

Relative spinnable structure について

学習院大 理 水谷忠良

§0 Introduction

I. Tamura と H. Winkelnkemper は多様体(closed)の軸 (=axis)を定義して それぞれ codimension 1 foliation の存在, inertia group & "fibering within cobordism" の問題を解くのに応用した。

ここでは boundary が既に S^1 上の fibre bundle になっている境界つき多様体の軸を探す問題を考える。

§1 Definition

Def W を Compact connected differentiable manifold で ∂W が connected で S^1 上の fibre bundle の total space になっているものとする。

この時 W が spinnable 又は spinnable structure をもつとは、次の 1, 2, 3, の条件を満足する時をいう。

1. Codimension 2 の closed differentiable submanifold $X \subset \text{Int } W$ があり その normal bundle が trivial である。
2. X の tubular neighbourhood を $X \times D^2$ で表わす。
 $E = W - \text{Int } X \times D^2$ とおくと E は S^1 上の fibre bundle である。 $\xi: E \rightarrow S^1$ を projection map とする。
3. X の normal bundle の trivialization を適当にとる時 次の commutative diagram が成立する。

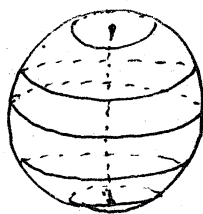
$$\begin{array}{ccc}
 \partial E & \xrightarrow{\iota} & E \\
 & \searrow \text{projection} & \downarrow \xi \\
 & & S^1
 \end{array}$$

ただし ι は inclusion map, projection は ∂E を X 上の trivial S^1 bundle とみた時の S^1 成分への projection である。

X を spinnable structure の axis $\xi: E \rightarrow S^1$ の fibre を generator, $\xi: E \rightarrow S^1$ 自身を spinning bundle と呼ぶ。

注 ① I. Tamura [2], Winkelnkemper の 定義を relative case に拡張するやり方は ∂W に条件をつけないようにすることもできる。(axis を boundary のある 多様体にする)

図で例を示すと.



$D^3 - I \times D^2$ が S^1 の bundle
で ∂D^3 も spinnable structure
が定義されている。

knot $\longleftrightarrow$ spinnable structure の対比の面からはこちらの方が自然かもしれない。上の定義は foliation への応用を考慮したものである。

② ∂W が connected という仮定は本質的でないが、以下では connected な場合を主に考える。

③ generator F は ∂W の fibre と axis X の cobordism になる。

§2 定理

次の定理を証明するのが目的である。

定理 (Relative spinnable structure の存在)

W を $(2m+1)$ -次元 manifold で、 W 及び $\partial W \rightarrow S^1$ の fibre M が simply connected ($m \geq 3$) とする。

この時 W は spinnable である。

証明

W, M を上の通りとする時 W の handle body で、次のようなものが存在する。

① $M(m)$ は $M \times I \subset \partial W$ に m -次元までの handles を attach したものである。

② $H_k(M(m), M \times I) \cong H_{m-1}(W, M \times I)$, $k \leq m-1$,
 $H_m(M(m), M \times I) \rightarrow H_m(W, M \times I)$ onto
 但し map は inclusion map に induce されたもの。

$M(m)$ の存在は大体次のようにして示すことができる。

$\pi_1(M) = \pi_1(W)$ を用い, relative Hurewicz 定理より,

$$\pi_2(W, M \times I) \cong H_2(W, M \times I)$$

$H_2(W, M \times I)$ の generator を imbedding $(D^2, \partial D^2) \rightarrow (W, M \times I)$ でとり。さらに $H_2(W, M \times I)$ に relation をいれている disc (Torsion を生じさせている disc) を imbedding でとる。

(general position で $m \geq 3$ なら可能)。

$M(2) = (M \times I$ に $H_2(W, M \times I)$ の free generator に対応する 2-handles & W の Torsion を作る 3-handles を attach した handlebody) とする。

次の exact Sequence を得る。

$$H_2(M(2), M \times I) \xrightarrow{\varphi} H_2(W, M \times I) \rightarrow H_2(W, M(2)) \xrightarrow{\psi}$$

$$H_1(M(2), M \times I) \cong_{\text{exc}}^{-1} H_1(\Sigma D^2, \Sigma \partial D) = 0.$$

φ は作り方より isomorphism, ψ は zero map であるから。

$H_2(W, M(2)) = 0$ がいえる。一方 Van-Kampen の定理より $\pi_1(M(2)) = 0$ であるから、再び Hurwicz を用いて、

$$\pi_3(W, M(2)) \cong H_3(W, M(2)) \text{ が言える。}$$

又、 $H_3(W, M \times I) \cong H_3(W, M(2))$ が容易に示せるから、

$M(2)$ の場合と同様に、 $m \geq 4$ なら、

$M(3) = M(2) \cup H_3(W, M \times I)$ の free generator に対応する handles $\cup H_3(W, M \times I)$ の Torsion をなす 4-handles が作れる。

帰納的に $M(m-1)$ までと同様に構成できる。

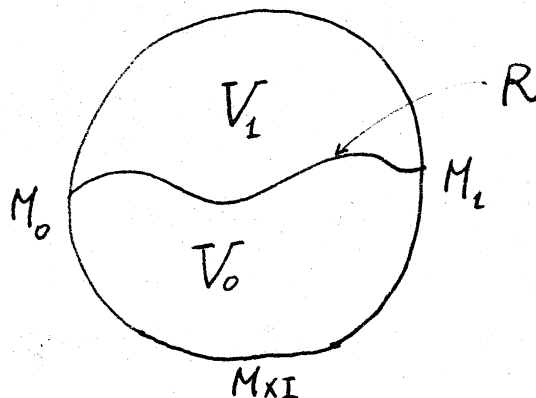
$M(m) = M(m-1)$ に $H_m(W, M \times I)$ のすべての generators に対応する handles を attach したものと定義する。この $M(m)$ が条件を満たすことは明らかである。

$$V_0 = M(m), \quad V_1 = W - \text{Int } V_0$$

$$R = \partial V_0 - M \times I = \partial V_0 - (\partial V_0 \cap \partial W)$$

$$\partial R = M_0 \cup M_1 \quad (M \text{ の } n \text{ 個の disjoint union})$$

とおく。



Lemma 1 $\pi_1(R, M_0) = 0$

証明. $f: (I, \partial I) \rightarrow (R, M_0)$ を $\pi_1(R, M_0)$ の元を表わす differentiable map とする. $\pi_1(V_0, M_0) = 0$ は仮定より容易に示されるから. f の拡張 $\tilde{f}: (D^2, I) \rightarrow (V_0, M_0)$ が存在する. ところが (V_0, M_0) は $(m+1)$ -次元以下の complex の homotopy type をもつので. $m \geq 3$ の仮定のもとでは. $(2m+1) > 2 + m+1$ より general position により $\tilde{f}$ を $\bar{f}: (D^2, I) \rightarrow (R, M) \hookrightarrow$ 縮めることができる. Q.E.D.

Lemma 2. $H_i(R, M_0) \cong H_i(V_0, M_0) \cong H_i(V, M_0) \quad i < m,$

$$H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0, M_0) \oplus H_m(V_0, M)$$

$$\cong H^m(V_1, M_0) \oplus H_m(V_1, M).$$

証明 $V_0 \supset R \supset M_0$ に関する exact sequence

$$\rightarrow H_{i+1}(V_0, R) \rightarrow H_i(R, M_0) \rightarrow H_i(V_0, M_0) \rightarrow H_i(V_0, R) \rightarrow$$

$\parallel$ Poincaré duality

$$H^{2m-i}(V_0, M)$$

$\parallel$ P.D.

$$H^{2m+1-i}(V_0, M)$$

(V_0, M) は m -次元の complex の homotopy type をもつから.

$$i \leq m-1 \text{ の時 } H^{2m-i}(V_0, M) = H^{2m+1-i}(V_0, M) = 0$$

$$i = m \text{ の時 } 0 \rightarrow H_{m+1}(V_0, R) \rightarrow H_m(R, M_0) \rightarrow$$

$$H_m(V_0, M_0) \rightarrow 0 \quad \text{ところが } H_m(V_0, M_0) \text{ は free}$$

$$\text{だから. (1) } i \leq m-1 \text{ の時 } H_i(R, M_0) \cong H_i(V_0, M_0)$$

(2) $i=m$ の時 $H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0, M) \oplus H_m(V_0, M)$ が言える。同様に $V_1 \supset R \supset M_0$ に関する sequence と Poincaré duality を用いて (V_1, M) の homology に関する同型も得られる。 Q. E. D.

次 $K(R, M_0)$ を $(W, M \times I)$ と同様に handle 分解して, manifold F を定義する。即ち F は M_0 に handle を低い次元から attach して $H_i(F, M_0) \cong H_i(R, M_0)$ が同型 ($i < m$) であり, m -handles としては $H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0, M) \oplus H_m(V_0, M)$ の同型を用い, $H_m(V_0, M)$ の generator に対応する handles と $H_{m-1}(R, M_0) \cong H_{m-1}(V_0, M)$ の torsion をなしている handles を attach したものとす。($\pi_1(R, M) = 0$ により m -disk の double point 等は除ける。) もちろん F は $2m$ 次元の manifold で m 次元の complex の homotopy type をもつ。

lemma 3 V_0 は $F_0 \times I$ に diffeomorphic である。 homotopy equivalence.

証明 inclusion map $i: F \rightarrow V_0$ が homotopy equivalence であることを示す。 F のつくり方より $H_k(F, M_0) \cong H_k(V_0, M_0)$ であるから, 次の exact sequence から明かか。

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{k+1}(F, M) & \rightarrow & H_k(M_0) & \rightarrow & H_k(F) & \rightarrow & H_k(F, M) & \rightarrow & H_{k-1}(M_0) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{k+1}(V_0, M) & \rightarrow & H_k(M_0) & \rightarrow & H_k(V_0) & \rightarrow & H_k(V_0, M_0) & \rightarrow & H_{k-1}(M_0) \end{array}$$

従って relative h -cobordism theorem により.

$$V_0 = F \times I. \text{ Q.E.D.}$$

定理の証明.

$$H_k(F, M_0) \xrightarrow{i_1} H_k(V_1, M) \text{ を考えると.}$$

$k < m$ では $H_k(F, M_0) \cong H_k(V_0, M_0) \cong H_k(V_1, M_0)$ で同型である. $k = m$ で $H_m(W, M)$ が Torsion free の時は $H_m(V_0, M) \cong H_m(W, M) \cong H_m(V_1, M)$ が容易に示せて. i_1 は. $k = m$ でも同型となり. 上と同様に five lemma により i_1 は. homotopy equivalence になり

$$V_1 = F \times I \text{ が言える.}$$

即ち $W = F \times I \cup F \times I$ となり W は spinnable である. $H_m(W, M)$ が Torsion をもつ場合には. I. Tamura [3] (Theorem 7) と同様に. 上の F をとりなおせばよい.

以上で定理の証明を終る.

§ 3 Examples.

(1). M を closed Manifold とする時 $M \times D^2$ は. $M \times I$ を generator とする trivial な spinnable structure をもつ.

(2) $f: S^1 \times S^k \times D^{m-k} \rightarrow S^{2m+1}$ を homotopically trivial な imbedding とする. この時 $S^{2m+1} - \text{Int.}(\text{Image } f)$ は specially spinnable (即ち S^{2m-1} を axis とする spinnable

structure をもつ) である。これは、 $S^{2m+1} = S^{2m-1} \cup D^{2m} \cup S^1$ の分解において $\text{Image } f \subset S^1 \times D^{2m}$ ととれることより明らかである。

(3). $S^{2m+1} \times D^2$ は $S^m \times S^{m+1}$ を axis とする spinnable structure をもつ。これは、 S^{2m+3} が $S^m \times S^{m+1}$ を axis とする spinnable structure をもつことから容易に導かれる。

Compact manifold の Codimension 1 の foliation の存在に関しては、 $M \times D^2$ に boundary を leaf とする foliation があるかどうか重要な問題であるが、今までのところ $M = \text{odd dimensional sphere} = S^{2m+1}$ の場合しか解っていない。

closed manifold の場合は、 $(m-1)$ -connected $2m+1$ -manifold の axis を surgery して、specially spinnable にした。しかし、Relative の場合同様のことは言えない。かえって、 $S^k \times S^{k+1} \times D^2$ は specially spinnable ではないことが簡単に示される。(cohomological な structure を用いて)

ただし closed の場合と同様に 例えば $M \times D^2$ に sphere の spinnable structure を connected sum して、 $M \times D^2$ の spinnable structure τ axis $= M \# (\text{sphere の spinnable}$

structure の axis) となるように axis の変形を行うことが出来る。しかしこの操作は, foliation の問題を解くには直接役立たない。

従って, relative spinnable structure の axis の "surgery" が出るかは重要な問題である。

具体的な問題としては

$(S^k \times S^{k+1} \# S^k \times S^{k+1}) \times D^2$ の axis で, S^1 上の fibre bundle になるものがあるか など興味深い問題であろう。

参考文献

- [1] S. Smale, On the structure of manifolds,
Amer. J. Math, 84 (1962)
- [2] I. Tamura, Spinnable structures on differentiable
manifolds Proc. Japan Acad. 48 (1972) 293-296.
- [3] I. Tamura, Foliations and Spinnable structures
on manifolds. (to appear)
- [4] H. E. Winkelnkemper, Manifolds as open books
(to appear)