

「トーラス上の微分方程式」へのコメント.

京大 教養 今西英器

1. 余次元1の現象について.

力学系を、群 G の多様体 M への作用として考える. $G = \mathbb{R}$, $\dim M = 2$ の時は Poincaré-Bendixon, Denjoy-Siegel の理論があるが、ここで本質的なのは、 M の中での orbit の余次元が1であることである. $M = \mathbb{R}$ (又は円周 S^1), G は M に局所微分同相として作用する pseudo-group として、 G の作用の極小集合の性質を Sacksteder [4] が調べている. この結果は、余次元1の foliation の定性的研究で本質的な役割を果たしている. 例えば、ホロノミーのない余次元1の foliation は、開1形式 ω により $\omega = 0$ で定義された foliation と同値である (正確な定式化と証明は [1]), Polynomial growth の n 次元 Lie 群 (例えば $\mathbb{R}^n$) が $(n+1)$ -次元多様体に局所的に自由に作用していれば、orbit は、正規部分多様体であるか、局所的に dense になる. (Plante

[2]). --- 等の結果が得られている。これ等は、Denjoy-Siegel の理論の最も自然な拡張と考えられる。

2. T^2 上の volume preserving flow について.

$$(1) \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2), i=1, 2, \quad f_1^2 + f_2^2 > 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

を $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の volume preserving flow の方程式とする。(1)の解曲線は同相写像 $\varphi: T^2 \rightarrow T^2$ により、 $\frac{dx_i}{dt} = g_i, i=1, 2$, の解曲線にうつるが、 f_i が C^r -級, $r=1, 2, \dots, \infty$, の時、 φ は C^r -級微分同相にとれる。

石井氏より、この命題は Sternberg, Amer. J. Math. 79 (1957) にあるが、証明は怪しい、とお教え頂いたが、以下のように考えると(少なくとも topologist には)容易に証明できる。

$\omega = f_2 dx_1 - f_1 dx_2$ とおくと、 $\omega = 0$ の積分多様体が、(1)の解曲線であり、 ω は閉1形式である。従って問題は、non-singular な閉1形式で定義された foliation の分類ということになる。これは高次元では難しいが、2次元では殆んど自明である、explicit に書いたものは次の結果がある。

定理 (Roussarie [3]) $M = V \times S^1$, V は開多様体で、 $\dim V = 1$ or 2 . ω_1 と ω_2 が M 上の non-singular な閉1形式で、同じコホモロジー類に属する。この時、恒等写像と

isotopic な微分同相 $\varphi: M \rightarrow M$ が存在し、 φ は $\omega_1 = 0$ の積分多様体を ω_2 のそれにくうつす。

Roussarie は C^∞ -級の場合をやっているが、 C^r -級 $r \leq \infty$ も同様である。 $M = T^2$, 実解析的の場合も、多分 O.K. である。

なお、2次元多様体上の volume preserving flow の理論は、上の様に閉1形式の形に通すと見通しが良くなる。例えば、T. Ura, Ann. Ecole. Norm. Sup. Paris (1952) の結果は、コホモロジーできれいに解釈できる。しかしそれでも、 M の genus が大きくなると相当面倒なようである。

- [1] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder ----,
 J. Math. Kyoto Univ. 1974, 607-634.
- [2] J. F. Plante, On the existence of exceptional minimal sets ----,
 J. Diff. Equations. 1974, 178-194.
- [3] R. Roussarie, Plongement dans les variétés feuilletées ---
 Publ. Math. I. H. E. S. 43 (1973), 101-141.
- [4] R. Sacksteder, Foliations and pseudo-groups.
 Amer. J. Math. (1965), 79-102.