

Lašnev 空間の次元について

筑波大 数学系 岡 晋平

一般に距離空間からの閉写像による像を Lašnev 空間と呼ぶ。また $\dim X$ は空間 X の covering dimension を表わす。最近 I.M. Leibo [3] によって得られた結果を改良することにより、講演者は次の定理を証明した。（[5] を参照）

定理 : 空間 X が $\dim X \leq n$ を満たす Lašnev 空間であるための必要十分条件は $\dim X_0 \leq 0$ を満たす Lašnev 空間 X_0 と X_0 から X 上への閉写像 f で $\text{ord } f \leq n+1$ を満たすものが存在することである。（ここで $\text{ord } f = \sup \{ |f^{-1}(x)| : x \in X \}$ ）。

この結果、距離空間の場合に K. Morita [4] によって示された事実とまったく相似な事実が Lašnev 空間においても成立することがわかったわけである。ここではこの定理の証明の概略を述べることにする。そのためには若干の準備が必要である。

$\text{Ind } X = n$ を満たす正規空間 X において、閉集合 F とその開近傍 G が $\text{Ind } X$ を決定しているとは、 $\bar{U} \subset G$ を満たす F の任意の開近傍 U に対して $\text{Ind } \text{Bd}(U) \geq n-1$ が成立している時のことを言う。(ここで $\text{Ind } X$ とは空間 X の large inductive dimension を意味する)。

正規空間 X において、閉集合 F_i とその開近傍 G_i からなる可算族 $\mathfrak{A} = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$ が X の special family であるとは、 X の任意の開集合 X' に対し、ある自然数 j が存在して、 $\{X' \cap F_j, X' \cap G_j\}$ が $\text{Ind } X'$ を決定していることである。([2], [3] を参照)

Special family $\mathfrak{A} = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$ を持つ正規空間 X から、距離空間 S 上への連続写像 f が $\mathfrak{A}$ に関して special (map) であるとは次の2つの条件が成立している時のことを言う。

- (1) 任意の i に関して $f(F_i)$ は S の閉集合である。
- (2) 各 i に対して $f(F_i)$ の S における開近傍 U_i が存在して $f^{-1}(U_i) \subset G_i$ を満たす。([2], [3] を参照)

以下、表われてくるすべての diagram は空間と連続写像から成り立っているものとする。

下記の commutative diagram 1 が pullback square であるとは、任意の commutative diagram 2 に対して、diagram 3 を commutative にするような $t': T' \rightarrow T$ が一意的に存在

することである.

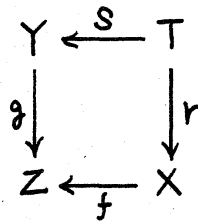


Diagram 1.

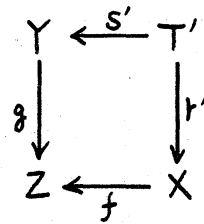


Diagram 2.

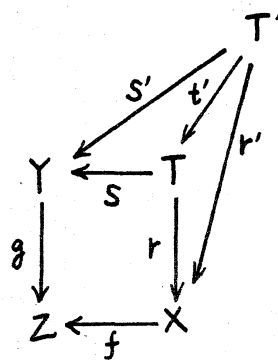


Diagram 3.

上は pullback square の categorical な定義であるが, より直感的には T, r, S をそれぞれ次のように見做してもよい.

$$T = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \subset X \times Y.$$

$$r = p_X|_T \quad ; \quad p_X: X \times Y \rightarrow X \text{ は Projection.}$$

$$S = p_Y|_T \quad ; \quad p_Y: X \times Y \rightarrow Y \text{ は Projection.}$$

次はよく知られた結果である.

補助定理 1 : 上の Pullback square において次が成立する.

- (1) もし f が perfect なり, S も perfect である.
- (2) もし $\text{ord } f \leq n$ なり, やはり $\text{ord } S \leq n$ である.

次の結果は定理の証明にとって本質的である.

補助定理 2 (S. Oka [5]) : 上の pullback square において, もし次の3つの条件が成立するならば, r は閉写像になる.

- (1) g は閉写像である.
- (2) X は Hausdorff 空間である.
- (3) f は閉写像で, 任意の $z \in Z$ に対して $|f^{-1}(z)| < \aleph_0$ を満たす.

さて定理を証明しよう. 定理の条件が十分条件であることはよく知られている. ([6, 9.2.13] を参照). 必要条件であることを示すために Y を Lašnev 空間で $\dim Y \leq n$ であると仮定しよう. その時, Y の special family Φ と, $\dim Z \leq n$ を満たす距離空間 Z と, Φ に関する special map $g: Y \rightarrow Z$ が存在する. ([2] を参照) さらによく知られているように, この Z に対して $\dim X \leq 0$ を満たす距離空間 X と X から Z 上への閉写像 f で $\text{ord } f \leq n+1$ を満たすものが存在する. そこで空間 T と写像 r, s で下の diagram 4 の lower square を pullback square にするようなものを作れば, 補助定理 1 より, S は閉写像となり $\text{ord } S \leq n+1$ を満たす. また T は明らかに正規空間であって, [3] において $\dim T \leq 0$ が証明されている. 一方 Y は Lašnev 空間であるから, ある

距離空間 M と M から Y 上への閉写像 h が存在する。
 そこで空間 T' と写像 r', s' で diagram 4 の outer square
 を pullback square にするようなものを作れば, pullback square
 の定義より, $t': T' \rightarrow T$ で diagram 4 全体を commuta-
 tive にするものが (一意的に) 存在する. するとよく知ら
 れているように, diagram 4 の upper square も pullback
 square になる ([1] Exercise 21 E を参照). そこで,
 この pullback square に補助定理 2 を適用すると, t' は閉写
 像になる. 一方 T' は距離空間 $X \times M$ の部分空間として,
 やはり距離空間であるから, T' は結局 Lašnev 空間になる.
 以上, 定理は証明された。

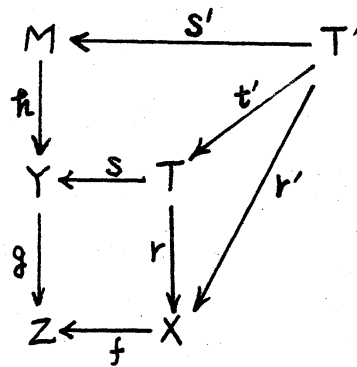


Diagram 4.

References

- [1] H. Herrlich and G.E. Strecker : Category Theory.
 Allyn and Bacon Inc., Boston (1973).
- [2] I.M. Leïbo : On the equality of dimensions for

closed images of metric spaces. Soviet. Math.
Dokl., 15, 835 - 839 (1974).

[3] — ; On closed images of metric spaces. *ibid.*,
16, 1292 - 1295 (1975).

[4] K. Morita : A condition for metrizability of topological spaces and for n -dimensionality. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*, 5, 33-36 (1955).

[5] S. Oka : A note on the covering dimension of L  snev spaces. *Proc. Japan Acad.*, 54, Ser. A (1978).

[6] A. R. Pears : *Dimension Theory of General Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge (1975).