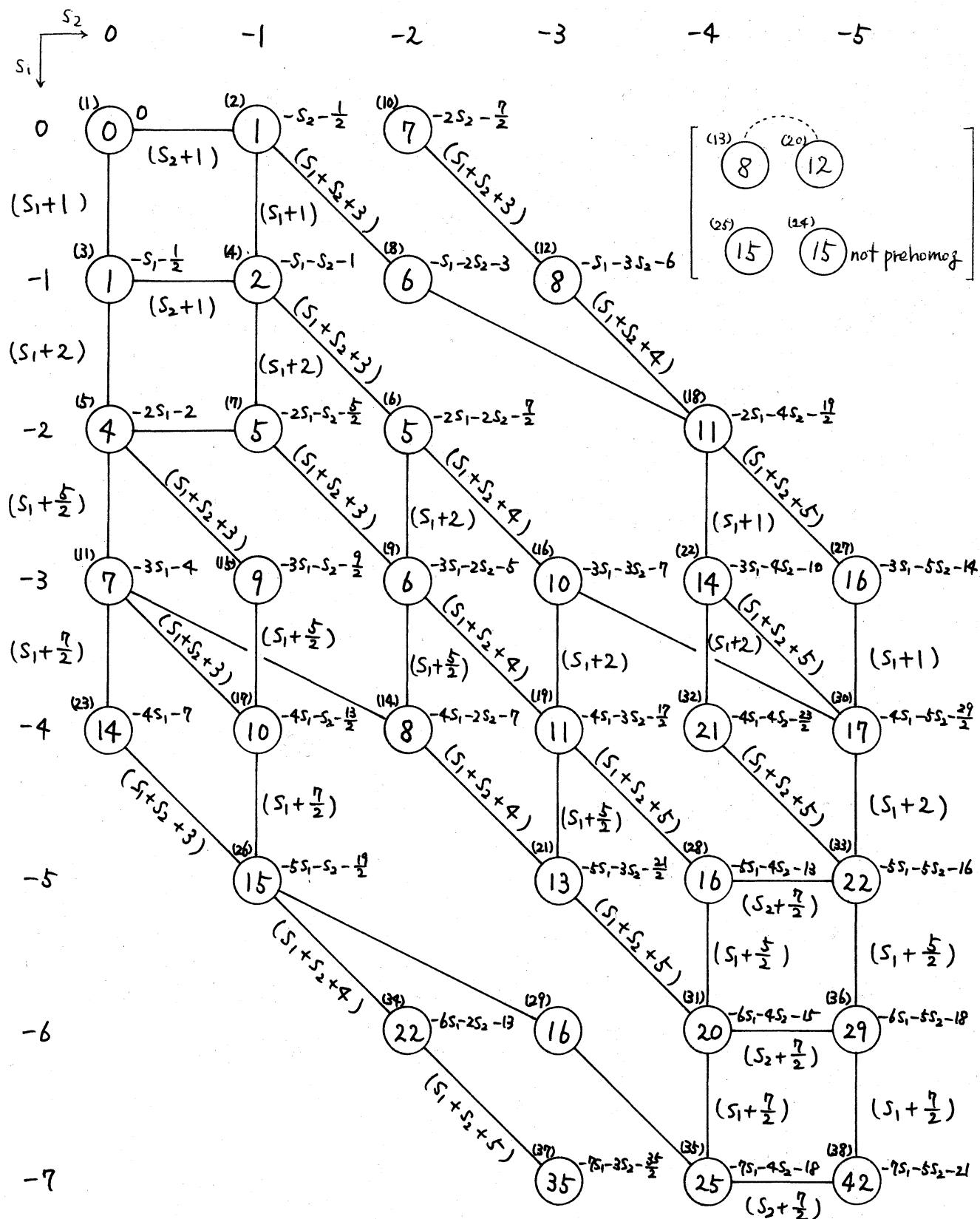


図15 $(GLU)^2 \times SL(7)$, $\Lambda_3 \oplus \Lambda_1^*$, $V(35) \oplus V(7)^*$ のホロミニ図形

(8)	(x_1, e_6)	6	(29)	(x_{15}, e_2)	16
(9)	$(x_4, e_3 + e_5)$	6	(19)	(x_7, e_5)	11
(10)	$(x_0, 0)$	7	(37)	(x_{35}, e_1)	35
(11)	(x_7, e_1)	7	(30)	$(x_{10}, 0)$	17
(12)	$(x_1, 0)$	8	(34)	(x_{22}, e_1)	22
(13)	(x_4, e_3)	8	(20)	(x_9, e_1)	12
(14)	(x_7, e_2)	8	(16)	(x_4, e_7)	10
(15)	$(x_9, e_1 + e_4)$	9	(32)	$(x_{14}, 0)$	21
(17)	(x_{10}, e_1)	10	(22)	$(x_7, 0)$	14
(18)	$(x_4, 0)$	11	(26)	(x_{15}, e_1)	15
(23)	(x_{14}, e_1)	14	(27)	$(x_9, 0)$	16
(24)	(x_9, e_7)	15	(25)	(x_{14}, e_2)	15

上では dual orbits を横にならべて書いてある。

ホロミニ図形は図15のようになる。ただし^(b) $\circledast$ は余次元 $\circledast$ の軌道 (b) の conormal bundle を表わす。よって $\circledast$ -関数は

$$h_X(S_1, S_2) = [S_1 + 1]_{n_1} \cdot [S_1 + \frac{4}{2}]_{n_1} \cdot [S_1 + \frac{5}{2}]_{n_1} \cdot [S_1 + S_2 + \frac{6}{2}]_{n_1 + n_2} \cdot [S_1 + \frac{7}{2}]_{n_1} \\ \times [S_1 + S_2 + \frac{8}{2}]_{n_1 + n_2} \cdot [S_1 + S_2 + 5]_{n_1 + n_2} \cdot [S_2 + 1]_{n_2} \cdot [S_2 + \frac{7}{2}]_{n_2}$$

for $X = X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) とする。

$$(12) \quad (\mathrm{GL}(1)^2 \times \mathrm{Sp}(3), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1, V(14) \oplus V(6)).$$

$(\mathrm{GL}(6), \Lambda_3, V(20))$ を $\mathrm{Sp}(3) (\subset \mathrm{GL}(6))$ に制限すると, $V(20) = V(14) \oplus V(6)$ と分解し, この $V(14)$ が $(\mathrm{Sp}(3), \Lambda_3)$ の表現空間である。 $\chi =$

$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \in V(20) = \Lambda^3 \mathbb{C}^6$ が $V(14)$ に属するための必要十分条件は $x_{i14} + x_{i25} + x_{i36} = 0$ for $1 \leq i \leq 6$ である。

$(GL(1) \times Sp(3), \Lambda_1 \oplus \Lambda_3, V(14))$ の 4 次の相対不変式は $(GL(6), \Lambda_3, V(20))$ の 4 次の相対不変式の $V(14)$ への制限として得られる ([1] の p. 108)。2 次の同次多項式 $g_{ij}(x)$ を $g_{ij}(x) e_1 \wedge \cdots \wedge e_6 = x \wedge \frac{\partial x}{\partial e_i} \wedge e_j$ ($i, j = 1, \dots, 6$) で定義し, 6×6 行列 $g(x)$ を $g(x) = (g_{ij}(x))$ とすると, $g(\Lambda_3(f)x) = (\det f) \cdot f g(x) f^{-1}$ for $f \in GL(6)$ が成り立つ。このとき, $f(x) = \det g(x)^2$ が $(GL(6), \Lambda_3)$ の 4 次の相対不変式である。(Remark 4.2 in [3].)

$(GL(1)^2 \times Sp(3), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$ の基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = \det g(x)^2$, $f_2(\tilde{x}) = \det g(x) \det g(y)$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V(14) \oplus \mathbb{C}^6$ で与えられる。ここに $J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$ 。([2] の § 3. A の (21) の $f_2(\tilde{x})$ は誤りである。) したがって $\delta \chi_1(\tilde{A}) = 4\alpha$, $\delta \chi_2(\tilde{A}) = 2(\alpha + \beta)$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta; A) \in \mathfrak{gl}(1)^2 \oplus \mathfrak{sp}(3)$ である。

$(GL(1)^2 \times Sp(3), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$ は次の 19 個の軌道を持つ (Prop. 3.4 in [6]).

ここに i, j, k は $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ を表わす。

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(123+456, e_1+e_4)$	0	(19) $(0, 0)$	20
(2) $(123+456, e_1+e_5)$	1	(16) $(123, e_1)$	10
(3) $(126+(134-235), e_6)$	1	(17) $(123, 0)$	13
(4) $(126+(134-235), e_5)$	2	(14) $((134-235), e_3)$	9
(5) $(123+456, e_1)$	3	(12) $((134-235), e_1)$	7

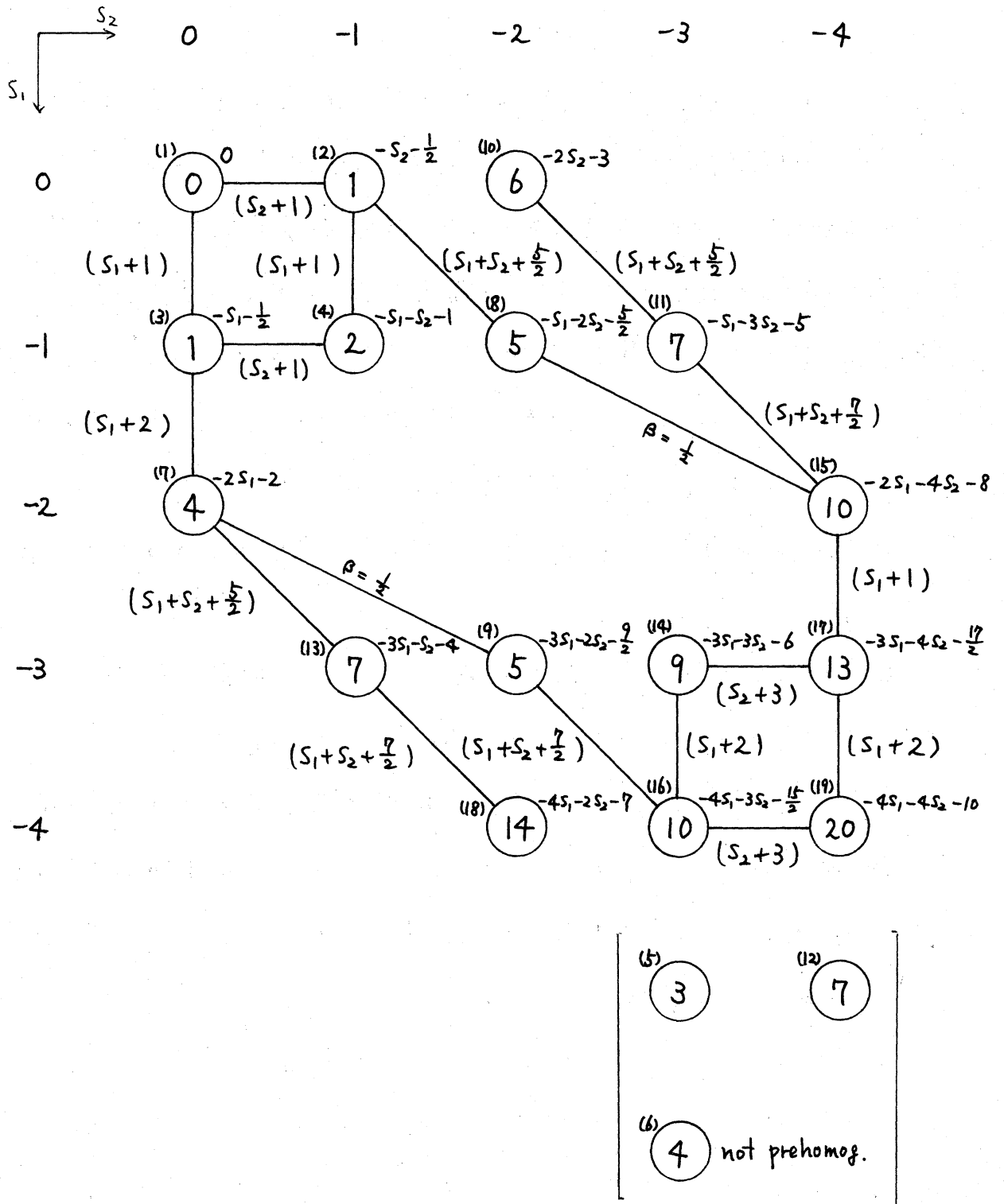
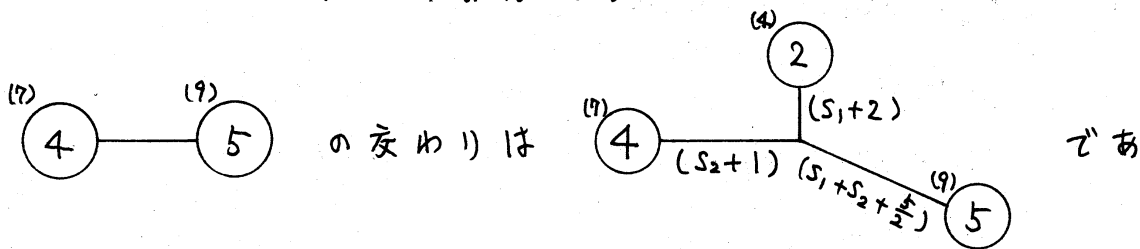


図 16 $(GL(1)^2 \times Sp(3), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1, V(14) \oplus V(6))$ のホロ $\cong$ 一図形

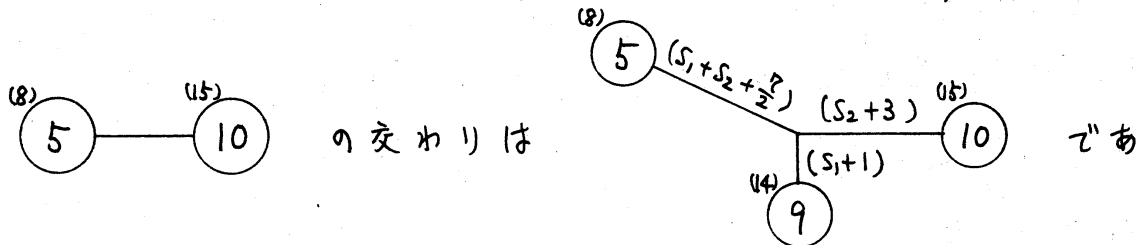
(6) $(126 + (134 - 235), e_3)$	4	(not prehomog.)	
(7) $((134 - 235), e_6)$	4	(15) $((134 - 235), 0)$	10
(8) $(126 + (134 - 235), e_1)$	5	(9) $((134 - 235), e_1 + e_2)$	5
(10) $(123 + 456, 0)$	6	(18) $(0, e_1)$	14
(11) $(126 + (134 - 235), 0)$	7	(13) $(123, e_4)$	7

上では dual orbits を横になさべてかいてある。

ホロミニ-図形は図16のようになる。ただし $\circledast$ は余次元 $\circledast$ の軌道 (14) の conormal bundle を表わす。



うと予想されるがまだ確認していない。同様に、



うと予想される。

よって χ -関数は次のように予想される。

$$\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + 2]_{n_1} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{5}{2}]_{n_1 + n_2} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{7}{2}]_{n_1 + n_2} \\ \times [s_2 + 1]_{n_2} \cdot [s_2 + 3]_{n_2}$$

$$\text{for } \chi = \chi_1^{m_1} \chi_2^{m_2} (m_i > 0).$$

(13) $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(16) \oplus V(10))$.

基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = f(y)$, $f_2(\tilde{x}) = \langle y, Q(x) \rangle$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V(16) \oplus V(10)$ であてられる ([2] の § 3. A の (IP)). ここに $f(y)$ は $V(10)$ 上の 2 次不変式, $Q(x) = {}^t(Q_1(x), \dots, Q_{10}(x))$, $Q_i(x)$ は § 2-1 の (5) と同じである. しかし, $\tau \delta \chi_1(\tilde{A}) = 2\beta$, $\delta \chi_2(\tilde{A}) = 2\alpha + \beta$ for $\tilde{A} = (\alpha, \beta; A) \in gl(1)^2 \oplus O(10)$ である.

$(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は次の 13 個の軌道をもつ (Prop. 3.5 in [6]).

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_5 + e_{10})$	0	(13) $(0, 0)$	26
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 + e_6)$	1	(17) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_{10})$	9
(3) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_5)$	1	(12) $(0, e_1)$	17
(4) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1)$	2	(9) $(1, e_6)$	10
(5) $(1, e_1 + e_6)$	5	(10) $(1, 0)$	15
(6) $(1, e_1)$	6	(self-dual)	
(8) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 0)$	10	(11) $(0, e_1 + e_6)$	16

上では dual orbits を横にならべてかいてある。

ホロノミ図形は図 17 のようになる。ただし $\textcircled{j}$ は余次元 j の軌道 (b) の conormal bundle を表わす。よって ϕ -関数は

$$\phi_X(S_1, S_2) = [S_1 + 1]_{n_1} \cdot [S_1 + S_2 + 5]_{n_1 + n_2} \cdot [S_2 + 1]_{n_2} \cdot [S_2 + 8]_{n_2}$$

for $X = X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) である。

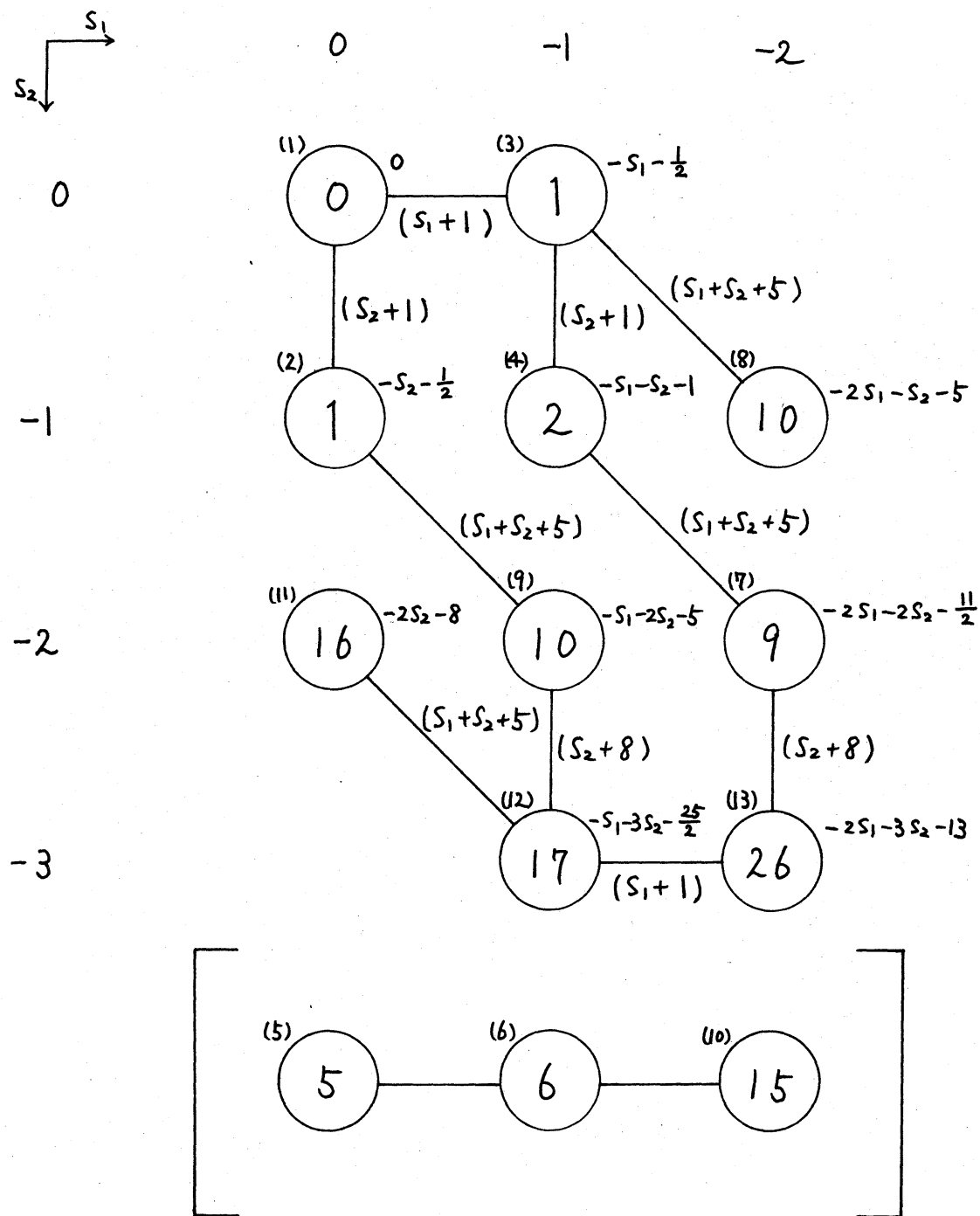


図 17 $(gl(1)^2 \times spin(10), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(16) \oplus V(10))$ のホロミー図形

2-3. $N = 2$ (その2) の場合.

$$(14) \quad (GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*, V(m(2m+1)) \oplus V(2m) \oplus V(2m)^*).$$

表現空間は $V = \{\tilde{x} = (X, \gamma, z); {}^tX = -X \in M(2m), \gamma, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ で、作用は $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX {}^tA, \beta A\gamma, \gamma {}^tA^{-1}z)$ for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$, $\tilde{x} = (X, \gamma, z) \in V$ である。基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$, $f_2(\tilde{x}) = \langle \gamma, z \rangle$ for $\tilde{x} = (X, \gamma, z) \in V$ で与えられる ([2] の § 3. A の (6)). 群 $GL(1)^3 \times SL(2m) \times SL(2m)$ の V への作用 $\rho'(g)\tilde{x} = (\alpha AX {}^tA, \beta B\gamma, \gamma {}^tB^{-1}z)$ for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A, B) \in GL(1)^3 \times SL(2m) \times SL(2m)$, $\tilde{x} = (X, \gamma, z) \in V$ を考えれば, これは $(GL(2m), \Lambda_2)$ と $(GL(1)^2 \times SL(2m), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$ の直和であり, (14) と同じく $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$, $f_2(\tilde{x}) = \langle \gamma, z \rangle$ for $\tilde{x} = (X, \gamma, z) \in V$ を基本的相対不変式に持つ. $(GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)) \hookrightarrow (GL(1)^3 \times SL(2m) \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*))$ により, (14) の不関数は既約正則 P. V. $(GL(2m), \Lambda_2)$ と (1) $(GL(1)^2 \times SL(2m), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$ の直和の場合に帰着される. かつ不関数は $\mu_X(s_1, s_2) = \prod_{k=1}^m [s_1 + 2k - 1]_{m_1} \times [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + 2m]_{m_2}$ for $X = X_1^{m_1} X_2^{m_2} (m_i > 0)$ である.

$$(15) \quad (GL(1)^2 \times Spin(7), \text{スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(8) \oplus V(7)).$$

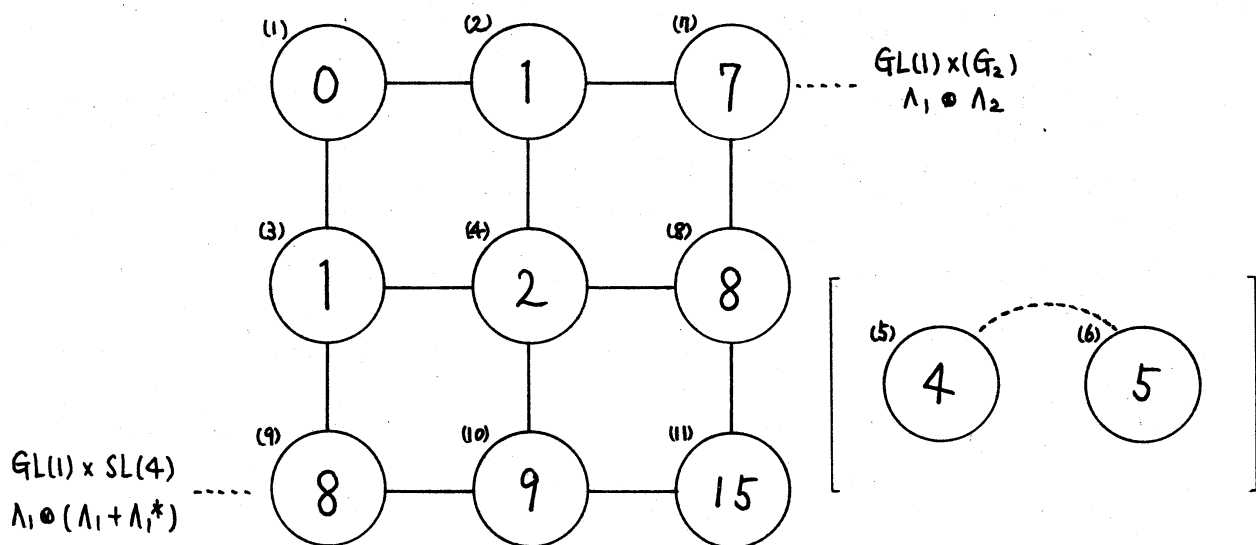
基本的相対不変式は $f_1(\tilde{x}) = f(x)$, $f_2(\tilde{x}) = g(\gamma)$ for $\tilde{x} = (x, \gamma) \in V(8) \oplus V(7)$ で与えられる ([2] の § 3. A の (16)). ここに $f(x)$ は $V(8)$ 上の 2 次不変式 (具体的形は [4] の Prop. 4 の $f(x)$ を参照のこと), $g(\gamma)$ は $V(7)$ 上の 2 次不変式である. $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})$ は 2 つの既約正則 P. V. $(GL(1) \times Spin(7), \text{スピノ表現})$ と $(GL(1) \times Spin(7), \text{ベクトル表現})$ の直和

の基本的相対不変式でもある。したがって(15)は2つの既約正則 P. V. の直和の場合に帰着される。よって関数は $h_X(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} [S_1+4]_{n_1} [S_2+1]_{n_2} [S_2+\frac{7}{2}]_{n_2}$ for $X = X_1^{m_1} X_2^{m_2}$ ($m_i > 0$) である。なお軌道分解およびホロミー図形は以下の通りである。

$(GL(11)^2 \times Spin(7), \text{スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は次の11個の軌道をもつ (Prop. 13 in [7])。

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, u_1)$	0	(11) $(0, 0)$	15
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, u_2)$	1	(10) $(0, u_2)$	9
(3) $(1, u_2 + u_5)$	1	(8) $(1, 0)$	8
(4) $(1, u_2)$	2	(self-dual)	
(5) $(1, u_1)$	4	(6) $(0, u_5)$	5
(7) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 0)$	7	(9) $(0, u_1)$	8

図 18. $(GL(11)^2 \times Spin(7), \text{スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(8) \oplus V(7))$ のホロミー図形



ただし $\textcircled{j}^{(i)}$ は余次元 j の軌道 (i) の conormal bundle を表わす。

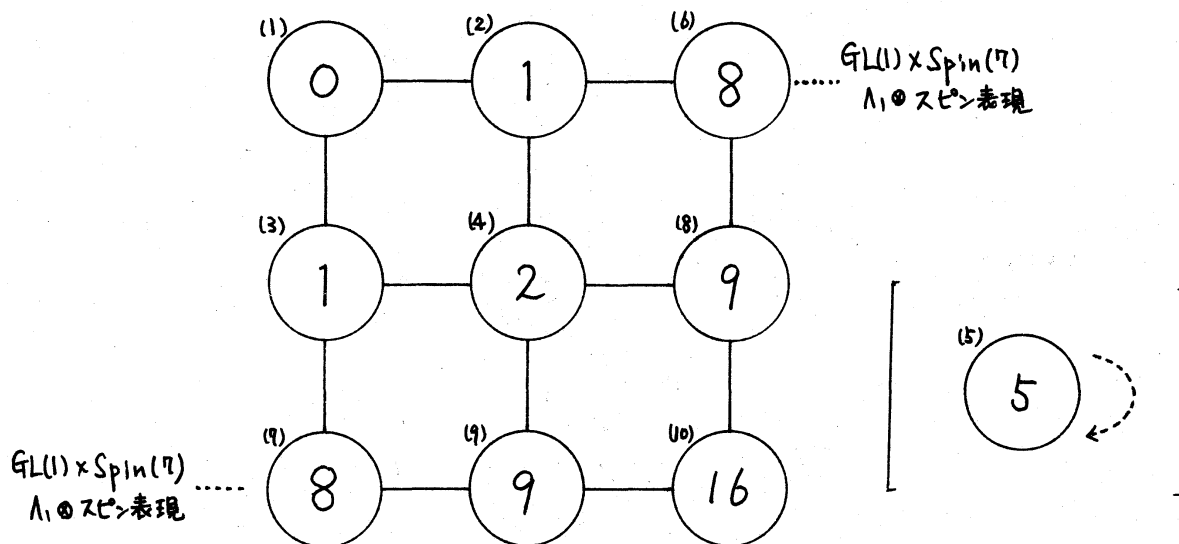
(16) $(GL(1)^2 \times Spin(8), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V_1(8) \oplus V_2(8))$.

基本的相対不変式は $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(y)$ for $x = (x, y) \in V_1(8) \oplus V_2(8)$ で与えられる ([2] の § 3. A の (4)). こゝに $f(x)$ は $V_1(8)$ 上の 2 次不変式 (具体的形は [4] の Prop. 1 の $f(x)$ を参照のこと), $f(y)$ は $V_2(8)$ 上の 2 次不変式である。 $f_1(x)$, $f_2(x)$ は 2 つの既約正則 P. V. $(GL(1) \times Spin(8), \text{半スピン表現}, V_1(8))$ と $(GL(1) \times Spin(8), \text{ベクトル表現}, V_2(8))$ の直和の基本的相対不変式でもある。また χ 関数は $\chi(S_1, S_2) = [S_1 + 1]_{n_1} \cdot [S_1 + 4]_{n_1} \cdot [S_2 + 1]_{n_2} \cdot [S_2 + 4]_{n_2}$ for $\chi = \chi_1^{n_1} \chi_2^{n_2} (n_i > 0)$ である。なお軌道分解とホロノミー図形は以下の通りである。

$(GL(1)^2 \times Spin(8), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は次の 10 個の軌道をもつ (Prop. 12 in [7]). こゝに横にならべて書いてある軌道は互いに dual orbit である。

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 + e_5)$	0	(10) $(0, 0)$	16
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1)$	1	(9) $(0, e_1)$	9
(3) $(1, e_1 + e_5)$	1	(8) $(1, 0)$	9
(4) $(1, e_1)$	2	(self-dual)	
(5) $(1, e_5)$	5	(self-dual)	
(6) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 0)$	8	(7) $(0, e_1 + e_5)$	8

図19. $(GL(1)^2 \times Spin(8), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V_1(8) \oplus V_2(8))$ のホロミー図形。ここに $\textcircled{j}^{(i)}$ は余次元 j の軌道 (i) の conormal bundle を表す。



117) $(GL(1)^2 \times Spin(12), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(32) \oplus V(12))$.

基本的相対不変式は $f_1(\alpha) = J(\alpha)$, $f_2(\alpha) = \delta(\beta)$ for $\alpha = (\alpha, \beta) \in V(32) \oplus V(12)$ で与えられる ([2] の § 3, A の (19)). ここに $J(\alpha)$ は $V(32)$ 上の 4 次不変式 (具体的形は [4] の Prop. 3 の $J(\alpha)$ を参照のこと), $\delta(\beta)$ は $V(12)$ 上の 2 次不変式である。 $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ は 2 つの既約正則 P. V. $(GL(1) \times Spin(12), \text{半スピン表現})$ と $(GL(1) \times Spin(12), \text{ベクトル表現})$ の直和の基本的相対不変式でもある。よって ϕ -関数は $\phi_\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + \frac{7}{2}]_{n_1} \cdot [s_1 + \frac{11}{2}]_{n_1} \cdot [s_1 + 8]_{n_1} \cdot [s_2 + 1]_{n_2} \cdot [s_2 + 6]_{n_2}$ for $\chi = \chi_1^{n_1} \chi_2^{n_2}$ ($n_i > 0$) である。なお軌道分解およびホロミー図形は以下の通りである。

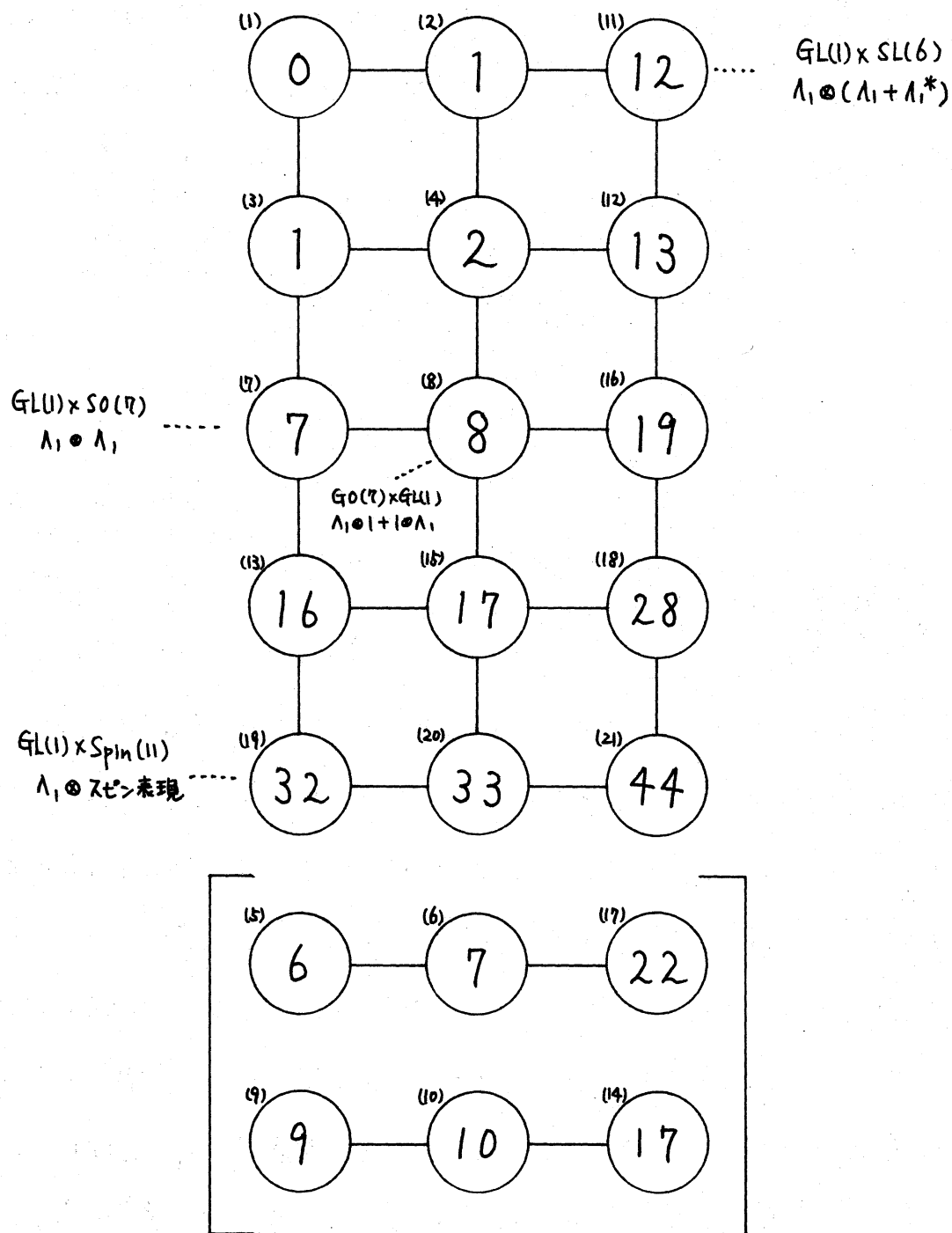


図 20. $(GL(1)^2 \times Spin(12))_{1/2}$ の半スピン表現とベクトル表現 $V(32) \oplus V(12)$ のホロノミー図形

$(GL(1)^2 \times Spin(12), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は次の 21 個の軌道を持つ (Prop. 3.6 in [6]).

代表点	codim.	代表点	codim.
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_7)$	0	(21) $(0, 0)$	44
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_8)$	1	(20) $(0, e_1)$	33
(3) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_7)$	1	(18) $(1, 0)$	28
(4) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1)$	2	(15) $(1, e_1)$	17
(5) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1)$	6	(17) $(1, e_7)$	22
(6) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_5 e_6, e_7)$	7	(self-dual)	
(7) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_7)$	7	(16) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, 0)$	19
(8) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1)$	8	(self-dual)	
(9) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_2 + e_8)$	9	(14) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_7)$	17
(10) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_2)$	10	(self-dual)	
(11) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, 0)$	12	(19) $(0, e_1 + e_7)$	32
(12) $(1 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_5 e_6, 0)$	13	(13) $(1, e_1 + e_7)$	16

2-4. $N = 3$ の場合.

$$(18) \quad (GL(1)^3 \times SL(2), \lambda_1 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1, V(2) \oplus V(2) \oplus V(2)).$$

基本的相対不変式は $f_1(x) = \det(x_2, x_3)$, $f_2(x) = \det(x_1, x_3)$, $f_3(x) = \det(x_1, x_2)$ for $x = (x_1, x_2, x_3) \in V(2) \oplus V(2) \oplus V(2)$ により与えられる ([2] の § 3. A の (3)). 定義により直接計算することにより, $h_{\chi_1}(s_1, s_2, s_3) = (s_1 + 1)(s_1 + s_2 + s_3 + 2)$, $h_{\chi_2}(s_1, s_2, s_3) = (s_2 + 1)(s_1 + s_2 + s_3 + 2)$, $h_{\chi_3}(s_1, s_2, s_3) =$

(12) (e_1, e_1, e_2)	1	(7) $(e_1, e_1, 0)$	3
(9) $(0, e_1, e_2)$	2	(2) $(e_1, 0, 0)$	4
(10) $(e_1, 0, e_2)$	2	(3) $(0, e_1, 0)$	4
(11) $(e_1, e_2, 0)$	2	(4) $(0, 0, e_1)$	4
(8) (e_1, e_1, e_1)	2	(not prehomop.)	

2-5. $N \geq 4$ の場合.

$$(19) (GL(1)^{m+1} \times SL(m), \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(m) \oplus \dots \oplus V(m) \oplus V(m)) (m \geq 3).$$

$$V = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in V(m) \oplus \dots \oplus V(m)\} = \{x = (x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+1} \in M(m, m+1)\}$$

とおく。基本的相対不変式は次の $(m+1)$ 個である: $f_k(x) = \det(x_1, \dots, \check{x}_k, \dots, x_{m+1})$ ($k=1, \dots, m+1$) for $x \in V$ ([2] の § 3. A の (3)). 定義

$$\text{により } b_{x_i}(s_1, \dots, s_{m+1}) \text{ は } f_i(\text{grad } x) \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k} \cdot f_i(x) = b_{x_i}(s_1, \dots, s_n) \times \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k}, \text{ 即ち } f_i(x) \cdot f_i(\text{grad } x) \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k} \cdot f_i(x) = b_{x_i}(s_1, \dots, s_{m+1}) \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k} \cdot f_i(x) \}$$

を満たす。したがってこの左辺を直接計算することにより

$b_{x_i}(s_1, \dots, s_{m+1})$ が求まる。 $i = m+1$ のときに求めれば十分である。

$f_{m+1}(x) = \det(x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+1}$ ゆえ, Capelli の等式 (Weyl, The classical groups の Ch. II, 4 の p.42) により次が成立する。

$$\det(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq m+1} \cdot \det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{1 \leq i, j \leq m+1} = \det(D_{m+1-i, m+1-j} + \delta_{ij}(m-i))_{1 \leq i, j \leq m+1}$$

$$\text{ここから } D_{ij} = \sum_{k=1}^m x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_{kj}}.$$

$$\det(D_{m+1-i, m+1-j} + \delta_{ij}(m-i))_{1 \leq i, j \leq m+1} \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k} \cdot f_{m+1}(x) = (s_{m+1} + 1) \cdot \prod_{k=2}^m \left(\sum_{i=1}^{m+1} s_i + k\right) \cdot \prod_{k=1}^{m+1} f_k(x)^{s_k} \cdot f_{m+1}(x)$$

より, $b_{x_{m+1}}(s_1, \dots, s_{m+1}) = (s_{m+1} + 1) \cdot \prod_{k=2}^m \left(\sum_{i=1}^{m+1} s_i + k\right)$ を得る。よって

$$b\text{-関数は } b_x(s_1, \dots, s_{m+1}) = \prod_{i=1}^{m+1} [s_i + 1]_{m_i} \times \prod_{k=2}^m \left[\sum_{i=1}^{m+1} s_i + k\right]_{\sum_{i=1}^{m+1} m_i} \text{ for } x =$$

$\prod_{i=1}^{n+1} \chi_i^{n_i} \ (n_i > 0)$ とする。

$$(20) \quad (\mathrm{GL}(1)^{n+1} \times \mathrm{SL}(n), \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1^*, V(n) \oplus \cdots \oplus V(n) \oplus V(n)^*) \ (n \geq 3).$$

$$V = \{ x = (x_1, \dots, x_n, y) \in V(n) \oplus \cdots \oplus V(n) \oplus V(n)^* \} = \{ x =$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & y_n \end{pmatrix} \in M(n, n+1) \} \text{ とおく。基本的相対不変式は次}$$

$$\text{の } (n+1) \text{ 個である: } f_i(x) = \langle y, x_i \rangle = \sum_{k=1}^n y_k x_{ki} \ (i=1, \dots,$$

$$n), f_{n+1}(x) = \det(x_1, \dots, x_n) = \det(x_{ij}) \text{ for } x \in V \text{ ([2] の §}$$

$$3, A \text{ の (4))。定義により, } i \neq n+1 \text{ のとき } \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_{ki}} \right) \cdot$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) \cdot f_i(x) = \psi_{\chi_i}(S_1, \dots, S_{n+1}) \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) \text{ 中え, 左辺を直接}$$

$$\text{計算することにより, } \psi_{\chi_i}(S_1, \dots, S_{n+1}) = (S_i+1)(S_1+\dots+S_{n+1}+n)$$

$$\text{を得る。} \psi_{\chi_{n+1}}(S_1, \dots, S_{n+1}) \text{ は } \det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) \cdot \{\det(x_{ij})\} =$$

$$\psi_{\chi_{n+1}}(S_1, \dots, S_{n+1}) \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) \text{ を満たす。Cappelli の等式によ}$$

$$\text{り, } \det(D_{n+1-i, n+1-j} + \delta_{ij}(n-i))_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) f_{n+1}(x)$$

$$= \psi_{\chi_{n+1}}(S_1, \dots, S_{n+1}) \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x) f_{n+1}(x) \text{ 中え, 左辺を計算するこ}$$

$$\text{とにより } \psi_{\chi_{n+1}}(S_1, \dots, S_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (S_{n+1}+k) \times (S_1+\dots+S_{n+1}+n) \text{ を得}$$

$$\text{る。よって } \psi\text{-関数は } \psi_{\chi}(S_1, \dots, S_{n+1}) = \prod_{i=1}^n [S_i+1]_{n_i} \times \prod_{k=1}^{n-1} [S_{n+1}+k]_{m_{n+1}}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{n+1} S_i + n \right]_{\sum_{i=1}^{n+1} n_i} \text{ for } \chi = \prod_{i=1}^{n+1} \chi_i^{n_i} \ (n_i > 0) \text{ とする。}$$

$$(21) \quad (\mathrm{GL}(1)^4 \times \mathrm{SL}(2m+1), \lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1)).$$

$$(22) \quad (\mathrm{GL}(1)^4 \times \mathrm{SL}(2m+1), \lambda_2 \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_1^* \oplus \lambda_1^*, V(m(2m+1)) \oplus V(2m+1) \oplus V(2m+1)^* \oplus V(2m+1)^*).$$

これらの ψ -関数も (19), (20) と同様に直接計算すれば求まるはずだが, 今のところまだ求めていない。

§ 3. h -関数の表

$f_1, \dots, f_N (X_1, \dots, X_N)$ については § 2 の通りに選んでいるものとする。 $\chi = \prod_{i=1}^N X_i^{m_i} (m_i > 0)$ に対し h -関数 $h_\chi(s)$ は以下の通り。

$N = 1$.

$$(1) \quad (GL(1)^2 \times SL(n), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$h_\chi(s_1) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + n]_{n_1}$$

$$(2) \quad (GL(1)^2 \times SL(n), \Lambda_1 \oplus \overbrace{\Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_1}^n)$$

$$h_\chi(s_1) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + 2]_{n_1} \cdots [s_1 + n]_{n_1} = \prod_{k=1}^n [s_1 + k]_{n_1}$$

$$(3) \quad (GL(1)^2 \times SL(2m+1), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$$

$$h_\chi(s_1) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + 3]_{n_1} \cdots [s_1 + 2m + 1]_{n_1} = \prod_{k=1}^{m+1} [s_1 + 2k - 1]_{n_1}$$

$$(4) \quad (GL(1)^2 \times Sp(n), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$$

$$h_\chi(s_1) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + 2n]_{n_1}$$

$$(5) \quad (GL(1)^2 \times Spin(10), \text{偶半スピノ表現} \oplus \text{偶半スピノ表現})$$

$$h_\chi(s_1) = [s_1 + 1]_{n_1} \cdot [s_1 + 4]_{n_1} \cdot [s_1 + 5]_{n_1} \cdot [s_1 + 8]_{n_1}$$

$N = 2$.

$$(6) \quad (GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$$

$$h_\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{n_1} \times \prod_{k=2}^m [s_1 + s_2 + 2k - 1]_{n_1 + n_2} \\ \times [s_2 + 1]_{n_2} \cdot [s_2 + 2m]_{n_2}$$

$$(7) \quad (GL(1)^3 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*)$$

$$h_\chi(s_1, s_2) = \prod_{k=1}^{m-1} [s_1 + 2k - 1]_{n_1} \times [s_1 + s_2 + 2m - 1]_{n_1 + n_2} \\ \times [s_2 + 1]_{n_2} \cdot [s_2 + 2m]_{n_2}$$

$$(8) \quad (GL(1)^2 \times SL(m), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$$

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= [s_1 + 1]_{m_1} \times \prod_{k=3}^{n+1} [s_1 + s_2 + \frac{k}{2}]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + \frac{m}{2}]_{m_2} \end{aligned}$$

$$(9) \quad (GL(1)^2 \times SL(n), 2\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= \prod_{k=2}^n [s_1 + \frac{k}{2}]_{m_1} \times [s_1 + s_2 + \frac{n+1}{2}]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + \frac{n}{2}]_{m_2} \end{aligned}$$

$$(10) \quad (GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$$

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + 2]_{m_1} \cdot [s_1 + 3]_{m_1} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{5}{2}]_{m_1+m_2} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{7}{2}]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_1 + s_2 + 4]_{m_1+m_2} \cdot [s_1 + s_2 + 5]_{m_1+m_2} \cdot [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + \frac{7}{2}]_{m_2} \end{aligned}$$

$$(11) \quad (GL(1)^2 \times SL(7), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + 2]_{m_1} \cdot [s_1 + \frac{5}{2}]_{m_1} \cdot [s_1 + \frac{7}{2}]_{m_1} \cdot [s_1 + s_2 + 3]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_1 + s_2 + 4]_{m_1+m_2} \cdot [s_1 + s_2 + 5]_{m_1+m_2} \cdot [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + \frac{7}{2}]_{m_2} \end{aligned}$$

$$(12) \quad (GL(1)^2 \times Sp(3), \Lambda_3 \oplus \Lambda_1)$$

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + 2]_{m_1} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{5}{2}]_{m_1+m_2} \cdot [s_1 + s_2 + \frac{7}{2}]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + 3]_{m_2} \quad (\text{予想}) \end{aligned}$$

$$(13) \quad (GL(1)^2 \times Spin(10), \text{ベクトル表現} \oplus \text{スピノール表現})$$

$$\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + s_2 + 5]_{m_1+m_2} \cdot [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + 8]_{m_2}$$

$$(14) \quad (GL(1)^2 \times SL(2m), \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$\chi(s_1, s_2) = \prod_{k=1}^m [s_1 + 2k - 1]_{m_1} \times [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + 2m]_{m_2}$$

$$(15) \quad (GL(1)^2 \times Spin(7), \text{スピノール表現} \oplus \text{ベクトル表現})$$

$$\chi(s_1, s_2) = [s_1 + 1]_{m_1} \cdot [s_1 + 4]_{m_1} \cdot [s_2 + 1]_{m_2} \cdot [s_2 + \frac{7}{2}]_{m_2}$$

(16) $(GL(1)^2 \times Spin(8), \text{スピノール表現} \oplus \text{ベクトル表現})$

$$\ell_X(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+4]_{n_1} \cdot [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+4]_{n_2}$$

(17) $(GL(1)^2 \times Spin(12), \text{スピノール表現} \oplus \text{ベクトル表現})$

$$\ell_X(S_1, S_2) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_1+\frac{7}{2}]_{n_1} \cdot [S_1+\frac{11}{2}]_{n_1} \cdot [S_1+8]_{n_1} \\ \times [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_2+6]_{n_2}$$

$N = 3.$

(18) $(GL(1)^3 \times SL(2), \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$

$$\ell_X(S_1, S_2, S_3) = [S_1+1]_{n_1} \cdot [S_2+1]_{n_2} \cdot [S_3+1]_{n_3} \cdot [S_1+S_2+S_3+2]_{n_1+n_2+n_3}$$

$N \geq 4.$

(19) $(GL(1)^{n+1} \times SL(n), \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1) \quad (n \geq 3) \quad N = n+1$

$$\ell_X(S_1, S_2, \dots, S_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} [S_i+1]_{n_i} \times \prod_{k=2}^n [S_1+S_2+\dots+S_{n+1}+k]_{\sum_{i=1}^{n+1} n_i}$$

(20) $(GL(1)^{n+1} \times SL(n), \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*) \quad (n \geq 3) \quad N = n+1$

$$\ell_X(S_1, S_2, \dots, S_{n+1}) = \prod_{i=1}^n [S_i+1]_{n_i} \times \prod_{k=1}^{n-1} [S_{n+1}+k]_{n_{n+1}} \times [S_1+S_2+\dots+S_{n+1}+n]_{\sum_{i=1}^{n+1} n_i}$$

参考文献

- [1] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65 (1977), 1-155.
- [2] T. Kimura, A classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups with scalar multiplications, J. of Alg. 83 (1983), 72-100.
- [3] T. Kimura, Remark on some combinatorial construction of relative invariants, Tsukuba J. Math. 5 (1981), 101-115.

- [4] J-I. Igusa, A classification of spinors up to dimension twelve, Amer. J. of Math. 92 (1970), 997-1028.
- [5] T. Kimura, S-I. Kasai and O. Yasukura, A classification of the representations of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits, Amer. J. of Math. 108 (1986), 643-691.
- [6] T. Kimura and S-I. Kasai, The orbital decomposition of some prehomogeneous vector spaces, Adv. Stud. in Pure Math. 6 (1985), 437-480.
- [7] 木村達雄, 有限個の軌道をもつ単純線型代数群の表現について, 数理解講究録 497.
- [8] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Inv. Math. 62 (1980), 117-179.
- [9] T. Kimura, Micro-local theory of complex prehomogeneous vector spaces, Part II of "M. Kashiwara, T. Kimura and M. Muro, Microlocal calculus of simple holonomic systems and its applications", preprint.
- [10] T. Kimura, The ℓ -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, Nagoya Math. J. 85 (1982), 1-80.
- [11] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Toky 22 (1975), 25-65.
- [12] T. Suzuki, On zeta functions associated with quadratic forms of variable coefficients, Nagoya Math. J. 73 (1979), 117-147.

- [13] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I, Tohoku Math. J. 34 (1982), 437-483.