

超函数のラプラス変換続論

東大理 小松 彦三郎 (Hikosaburo Komatsu)

演算子法へのラプラス変換の復権という立場で佐藤超函数のラプラス変換を論じた昨年の研究集会での話のつゞきである。たたみこみ方程式の形に一般化し、その解法を論ずる。

1. 復習

演算子法の最も有効な問題は定数係数線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} P\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = f(x), & P\left(\frac{d}{dx}\right) = a_m \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0 \\ u^{(j)}(0) = g_j, & j = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

であるが、 f , u の代りに Heaviside 函数 $\theta(x)$ との積 θf , θu を考え、Green の公式

$$\frac{d^i}{dx^i}(\theta u) = \theta u^{(i)} + u^{(i-1)}(0)\delta + \dots + u(0)\delta^{(i-1)}$$

を考慮すれば、解くべき方程式は $[0, b)$, $0 < b \leq \infty$,
 に台のあるリュウトルツ超函数の空間 $\mathcal{D}'[0, b)$ におけるた
 たみこみ方程式

$$(1) \quad p * u = f$$

となる。但し $p(x) = P(d/dx)\delta(x)$ 。これを

$$(2) \quad p * q = \delta$$

とすると $q \in \mathcal{D}'[0, \infty)$ をみつけてきて

$$u = q * f$$

として解く。このレスポラント q をなるべく具体的に求めたい。

(1) をラプラス変換すれば

$$\hat{p}(\lambda) \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

となるから、

$$(3) \quad \hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\hat{p}(\lambda)} \hat{f}(\lambda)$$

となる。あるいは (2) から

$$(4) \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\hat{f}(\lambda)}$$

によって g を定めるのがラプラス変換の方法である。

普通には、ラプラス変換が定義できるために f , u に増大度の制限をつけなければならぬことが欠点とされてきた。しかし

シュワルツ超函数 佐藤超函数 ラプラス超函数

$$\mathcal{D}'[0, \infty) \hookrightarrow \mathcal{B}[0, \infty) \leftarrow \mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\exp}$$

と理込みと拡張によってラプラス超函数 $\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\exp}$ の問題とすれば増大度と関係なくうまくゆくというのが前回の話であった[10]. (くわしくは[9]を見よ.)

ここで

$$\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} := \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) / \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C})$$

は $[a, \infty]$ に欠をもつラプラス超函数の空間である。但し

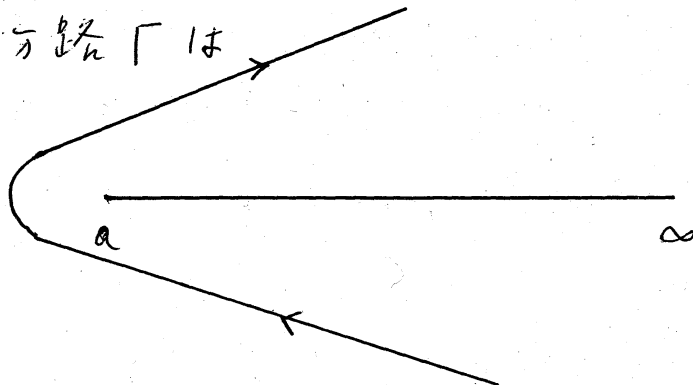
$\mathcal{O}^{\exp}(V)$ は V 上の整型函数で V に含まれる1角扇形上指数型の増大度をもつものの全体を表わす。ラプラス超函数

$$(5) \quad f(x) = F(x+i0) - F(x-i0), \quad F \in \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$$

に対して、そのラプラス変換 $\mathcal{L}f(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ を積分

$$(6) \quad \hat{f}(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{-\lambda z} F(z) dz$$

で定義する。積分路 Γ は



の形のものを取り, λ に応じて無限遠に向う角度をかえる。

主な結果は次の二つの定理であった。

定理 1. ラプラス変換 $\mathcal{L}$ は次の同型を与える:

$$(7) \quad \mathcal{L}: \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} \\ := \{ \hat{f}(\lambda) \in \mathcal{O}^{\exp}(S_{-\pi/2, \pi/2} \infty) \};$$

$$h_{\hat{f}}(\theta) \leq -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2 \}.$$

但し, $S_{-\pi/2, \pi/2} \infty$ は無限遠における半円 $\{ e^{i\theta} \infty; |\theta| < \pi/2 \}$, その上の $\mathcal{O}^{\exp}$ とは漸近的にこの半円に近づくある角集合 V 上の $\mathcal{O}^{\exp}$ の帰納極限の意味に解する。また

$$(8) \quad h_{\hat{f}}(\theta) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{f}(r e^{i\theta})|}{r}$$

は指数型整型函数の理論で基本的な型函数 (indicator function) を表わす。

さらに, $\hat{f}(\lambda) \in \mathcal{L} B_{[a, \infty]}^{\exp}$ の逆像となるラプラス超函数の - つの定義函数 $F(z) \in \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$ は

$$(9) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda z} \hat{f}(\lambda) d\lambda$$

で与えられる。ここで γ は $\hat{f}(\lambda)$ の定義域の任意の点とし, そこから無限遠に向かう積分路を連続的に変形して $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$ に入る z に対しても $F(z)$ を定める。

定理 2. 図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) & \rightarrow & B_{[a, \infty]}^{\exp} \rightarrow 0 \\ & & \cap & & \cap & & \downarrow \rho \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) & \rightarrow & B_{[a, \infty)} \rightarrow 0 \end{array}$$

で定義される自然な写像 ρ は全射である。

この定理の証明に前回は佐分利による $\bar{\partial}$ 問題の解を用いた。この部分だけが初等的でなかったため, 佐藤 [17] と金子 [6] による初等的証明を与えておく。

補題 (佐藤) U を $\mathbb{C}$ における $[a, \infty)$ の任意の近傍とする。このとき, 任意の $f \in B_{[a, \infty)}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|F(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U$$

を満たす f の定義函数 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$ がある。

この補題は $B[a, \infty)$ には自然な局所位相で分離的でないことが示している。

証明 (金子) $[a, \infty)$ の分割

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \rightarrow \infty$$

と $I_n := [a_n, a_{n+1}]$ の近傍 $U_n \subset U$ を $\{U_n\}$ が局所有限となるようにとる。

$f \in B[a, \infty)$ を任意にとり、これを

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \text{supp } f_n \subset I_n,$$

と分割し、各 f_n の標準定義函数

$$F_n(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} f_n(x) dx$$

が

$$(10) \quad |F_n(z)| \leq \varepsilon 2^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U_n$$

をみたすことができるのは、

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$$

が求める定義函数になる。

帰納法によって f_n を求める。佐藤超函数の脆弱性によ

$$f = h_1 + k_1, \quad \text{supp } h_1 \subset [a_1, a_2],$$

$\text{supp } h_1 \subset [a_2, \infty)$ と分けることができる。 h_1 の標準定義函数 H_1 は $\mathcal{O}(\mathbb{R} \setminus I_1)$ に属し、無限遠点での値をもつ。 Runge の定理により、定数項をもたない $1/(z - a_2)$ の多項式 $P_1(z)$ があり、

$$F_1(z) := H_1(z) - P_1(z)$$

は (10) をみたす。 P_1 はある $p_1 \in \mathcal{D}'_{\{a_2\}}$ の標準定義函数であるから、 $f_1 = h_1 - p_1$ とすれば、 $f_1 \in \mathcal{B}_{I_1}$ 。以下同じにすればよい。

以上ではラプラス超函数の空間 $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$ を大域的に定義したが、これに対して自然に $\mathcal{B}^{\text{exp}}$ が定義でき、 $\mathcal{B}^{\text{exp}}$ は $[-\infty, \infty]$ 上の層になることが言明できる。この層は $\mathbb{R}$ 上では左解超函数の層 $\mathcal{B}$ と一致する。定理 2 はこの層が脆弱であることを示している。

2. たたみこみ代数.

各の掛算は明らかに双線型写像

$$\mathcal{L} \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \times \mathcal{L} \mathcal{B}_{[b, \infty]}^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{L} \mathcal{B}_{[a+b, \infty]}^{\text{exp}}$$

を定める。この両辺の逆ラプラス変換をとって、たたみこみ

$$(11) \quad \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} \times \mathcal{B}_{[b, \infty]}^{\exp} \rightarrow \mathcal{B}_{[a+b, \infty]}^{\exp}$$

を定義する。 $\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\exp}$ および $\mathcal{U}$

$$(12) \quad \mathcal{B}_+^{\exp} := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp}$$

はこのたたみこみに因りて可換代数をなす。

定理1の同型から明らかにこれらの代数は零因子を含まない。しかし Titchmarsh の定理

$$(13) \quad \inf \sup f * g = \inf \sup f + \inf \sup g$$

は成立しない。

反例 (Pólya [15], Cartwright [5]). 実数列 ξ_n を

$$n(r) := \# \{ \xi_n ; |\xi_n| < r \} = o(r),$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi_n} \quad \text{有界},$$

となるようにとって

$$\hat{f}(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_n} \right) e^{\lambda/\xi_n}$$

と定義すれば、これは指数型の整函数であり、この型函数は次の公式で与えられる：

$$h_{\hat{f}}(\theta) = \overline{\lim_{r \rightarrow \infty}} S(r) \cos \theta,$$

但し,

$$S(r) = \sum_{|\xi_n| < r} \frac{1}{\xi_n}.$$

故に、任意の $a < 0 < b$ に対して

$$a = - \overline{\lim_{r \rightarrow \infty}} S(r)$$

$$b = \underline{\lim_{r \rightarrow \infty}} S(r)$$

となるように ξ_n をとれば、 $\hat{f}(\lambda)$ は $\mathcal{LB}[a, b]$ に属する。しかし

$$\hat{f}(\lambda) \hat{f}(-\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\xi_n} \right)^2 \right)$$

の型函数 $h_{\hat{f}(\lambda) \hat{f}(-\lambda)}(\theta) = 0$ 。 $\check{f}(x) = f(-x)$ によって $\check{f}$ を定義したとき、 $\check{f} \in \mathcal{B}[-b, -a]$ 。しかし、 $f * \check{f}$ は $\mathcal{B}_{\{0\}}$ に属し

$$\begin{aligned} 0 &= \inf \operatorname{supp} f * \check{f} > \inf \operatorname{supp} f + \inf \operatorname{supp} \check{f} \\ &= a - b \end{aligned}$$

となる。

$-\infty < a < b \leq \infty$ とする。 $\mathcal{B}$ の脆弱性は定

理 2 を用いれば,

$$(14) \quad \mathcal{B}_{[a, b)} \cong \mathcal{B}_{[a, \infty)}^{\text{exp}} / \mathcal{B}_{[b, \infty)}^{\text{exp}}$$

と表わされることがわかる. これと (11) を用いれば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ および $0 < c \leq \infty$ に対して, たちみ2み

$$(15) \quad \mathcal{B}_{[a, a+c)} \times \mathcal{B}_{[b, b+c)} \rightarrow \mathcal{B}_{[a+b, a+b+c)}$$

が代表によらず一意的に定まることがわかる.

上の反例により, $c < \infty$ のとき, たちみ2み代数 $\mathcal{B}_{[0, c)}$ は零因子をもつ. 他のたちみ2み代数 $\mathcal{B}_{[0, \infty)}$ および $\mathcal{B}_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{[a, \infty)}$ が零因子をもつかどうかは知らない.

定義 $f \in \mathcal{B}_+ \quad (\mathcal{B}_+^{\text{exp}})$ が正則とは, 任意の $g \in \mathcal{B}_+ \quad (\mathcal{B}_+^{\text{exp}})$ に対して (13) が成立することであると定義する.

定理 3. 次の条件のいずれかが成り立てば f は正則である:

$$1) \quad \text{supp } f = \{a\} \quad 1 \text{ 点};$$

$$2) \quad \text{supp } f \text{ はコンパクトかつ}$$

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |\hat{f}(i\nu)|}{1 + \nu^2} d\nu < \infty;$$

3) 正則な f_0 と $\inf \operatorname{supp} f_0 < \inf \operatorname{supp} f_1$ をみたす f_1 を用いて

$$f = f_0 + f_1$$

と分解できる。

証明 条件 1) の場合は Pólya [15] の結果である。

Boas の教科書 [2] の 191 ページを見よ。ここで最小絶対値定理 ([2] 51 ページ) を用いた代りに Ahlfors-Heins の定理 ([2] 116 ページ) を用いれば, 条件 2) の場合の証明ができる。条件 3) の場合は自明である。

非擬解析族の函数空間 $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ の双対空間の元として定義される超函数 $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ がコンパクト台をもつとき, そのラプラス変換は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\nu)}{1 + \nu^2} d\nu < \infty$$

をみたす $M(t) \geq 0$ を用いて

$$|\hat{f}(i\nu)| \leq C \exp M(L\nu), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

と評価される。したがって, このような超函数 f は条件 2) をみたす。 ([8] を見よ。)

3. 可逆性.

簡単のためたまたみ代数 $\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ または $\mathcal{B}_+$ の中でのみ考える.

定義 $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または $\mathcal{B}_+$) が可逆とは

$$p * q = \delta$$

となる $q \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または $\mathcal{B}_+$) が存在することである. これは任意の $f \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または $\mathcal{B}_+$) に対して方程式

$$p * u = f$$

が唯一つの解 $u \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または $\mathcal{B}_+$) をもつことと同等である.

$p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または $\mathcal{B}_+$) が正則可逆とは可逆であって, 逆 q が

$$\inf \text{supp } p + \inf \text{supp } q = 0$$

をみたすことと定義する.

p が正則可逆であるための必要十分条件は p が正則かつ可逆であることである.

正則でない可逆元があるかどうかは知らない.

定理 1 によれば, $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が可逆であるための必要十分条件は p のラプラス変換の逆数 $1/\hat{p}(\lambda)$ が $\mathcal{L}\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ に属することである。この函数の逆ラプラス変換 q が p の唯一つの逆となる。特に可逆な p のラプラス変換は次の条件を満たす

0) $\hat{p}(\lambda)$ は $S-\pi/2, \pi/2 \infty$ の近傍で零点を持たない。

定理 4. $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が条件 0) および定理 3 の条件

1) または 2) を満たせば, p は正則可逆である。

$p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が定理 3 の条件 3) のように分解でき, かつ p_0 が正則可逆ならば, p も正則可逆である。

証明. $a = \inf \text{supp } p$ とする。零点がないという条件 0) の下では, 定理 3 の条件 1) または 2) から

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{p}(re^{i\theta})|}{r} = -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2,$$

が導かれる。これから $\hat{p}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}\mathcal{B}_{[-a, \infty]}^{\text{exp}}$ がわかる。

後半を証明するため, q_0 を p_0 の逆とする。このとき, $q_0 * p = \delta + q_0 * p_1$ において $\inf \text{supp } q_0 * p_1 > 0$ 。したがって, 上記のラプラス変換 $1 + (q_0 * p_1)^{\wedge}(\lambda)$ は逆 $\sum (-1)^n (q_0 * p_1)^{\wedge}(\lambda)^n \in \mathcal{L}\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$

をもつ。この函数の逆ラプラス変換を q_2 としとき、
 $q_2 * q_0$ が p の正則可逆となる。

以上は $\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ における正則可逆性の判定条件であつたが、次の定理により $\mathcal{B}_+$ における (正則) 可逆性はこの場合に限着することがでる。定理 2 において $p(\tilde{f}) = f$ であるとき、 $f \in \mathcal{B}_+$ を $\tilde{f} \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ の制限、 $\tilde{f}$ を f の拡張という。

定理 5. $p \in \mathcal{B}_+$ が可逆 (正則可逆) であるための必要十分条件は p の一つの、そしてすべての拡張 $\tilde{p} \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が可逆 (正則可逆) であることである。

証明 p の一つの拡張 $\tilde{p}$ が (正則可) 逆 $\tilde{q}$ をもてば、明らかにその制限 $q = p(\tilde{q})$ は p の (正則可) 逆になる。

逆に、 p が (正則可) 逆 q をもつとする。 $\tilde{p}$ を p の任意の拡張、 $\tilde{q}$ を q の一つの拡張とすれば、

$$\tilde{q} * \tilde{p} = \delta + h$$

と書いたとき、 h は ∞ におけるみちをもつラプラス超函数になる。前定理の証明の中と同じ計算で、左辺は正則可逆 $\tilde{q}_2 \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}^{\text{exp}}$ をもつことがわかる。したがって、 $\tilde{q}_2 * \tilde{q}$ が $\tilde{p}$ の (正則可) 逆となる。

特に、 p が定理 3 の条件 1) または 2) をみたす超

函数であるとき, p が B_+ で可逆であることと $\hat{p}(\lambda)$ が定理4の条件0)をみたすことは同等になる。 p の値が1卓の場合, これは河合[7]の双曲型作用素の特徴づけの1次元の場合に他ならない。

4. Mikusiński の演算子との比較

Mikusiński [13] は, 連続函数の空間 $C([0, \infty))$ が通常の加法とたたみこみに関して零因子を持たない代数をなすことに基ついて, この商体として演算子の空間 M を定義し, Heaviside 演算子法の基礎づけを行った。

$f \in C([0, \infty))$ の不定積分 $\theta * f$ は $[0, \infty)$ にあるある連続函数の空間 $C[0, \infty)$ に属し, $f/g \in M$, $f, g \in C([0, \infty))$ は $\theta * f / \theta * g$ と表わされるから, M は $C[0, \infty)$ の商体でもある。

さらに, θ の代り $\delta(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, とのたたみこみを行えば, たたみこみ代数

$$C_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} C[a, \infty)$$

を用いて, 商体

$$M = C_+ / C_+$$

と表わすことができる。

定理3の2)および3)からわかるように, すべての $f \in C_+$ は B_+ の中で正則である. 即ち Titchmarsh の定理(13)が任意の $f \in C_+$ および $g \in B_+$ に対して成立する.

Mikusinski の演算子 $p = f/g$, $f, g \in C_+$, はあまり正体のよくわからぬものであるが, これから $\mathbb{R}$ の下限

$$\inf \text{supp } p = \inf \text{supp } f - \inf \text{supp } g$$

は表示 f/g によらず定まることに注意する.

特に $g \in C_+$ は B_+ の中で零因子となることはない. 従って, Mikusinski の演算子 $M = C_+/C_+$ および佐藤超函数 B_+ は共に商のなす二つの代数

$$B_+/C_+ := \{ f/g ; f \in B_+, g \in C_+ \}$$

に埋込むことができる.

定理6. 1) すべての $f \in B_+ \cap M$ は B_+ において正則である.

2) $f \in B_+ \cap M$ が B_+ において可逆でなければ, M における逆元 g/f は B_+ に属さない.

証明 $f \in B_+$ が M において g/ψ , $g, \psi \in$

C_+ と表わされたとすると, 任意の $g \in B_+$ に対し

$$\psi * f * g = \psi * g.$$

両辺の $\inf \sup$ を一通りに計算して比較すれば, 正則性 (13) を得る。

2) の言正明は明らかである。

これから, M と B_+ は共に一つか他に含まれることはないことがわかる。

$\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ を一つの非擬解析族, $\mathcal{D}_+^{*'}$ をその双対空間として定義される超函数族のうち台が下に有限であるものの全体とする。任意の $f \in \mathcal{D}_+^{*'}$ は $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ とたたみこみをとると C_+ に入る。すなわち

$$\mathcal{D}_+^{*'} \subset M \cap B_+.$$

次の定理は, 弱い意味でこの逆がなりたつことを示している。

定理 7. $f \in B_{[a,b]}$ をコンパクト台の佐藤超函数とする。

1) あるコンパクト台の連続函数 $g \neq 0$ とのたたみこみ $f * g$ が連続函数となるならば, f のラプラス変換 $\hat{f}(\mu + i\nu)$ は (16) をみたす。

2) 逆に, $\hat{f}(\mu + i\nu)$ が (16) をみたすならば,

任意の $c > 0$ と非擬解析族 $\mathcal{D}^*$ に対して $0 \neq \psi \in \mathcal{D}_{[-c, c]}^*$ が存在し, $\psi * f$ が $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属する。

証明. 半平面 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (または $\operatorname{Re} \lambda < 0$) 上の整型函数 $\hat{f}(\lambda)$ は, その上の一つの有界整型函数の商と表わせるとき Nevanlinna 族に入るという。1) の仮定がみたされるとき, $\hat{\psi}(\lambda)$ と $\hat{\psi}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$ は, Paley-Wiener の定理により, 共に両半平面 $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ 上 Nevanlinna 族に入り, したがって $\hat{f}(\lambda)$ 自身が Nevanlinna 族に入る。Krein [12] はこのように整函数は (16) をみたす指数型整函数であることを証明している。

2) Beurling-Malliavin [1] はこの仮定の下で $\hat{f}(\lambda)$ は一つの測度のラプラス変換の商として表せることを証明している。すなわち ψ も $\psi * f$ も測度になるのであるが, これらとある $\psi \in \mathcal{D}^*$ のたたみこみをとれば, 共に $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属するようになることができる。

Boehme [3], [14] は Mikusiński 演算子の一部に台の概念を定義した。Burzyk [4] によれば, 定理 7 の条件は正しく f がコンパクト台の演算子であるための必要十分条件である。

(16) はこの他にいろいろのところに現われる重要な条件である。超函数 $\mathcal{D}'$ の一般論を非擬解析核 $\mathcal{D}'$ と独立に (16) のみを基礎として組立てることが望まれる。

文献

- [1] A. Beurling - P. Malliavin, On the Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107(1962), 291 - 309.
- [2] R. P. Boas, Jr., Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
- [3] T. K. Boehme, The support of Mikusiński operators, Trans. Amer. Math. Soc., 176(1973), 319 - 334.
- [4] J. Burzyk, A Paley-Wiener type theorem for operators and its applications, Proc. Conf. on Generalized Functions, Convergence Structures and their Applications, to appear.
- [5] M. L. Cartwright, On integral functions of integral order, Proc. London Math Soc., 33(1931), 209 - 224.
- [6] 金子晃, 超関数入門, 下, 東京大学出版会, 1982.
- [7] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 17(1970), 467 - 517.
- [8] H. Komatsu, Ultradistributions II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac.

- Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24(1977), 607 - 628.
- [9] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions — A new foundation of the Heaviside calculus, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 34(1987), 805 - 820.
- [10] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions, 代数解析学の発展, 数理研講究録 638(1988), 224 - 238.
- [11] H. Komatsu, Operational calculus, hyperfunctions and ultradistributions, Prospects of Algebraic Analysis, Academic Press, to appear.
- [12] M. G. Krein, A contribution to the theory of entire functions of exponential type, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, 11 (1947), 309 - 326 (in Russian).
- [13] J. Mikusiński, Rachunek Operatorow, Warszawa, 1953.
- [14] J. Mikusiński - T. K. Boehme, Operational Calculus, 2nd Ed. Vol. II, Pergamon Press, Oxford, & PWN, Warszawa, 1987.
- [15] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z., 29(1929), 549 - 640.
- [16] Y. Saburi, Fundamental properties of modified Fourier hyperfunctions, Tokyo J. Math., 8(1985), 231 - 273.
- [17] 佐藤幹夫, 超函数の理論, 数学 10(1958), 1 - 27.