

## マルチンゲールの枠組みにおける正作用素と極大作用素

東京大学・大学院数理科学研究科 田中仁

Hitoshi Tanaka

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

東京大学・大学院数理科学研究科 寺澤祐高

Yutaka Terasawa

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

本稿の目的は、マルチンゲールの枠組みで正作用素と極大作用素を考え、それに関する荷重不等式が成り立つための荷重に対する条件を考察することである。マルチンゲールの枠組みでの解析は、古典調和解析の定理の Banach 空間値への一般化において重要な役割を果たす。特に、Kalton-Weis('01)([17]), Weis('01)([34]) の結果は、近年盛んに研究されている、Stokes 方程式を含む、放物型方程式のクラスの最大正則性の証明において重要な定理である。なお、本稿の結果は、スカラー値の結果を取り扱っており、Banach 空間値の結果は取り扱っておらず、また、放物型方程式への応用を含んでいない。本稿の結果とそれらとの関連を調べることは今後の課題としたい。本稿の内容は、Tanaka-Terasawa('13)([32]) の要約であり、証明に関してはそれに委ねることとする。

古典的調和解析において荷重ノルム不等式の研究は、古典的な研究テーマであり、García-Cuerva-Rubio de Francia('85)([9]) において詳しく説明されている。一方、最近、二進調和解析の手法が、荷重ノルム不等式を含む古典調和解析のさまざまな分野への応用によって新たに脚光を浴びている。Petermichl('00)([27]) および Nazarov-Treil-Volberg('03)([25]) の仕事はこの分野における重要な仕事である。荷重ノルム不等式と二進調和解析の二つの分野に関連する重要なトピックとして、一荷重ノルム不等式に現われる定数の最良評価と、二荷重ノルム不等式が成り立つための荷重に対する条件の研究がある。両方のトピックに関して最近重要な進展があった。一荷重不等式の最良評価の結果に関しては、特異積分作用素に関する Hytönen('12)([10]) の結果が特筆すべき結果である。また、二荷重ノルム不等式に関しては、Lacey('12, preprint)([19]) によって、Hilbert 変換に対して完全な解答が与えられた。これらの仕事に共通しているのは、二進格子の族を考えることである。二進格子とは、ユークリッド空間を、 $r2^{-k}$  ( $r > 0, k \in \mathbb{Z}$ ) の長さの格子 (これを  $k$  世代目の格子と呼ぶ) に分割したもので、各世代の格子の間に包含関係があるものとする。二進格子の全体の決定は比較的簡単で、それら全体には自然な確率測度が入る。その確率測度は、Hytönen と Lacey の仕事において

基本的な道具として使われている。一荷重不等式の最良評価に関しては確率測度を用いない証明が知られているが、十分多くの個数の二進格子を考え、作用素の二進化に関する最良の一荷重評価を得ることが必要となる。(Lerner('12)([21]), Hytönen-Lacey-Perez('13)([13]))

ここで考察する作用素は、正作用素と極大作用素である。ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  にルベーグ測度を付随させた空間における正作用素  $T$  とは

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) dy$$

と表示される作用素である。ただし、ここで  $k(x, y) \geq 0$  を仮定する。分数冪ラプラシアン  $(-\Delta)^\beta$  (ただし,  $\beta > 0$ ) の逆作用素である、分数積分作用素

$$I_\beta f(x) = (-\Delta)^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-n+\beta} f(y) dy$$

$$(\text{ただし, } \gamma(\beta) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\beta \Gamma(\frac{\beta}{2}) / \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\beta}{2}))$$

は正作用素の代表的な例である。また、ユークリッド空間における(中心型)Hardy-Littlewood 極大作用素とは以下によって定義される作用素である。

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

分数積分作用素  $I_\beta$  について  $L^q - L^p$  有界性 ( $1 < p < q < \infty$ ) はよく知られた Hardy-Littlewood-Sobolev の定理であり、Hardy-Littlewood 極大作用素  $M$  の  $L^p$  有界性は Hardy-Littlewood と Wiener によって証明された定理である。

分数積分作用素の二荷重評価とは、ある非負局所可積分関数  $u, v$  に対する、 $L^q(v dx) - L^p(u dx)$  有界性のことを指し、どのような  $u, v$  に対してこのような評価が成り立つかを決定するのが研究の興味の対象となってきた。また、Hardy-Littlewood 極大作用素の一荷重評価に関しては、 $L^p(u dx) - L^p(u dx)$  ( $1 < p < \infty$ ) がどのような  $u$  に対して成り立つかが興味の対象となるが、これを満たす荷重は Muckenhoupt の  $A_p$  荷重としてよく知られている。

分数積分作用素の二荷重評価に関して、既知の結果を述べよう。Sawyer('88)([29]) は、 $1 < p \leq q < \infty$  のときに分数積分作用素の二荷重評価が成り立つための、荷重に対する必要十分条件を得た。この条件は二荷重評価その双対として得られる評価に対して、荷重に関係してきまるある関数を代入して得られる条件で必要条件であることは明らかである。Sawyer は、この条件が十分条件であることを示した。その結果は、特異積分作用素に関する荷重評価の証明の際にも有用な手法を導入しており、最近の二荷重不等式の研究の原型になっている重要な結果である。正作用素の二荷重評価が成り立つための条件は積分核の適当な仮定の下で、Lacey-Sawyer-Urriarte-Tuero('09)([20]), Kairema('13)([16]) によって得られた。また、一荷重不等式、すなわち、二荷重不等式における  $u = 1$  の場合は、Kerman-Sawyer('86)([18]) に

よって初めて組織的に研究され、シュレディンガー作用素の固有値の分布の研究に応用された。

また、Hardy-Littlewood 極大作用素に関しては、先ほども述べたように、一荷重の場合の必要十分条件は Muckenhoupt('72)([24]) によって得られ、 $A_p$  条件としてよく知られている。 $A_p$  荷重のもとで、Hilbert 変換や Riesz 変換などの特異積分作用素が有界になることも Coifman-Fefferman ('74)([8]) によって示された。Hardy-Littlewood 極大作用素の二荷重評価が成り立つための、荷重に対する必要十分条件は Sawyer('82)([28]) によって得られた。

一方、確率論の分野でマルチンゲールの理論は、確率積分の理論や確率微分方程式の理論で中核的な役割を果たしている。Doob 極大作用素やマルチンゲール変換は確率解析における重要な道具である。それらの作用素の  $L^p$  有界性は、Doob と Burkholder('66)([3]) によってそれぞれ得られた。Doob 極大作用素の一荷重  $L^p$  評価は、Izumisawa-Kazamaki('77)([15]) によって最初に考察されたが、荷重に  $A_p$  条件のほかに正則条件が付加されていた。Doob 極大作用素の二荷重評価に関しては、弱  $L^p$  評価が Uchiyama('78)([31]) によって初めて研究され、荷重の必要十分条件が得られた。強  $L^p$  評価に関しては、Long-Peng('86)([23]) によって荷重の必要十分条件が得られた。(Chen-Liu('11)([7]) も参照のこと。) 正作用素の有界性に関する研究は、マルチンゲールの枠組みでは研究が筆者の知る限りなされていなかった。(分数積分作用素に関しては、Nakai-Sadasue('12)([26]) を参照のこと。)

正作用素および極大作用素の有界性の研究は Carleson の埋め込み定理と関連が深く、マルチンゲールの枠組みでは、Arai('86)([1]), Long('93)([22]) らによって研究された。本研究でも、我々の枠組みにおける Carleson の埋め込み定理を証明し用いた。

二進マルチンゲールは上でも述べたように、最近のユークリッド空間上の解析で重要な役割を果たしており、作用素の評価を、作用素を二進化したものの評価に帰着できることが多い。しかし、二進マルチンゲールを考える場合はユークリッド空間であり、通常のマルチンゲール理論で扱われる確率空間ではない。したがって、二進マルチンゲールと確率空間上のマルチンゲールの理論を統一的に扱うためには、 $\sigma$  有限な測度空間の上でマルチンゲールの理論を展開する必要がある。 $\sigma$  有限な測度を持つ測度空間の上でのマルチンゲールに関しては、Schilling('05)([30]), Hytönen('11)([11]) で扱われているが、荷重理論は扱われておらず、 $A_p$  荷重に関しても本研究で初めて導入された。また、マルチンゲールの定義に関しても我々の定義の方がより広がっている。ユークリッド空間上の二進格子以外の、 $\sigma$  有限な測度空間における filtration の有用な例については、例えば Hytönen('13)([12]) を参照のこと。

次に我々が問題を取り扱う枠組みについて説明しよう。 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を測度空間とする。 $\mathcal{F}$  の元で有限測度をもつ集合全体を  $\mathcal{F}^0$  と記す。測度空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は、 $E_i \in \mathcal{F}^0$  によって  $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \Omega$  と表されるとき、 $\sigma$ -有限であるといわれる。本稿では、考える測度空間はすべて

$\sigma$ -有限と仮定する.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^0$  を  $\mathcal{F}^0$  の任意の部分集合とする.  $\mathcal{F}$ -可測関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathcal{A}$  に属する任意の集合上で可積分のとき, すなわち,

$$1_E f \in L^1(\mathcal{F}, \mu) \text{ for all } E \in \mathcal{A}$$

のとき,  $\mathcal{A}$  可積分であるといわれる.  $\mathcal{A}$  可積分であるような関数全体の集合を  $L^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mu)$  と記す.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  である  $\sigma$ -代数を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -代数という. 前と同様に,  $\mathcal{G}$  の元で有限測度をもつ集合全体を  $\mathcal{G}^0$  と記す. 関数  $g \in L^1_{\mathcal{G}^0}(\mathcal{G}, \mu)$  が関数  $f \in L^1_{\mathcal{G}^0}(\mathcal{F}, \mu)$  の  $\mathcal{G}$  に関する条件付き期待値であるとは,

$$\int_G f d\mu = \int_G g d\mu \text{ for all } G \in \mathcal{G}^0$$

を満たすときにいう.  $f$  の  $\mathcal{G}$  に関する条件付き期待値は  $E[f|\mathcal{G}]$  と記され, 測度空間  $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の  $\sigma$ -有限性から  $L^1_{\mathcal{G}^0}(\mathcal{G}, \mu)$  の元として一意に決まる. 条件付き期待値とは, 非常に大雑把に述べると,  $\mathcal{F}$  可測関数の  $\mathcal{G}$  可測関数による近似であるとみることができる. ただし, ここでは確率空間もしくは有限測度空間でなく,  $\sigma$  有限な測度空間において考察しているため, 関数の可積分性について注意が必要になる.

部分  $\sigma$ -代数の列  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $\mathcal{F}$  の filtration であるとは,  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $i < j$  を満たすときにいう. 四つ組  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu; (F_i)_{i \in \mathbb{Z}})$  のことを  $\sigma$ -有限な filtered measure space と呼ぶことにする. また,

$$\mathcal{L} := \cap_{i \in \mathbb{Z}} L^1_{\mathcal{F}_i^0}(\mathcal{F}, \mu)$$

とおくことにする.  $i < j$  のとき,  $L^1_{\mathcal{F}_i^0}(\mathcal{F}, \mu) \supset L^1_{\mathcal{F}_j^0}(\mathcal{F}, \mu)$  であることに注意する.  $f \in \mathcal{L}$  に対して,  $E[f|\mathcal{F}_i]$  を  $\mathcal{E}_i f$  と記す. 条件付き期待値の塔法則より,  $\mathcal{E}_i f \in L^1_{\mathcal{F}_i^0}(\mathcal{F}, \mu)$  はマルチンゲールになる. マルチンゲールの定義は以下のように述べられる.

**定義 1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu; (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}})$  を  $\sigma$ -有限な filtered measure space とする.  $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  を  $\mathcal{F}_i$  可測関数の列とする. そのとき,  $f_i \in L^1_{\mathcal{F}_i^0}(\mathcal{F}_i, \mu)$  かつ  $f_i = \mathcal{E}_i f_j$  for  $i < j$  が成り立つ時, 関数列  $(f_i)$  はマルチンゲールであるという.

これは確率空間におけるマルチンゲールの定義の拡張になっている. 確率空間においては, 全測度が 1 であることから,  $L^1_{\mathcal{F}_i^0}(\mathcal{F}_i, \mu) = L^1(\mathcal{F}_i^0, \mu)$  となることに注意する.

我々の結果は, 所与の  $\sigma$ -有限な filtered measure space の下で述べられ, マルチンゲールは  $\sigma$ -有限な filtered measure space が与えられたときに定義される概念であるため, 標題において, 我々の枠組みをマルチンゲールの枠組みと呼ぶことにした.

$\mathcal{L}$  に属する非負関数を荷重と呼び, 荷重全体の集合を  $\mathcal{L}^+$  と書くことにする.

$\alpha_i, i \in \mathbb{Z}$  を非負で有界な  $\mathcal{F}_i$ -可測な関数とし,  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  と記すことにする.  $f \in \mathcal{L}$  に対して正作用素  $T_\alpha$  を

$$T_\alpha f := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \mathcal{E}_i f$$

と定義し, 一般化された Doob 極大作用素を

$$M_\alpha f := \sup_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i |\mathcal{E}_i f|$$

と定義する. 正作用素  $T_\alpha$  に対して,  $\alpha$  を  $T_\alpha$  の積分核と呼ぶことにする.  $\alpha = (1_\Omega)$  のとき,  $M_\alpha$  は Doob 極大作用素になり, そのとき  $M_\alpha f =: f^*$  と記すことにする.

本稿では, 正作用素  $T_\alpha$  に関する, 次の一荷重不等式

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w \, d\mu)} \leq C_{\alpha, w} \|f\|_{L^p(d\mu)} \quad (0 < q < \infty, \quad 1 < p < \infty) \quad (1)$$

が成り立つための条件, および, 一般化された Doob 極大作用素  $M_\alpha$  に関する, 次の二荷重不等式

$$\|M_\alpha f\|_{L^q(u \, d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(v \, d\mu)} \quad (1 < p \leq q < \infty) \quad (2)$$

が成り立つための条件を述べる. また, Doob 極大作用素に対する sharp な一荷重不等式についても述べる.

$1 < p \leq q < \infty$  と仮定し, 正作用素  $T_\alpha$  に関する, 一荷重不等式 (1) が成り立つための必要条件を考えてみる. 不等式 (1) が成り立っていると仮定しよう. すると, 条件付き期待値を得る作用素が自己共役性をもつことから, 双対性の議論によって

$$\|T_\alpha(gw)\|_{L^{p'}(d\mu)} \leq C \|g\|_{L^{q'}(w \, d\mu)} \quad (3)$$

を得る (ただし,  $p' = \frac{p}{p-1}$  は  $p$  の共役指数を表す.).

(1) と (3) が関数族  $1_E$  (ただし,  $E \in \mathcal{F}_i^0, i \in \mathbb{Z}$ ) に対して成り立つことは明らかに (1) が成り立つための必要条件である. Sawyer([29]) による, 分数積分作用素の二荷重不等式が成り立つための条件の類似を考えると, この条件が十分条件であると期待される. 同じく Sawyer によれば, より強く, 以下の二条件が必要十分条件であると期待される.

$$\left( \int_E \left( \sum_{j \leq i} \alpha_j \right)^q w \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \mu(E)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall E \in \mathcal{F}_i^0, \forall i \in \mathbb{Z}), \quad (4)$$

$$\left( \int_E \left( \sum_{j \leq i} \alpha_j \mathcal{E}_j w \right)^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C [w \, d\mu](E)^{\frac{1}{q}} \quad (\forall E \in \mathcal{F}_i^0, \forall i \in \mathbb{Z}). \quad (5)$$

ユークリッド空間における二進格子に付随する正作用素に対しては、この事実は証明されている。

技術的な理由から、条件 (4) の代わりに、以下の比較的強い条件 (6) を仮定し、そのもとで (5) が (1) が成り立つための必要十分条件であることを示す。

関数  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  は非負有界  $\mathcal{F}_i$  可測関数とし、 $\bar{\alpha}_i := \sum_{j \geq i} \alpha_j$  とする。そのとき、

$$\mathcal{E}_i \bar{\alpha}_i \approx \bar{\alpha}_i \quad (6)$$

が成り立つ。

ユークリッド空間に二倍測度を付随させた空間の分数積分作用素の二進化の積分核はこの条件を満たしている。ユークリッド空間上の正の積分核を持つ積分作用素 (= 正作用素) に対しても対応する条件が存在する。

以下に我々の得た結果を述べる。

**定理 2.**  $1 < p \leq q < \infty$  と仮定し、 $\alpha$  が (6) を満たすと仮定する。 $w \in \mathcal{L}^+$  を荷重とする。そのとき、以下の二つの主張は同値である。

(a) ある  $C_1 > 0$  が存在して、

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w \, d\mu)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(d\mu)}$$

が成り立つ。

(b) ある  $C_2 > 0$  が存在して、任意の  $E \in \mathcal{F}_i^0$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\left( \int_E \left( \sum_{j \leq i} \alpha_j \mathcal{E}_j w \right)^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_2 [w \, d\mu](E)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ。

さらに、許される  $C_1, C_2$  の最小値は、同値である。

次に、 $0 < q < p < \infty$ ,  $1 < p < \infty$  の場合を考えよう。Cascante-Ortega-Verbitsky('04, '06)([4], [5]) は、二進格子に付随する正作用素の場合に、 $0 < q < p < \infty$ ,  $1 < p < \infty$  の下で、(1) が成り立つための必要十分条件を荷重の離散 Wolff ポテンシャルを用いて記した。次に述べる定理は、彼らの結果の filtered measure space への拡張である。我々の  $\alpha$  に対する条件 (6) は彼らの導入した、二進格子に付随する正作用素の積分核に対する”二進対数有界振動条件”に対応する条件である。

**定理 3.**  $0 < q < p < \infty$ ,  $1 < p < \infty$  とする。 $\alpha$  が (6) を満たしているとし、 $w \in \mathcal{L}^+$  を荷重とする。次の二つの命題を考える。

(a) ある  $C_1 > 0$  が存在して,

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w d\mu)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(d\mu)}$$

が成り立つ.

(b) ある  $C_2 > 0$  が存在して,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$  となる  $r > 0$  に対して,

$$\|(\mathcal{W}_\alpha[w])^{\frac{1}{p'}}\|_{L^r(w d\mu)} \leq C_2.$$

ただし,

$$\mathcal{W}_\alpha[w] := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \bar{\alpha}_i^{p'-1}$$

とし,  $w$  の離散 Wolff ポテンシャルと呼ぶことにする.

このとき,  $0 < q < p < \infty$  かつ  $1 < p < \infty$  のもとで, (b) ならば (a) が  $C_1 \leq CC_2$  とともに示される. また, 逆に,  $1 < q < p < \infty$  のもとで, (a) ならば (b) が  $C_2 \leq CC_1$  とともに示される.

次に一般化された Doob 極大作用素  $M_\alpha$  に対する二荷重不等式が成り立つための必要十分条件について述べよう. この結果は  $p = q$ ,  $\alpha_i = 1_\Omega$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ), かつ,  $\Omega$  が確率空間の時は, Long-Peng('86)([23]) によって得られた.

**定理 4.**  $1 < p \leq q < \infty$  とし,  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  を非負有界な  $\mathcal{F}_i$ -可測関数とする. また,  $u, v \in \mathcal{L}^+$  を荷重とする. そのとき, 次の二つの主張は同値である.

(a) ある  $C_1 > 0$  が存在して,

$$\|M_\alpha f\|_{L^q(u d\mu)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(v d\mu)}$$

が成り立つ.

(b)  $\sigma = v^{1-p'} \in \mathcal{L}^+$  のとき, ある  $C_2 > 0$  が存在して, 任意の  $E \in \mathcal{F}_i^0$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\left( \int_E \left( \sup_{j \geq i} \alpha_j \mathcal{E}_j \sigma \right)^q u d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 [\sigma d\mu](E)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ.

さらに,  $C_1, C_2$  の最小値は同値である.

これと Chang('94)([6]) によって証明された  $p = q$  の場合の定理 4 の条件 (b) の言い換えと定理 4 から導かれる結果として, 次の結果がある.

**系 5.**  $1 < p < \infty$  とし,  $w \in \mathcal{L}^+$  を荷重とし,  $\sigma = w^{1-p'} \in \mathcal{L}^+$  であるとする. (ただし,  $p'$  は  $p$  の共役指数とする.) そのとき以下の主張は同値である.

(a) ある  $C_1 > 0$  が存在して,

$$\|f^*\|_{L^p(w d\mu)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(w d\mu)}$$

が成り立つ.

(b) ある  $C_2 > 0$  が存在して,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|(\mathcal{E}_i w)(\mathcal{E}_i \sigma)^{p-1}\|_{L^\infty(d\mu)} \leq C_2 < \infty$$

が成り立つ.

さらに, 最小の  $C_1, C_2$  に対して,

$$C_2 \leq C_1^p, \quad C_1 \leq C C_2^{\frac{1}{p-1}}$$

が成り立つ.

次に, Hytönen-Perez('11, preprint)([14]) の方法を我々の枠組みに適用して得られた, 系 5 の評価の改良について述べる.

$1 < p < \infty$ ,  $w \in \mathcal{L}^+$  を荷重とし, さらに,  $\sigma := w^{1-p'} \in \mathcal{L}^+$  とする.

$$[w]_{A_p} := \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|(\mathcal{E}_i w)(\mathcal{E}_i \sigma)^{p-1}\|_{L^\infty(d\mu)}$$

と定義し,

$$[w]_{A_\infty} := \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|(\mathcal{E}_i w) \exp(-\mathcal{E}_i(\log w))\|_{L^\infty(d\mu)}$$

と定義する. このとき,  $w \in \mathcal{L}^+$  であって,  $[w]_{A_p} < \infty$  のとき,  $w$  は  $A_p$  荷重であるといい,  $A_\infty$  に関しても同様に定義する.

Hölder の不等式などから,  $[w]_{A_p} \geq 1$ ,  $[w]_{A_\infty} \geq 1$  であることがわかる. この記号を用いると, 系 5 の主張は,

$$\|(\cdot)^*\|_{L^p(w d\mu) \rightarrow L^p(w d\mu)} \leq C_p [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}, \quad (7)$$

(ただし,  $C_p$  は  $p$  にのみ依存する定数) と表すことができる. このとき,  $[w]_{A_p} \geq 1$  であるため, (7) の右辺に表れる  $[w]_{A_p}$  の冪はより小さい方が, 良い評価であるということがわかる.

ユークリッド空間に二進格子が付随している場合は, 系 5 の主張と, (7) に表れる冪  $\frac{1}{p-1}$  が最良であることは, Buckley('93)([2]) によって示されている.

$[w]_{A_p} = [\sigma]_{A_{p'}}^{p-1}$  であることから, (7) は,

$$\|(\cdot)\|_{L^p(wd\mu) \rightarrow L^p(wd\mu)} \leq C_p([w]_{A_p}[\sigma]_{A_{p'}})^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

と書き換えられる.

次の結果は, (8) の改良である.

**定理 6.**

$$\|(\cdot)^*\|_{L^p(wd\mu) \rightarrow L^p(wd\mu)} \leq C_p([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty})^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ. ただし,  $C_p$  は  $p$  にのみ依存する定数である.

証明には, Hytönen-Perez([14]) で用いられた “principal cube” の手法をマルチンゲールの枠組みに適用できるように拡張した手法を用いる.

## 謝辞

第一著者は, 東京大学大学院数理科学研究科において, 日本学術振興会による, Global COE プログラムおよび博士課程教育リーディングプログラムの支援を受けた. また, 科学研究費基盤研究(C) (No. 23540187) と風樹会の支援を受けている. 第二著者は, 日本学術振興会特別研究員 PD として研究を行い, その後, 東京大学大学院数理科学研究科において, 日本学術振興会による博士課程教育リーディングプログラムの支援を受けた. ここに感謝の意を表したい.

## 参考文献

- [1] Arai H., *Measures of Carleson type on filtrated probability spaces and the corona theorem on complex Brownian spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **96** (1986), 643–647.
- [2] Buckley S., *Estimates of operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., **340** (1993), 253–272.
- [3] Burkholder D. L., *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist., **37** (1966), 1494–1504.
- [4] Cascante C., Ortega J. and Verbitsky I. E., *Nonlinear potentials and two weight trace inequalities for general dyadic and radial kernels*, Indiana Univ. Math. J., **53** (2004), 845–882.
- [5] Cascante C., Ortega J. and Verbitsky I. E., *On  $L^p$ - $L^q$  trace inequalities*, J. London Math. Soc. (2), **74** (2006), 497–511.

- [6] Chang X., *Some Sawyer type inequalities for martingales*, Studia Math., **111** (1994), 187–194.
- [7] Chen W. and Liu P., *Weighted inequalities for the generalized maximal operator in martingale spaces*, Chin. Ann. Math. Ser. B, **32** (2011), 781–792.
- [8] Coifman R. R., Fefferman C., *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals* Studia Math., **51** (1974), 241–250.
- [9] García-Cuerva J. and Rubio de Francia J. *Weighted norm inequalities and related topics* North-Holland Mathematics Studies, **116** Notas de Matemática [Mathematical Notes], **104** North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. x+604 pp.
- [10] Hytönen T., *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund Operators*, Ann. of Math., **175** (2012), 1473–1506.
- [11] Hytönen T., *Martingales and Harmonic Analysis I*, Lecture Note in the author's webpage (2008).  
<http://www.helsinki.fi/~tpehyton/maha/maha-eng.pdf>
- [12] Hytönen T., *Martingales and Harmonic Analysis II*, Lecture Note in the author's webpage (2013).  
<http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/94576543/maha-2012.pdf?version=1&modificationDate=1358417820910&api=v2>
- [13] Hytönen T., Lacey M. T. and Pérez C., *Non-probabilistic proof of the  $A_2$  theorem, and sharp weighted bounds for the  $q$ -variation of singular integrals*, arXiv:1202.2229 (2012).
- [14] Hytönen T. and Pérez C., *Sharp weighted bounds involving  $A_\infty$* , arXiv:1103.5562 (2011).
- [15] Izumisawa M. and Kazamaki N., *Weighted norm inequalities for martingales*, Tôhoku Math. J. (2), **29** (1977), 115–124.
- [16] Kairema A., *Two-weight norm inequalities for potential type and maximal operators in a metric space*, Publ. Mat., **57** (2013), 3–56.
- [17] Kalton N., Weis L. *The  $H^\infty$ -calculus and sums of closed operators*, Math. Ann., **321** (2001), 319–345.

- [18] Kerman R. and Sawyer E., *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **36** (1986), 207–228.
- [19] Lacey M., *Two Weight Inequality for the Hilbert Transform: A Real Variable Characterization, II*, arXiv math:1301.4463 (2013).
- [20] Lacey M., Sawyer E. and Uriarte-Tuero I., *Two weight inequalities for discrete positive operators*, arXiv:0911.3437 (2009).
- [21] Lerner A., *A simple proof of the  $A_2$  conjecture*, Int. Math. Res. Not. (2012); doi: 10.1093/imrn/rns145.
- [22] Long R.-L., *Martingale spaces and inequalities*, Peking University Press, Beijing; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.
- [23] Long R.-L. and Peng L.-Z.,  *$(p, q)$  maximal inequalities with two weights in martingale theory*, (Chinese) Acta Math. Sinica, **29** (1986), 253–258.
- [24] Muckenhoupt B., *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., **165** (1972), 207–226.
- [25] Nazarov F., Treil S. and Volberg A., *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math., **190** (2003), 151–239.
- [26] Nakai E. and Sadasue G., *Martingale Morrey-Campanato spaces and fractional integrals*, J. Funct. Spaces Appl. (2012) Article ID 673929, 29 p.
- [27] Petermichl S., *Dyadic shifts and a logarithmic estimate for Hankel operators with matrix symbol*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **330** (2000), 455–460.
- [28] Sawyer E., *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators*, Studia Math., **75** (1982), 1–11.
- [29] Sawyer E., *A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 533–545.
- [30] Schilling R., *Measures, integrals and martingales*, Cambridge University Press, New York, 2005.

- [31] Uchiyama A., *Weight functions on probability spaces*, Tôhoku Math. J. (2), **30** (1978), 463–470.
- [32] Tanaka, H. and Terasawa, Y. *Positive operators and maximal operators in a filtered measure space*, J. Funct. Anal., **264** (2013), 920–946.
- [33] Tanaka, H. and Terasawa, Y. *A characterization of the boundedness of positive operators in a filtered measure space*, preprint, arXiv:1210.3924.
- [34] Weis, L. *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal  $L^p$ -regularity*, Math. Ann. **319** (2001), 735–758.