

衝撃波の伝播について

北大 理 大 野 陽 朗

§ 1. 序

天体の現象には、爆発に伴う衝撃波によると見られるものが非常に多い。太陽面のフレア、新星、超新星の出現、銀河系中心の膨脹などがそれである。

天体の構造と進化を研究するとき、これらの爆発—不安定—の原因が問題であるが、これを現象—観測—と結びつけるためには、爆発によって生ずる衝撃波の伝播機構を調べる必要がある。

天体での衝撃波の伝播で重要なのは、主として次の2点にある：

i) 伝播の媒質が均質と見られないこと。すなわち、伝播に際して、媒質の密度、圧力変化を無視できないこと。

ii) 輻射の影響が大きいこと。

こゝでは、主としてi)の問題を論ずるのであるが、ii)は、

本研究会の主題に沿うものであるので、一言ふれて置こう。
これについては、a) 輻射エネルギー（または圧力）の影響と
b) 輻射損失の問題があり、多くの研究がなされている。 a)
としては、例えば、強い衝撃波面の後が輻射平衡にあると見
てよい場合（星の内部など）には、輻射エネルギーのために、温
度の上昇が抑えられることが分っている。¹⁾ b) は波面前方媒
質の光学的厚さが薄い場合（星の表面、星間物質など）に重
要となり、直接観測と関係するものである。これは、厳密
には運動気体での輻射輸送と気体力学の方程式を連立させて
解くべきものであるが、その方向に沿って種々の試みがなさ
れている。²⁾

さて、均質媒質中での衝撃波の伝播に関しては、Similarity
Solution, Brinkley-Kirkwood の方法を始めとして、多くの
試みがあり、非均質媒質に対する拡張も或る程度行なわれて
いる。こゝでは、Chisnell の方法を拡張して我々の展開
した Quasi-Stationary の方法による一般的結果を、
Weak-shock limit としての Geometrical Acoustics と
の関連で述べる。

§2. Geometrical Acoustics.

非均質媒質中の音波の伝播については、

波長 $\ll$ 媒質の状態変化のスケール

の局限に於て、いわゆる Geometrical Acoustics の成り立つことはよく知られている。

このとき、音波の ray path は屈折の法則

$$c/\sin\theta = \text{const} \quad (2.1)$$

によって定められる。但し c は各点での音速であり、 θ は入射角、すなわち、媒質の状態変化の勾配と入射音波の方向の間の角である。

各時刻に於ける波面は、その時刻の各 ray に垂直な面として定めることができる。

一方、音波の強さすなわち単位面積を通過して単位時間に運ばれるエネルギー (energy flux) は

$$F = \overline{\Delta p \Delta u} \quad (2.2)$$

で定められる。但し、 Δp 、 Δu はそれぞれ波面の前後に於ける圧力と速度の差 (jump) を表わしている。

音波の伝播と共にこの強さがどのように変るか？については、Keller³⁾ 等の Weak shock limit での研究がある。これによれば、微小 ray tube の直断面を δS として、ray tube に沿つて

$$F \delta S = \text{const.} \quad (2.3)$$

となる。これは、反射波のエネルギーを2次の微小量として無視したエネルギー保存則に他ならない。

以上のようにして、音波—weak shock limit—では、先ず ray path (と波面) が (2.1) によって求められ、これから δS を計算することによって強さが定まるわけである。

§3. 衝撃波への拡張

Geometrical Acoustics の方法を一般の有限な jump を有する衝撃波に拡張することを考えて見よう。まず、屈折の法則(2.1)はこの場合

$$U/\sin\theta = \text{const} \quad (3.1)$$

となる。ここで U は衝撃波の伝播速度である。問題は、音速 c が媒質の各点で予めその状態によって決められて居たのに対し、 U は衝撃波の強さによって異なり、予め決めることはできないことである。従ってこの場合、ray path (波面) を定めるためには、強さの変化を定める式 (2.3) に相当する式) を同時に考慮しなければならない。これが衝撃波の伝播の取扱いを困難にする所以である。この問題を解くために、比較的弱い shock の仮定を用いたり (例えば Whitham⁴⁾)、jump の仕方仮定を置いたり (Kompaneets⁵⁾) いろいろの試みがなされている。

ところで、衝撃波の場合の energy flux は、(2.2)を拡張した

$$F = \frac{p_2}{\rho_1} \Delta p \Delta u \quad (3.2)$$

で与えられる。但し、 ρ_1 は波面前の媒質の密度である。尚、Rankine-Hugoniot の式と媒質の状態方程式を用いて、 F は波面前後の圧力比 $Z = \frac{p_2}{p_1}$ 及び ρ_1 によって表すことができる。jump の大きさ Z をふつう shock の強さと呼んでいるが、energy flux (波面の前方に新たに energy を与え得る能力) F を shock の強さと呼ぶのが適当であろう。注意すべきことは下に示すように jump の大きさ Z と shock の強さ F のふるまいは無関係なものである。

さて、音波の場合のエネルギー保存の式(2.3)は一般の衝撃波の場合には(3.2)を用いても成り立たない。この場合も、反射波のエネルギーは無視されるが、有限な jump を持つ衝撃波が伝播する場合、媒質に有限な速度を与え、また媒質に働らく重力に対して仕事をするために透過波のエネルギーが失われて行くためである。実際いま、 $p_1 \propto \rho_1^{\gamma}$ で与えられるポリトロプ理想気体大気 Layer に normal に入射する平面波を考える。このとき weak shock $Z-1 \ll 1$ では

$$F \propto p_1^{\frac{3k-1}{2k}} (Z-1)^2$$

であり, 計算によれば,

$$Z-1 \propto p_1^{-\frac{3k-1}{4k}}$$

となるので, 上のように

$$F = \text{const.}$$

となる。

一方, strong shock $Z \gg 1$ では

$$F \propto p_1^{\frac{3k-1}{2k}} Z^{\frac{3}{2}}$$

であるが, 計算によると

$$Z \propto p_1^{-\frac{\frac{k-1}{k} + 2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{1 + 2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}}$$

(γ は比熱の比)

となるので, 結局

$$F \propto p_1^{\frac{1 - \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{(1 + 2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}})k}}$$

となる。 p_1 の指数は, $1 < \gamma, k < 2$ から一般に正であるので, F は p_1 の減少 (上に行く) に従って減少する。⁶⁾

このようにして, shock の強さ, または jump の大きさを定めるためには, 別の考察が必要になるわけである。

§4 Geometrical Shock Propagation.

前述のように， Σ と F のふるまいは直接関係はないが，各点での媒質の状態を用いて F を求めることができるので，伝播による Σ の変化を問題としよう。 Σ の変化を支配するものは，

i) 媒質の状態変化

ii) ray tube の断面積 δS の変化

である*。

前者は，例えば，媒質の圧力減少によって jump の大きさ Σ が増大することを意味している。(Pressure Growing)。また，後者には

a) ray tube そのものゝ広がり(縮み)による Σ の増大(減少)

b) 屈折による断面積の変化

の2種類がある。

われわれは，Chisnellの方法，すなわち，Infinitesimal layer での反射屈折をつみ上げる方法を上述の最も一般的な場合に拡張して，衝撃波の伝播に應ずる Σ の変化を求める式を得た⁷⁾。そしてこれと(3.1)を連立させて，任意の媒質中での任意の強さ，方向の衝撃波の伝播式を得た。これによる伝播を

* この他に，Pulse の広がりによる Σ の減少(Pulse Damping)があるが，こゝでは Quasi Stationary として考えない。

Geometrical Shock Propagation と呼ぼう*。

例えば plane layer (媒質の状態が鉛直方向だけのみの函数) での爆発による衝撃波の場合には(図1) 次のようになる:

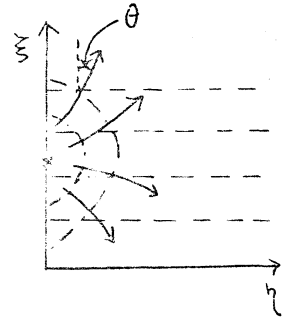


図 1

Shock ray の path を求める式.

$$d\xi = M U dt, \quad (4.1)$$

$$d\eta = \sqrt{1-M^2} U dt. \quad (4.2)$$

但し $M \equiv \cos \theta$.

jump の変化を与える式.

$$dz = f_1(z, M, \xi) M U dt + f_2(z, M) d \ln \delta S \quad (4.3)$$

屈折則(3.1)より

$$f_2(z, M, \xi) = 0. \quad (4.4)$$

これらは, z, M, ξ, η に関する連立方程式であるが, ここで問題は $d \ln \delta S$ である. 幾何学的考察から, これは波面の主曲率半径 R_1, R_2 を用いて

$$d \ln \delta S = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U dt$$

で与えられる⁸⁾. いまの場合

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\delta \theta}{\delta s}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{1-M^2}}{\eta}$$

である(図2). この第1式から分るように, ray path は各々独立に求めることは出来ず, 隣合った ray path との関連に

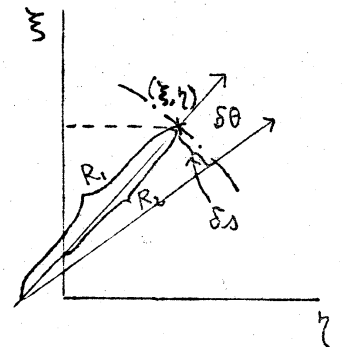


図 2.

* Geometrical Acoustics の拡張の意. 実際 $\varepsilon \rightarrow 1$ で ε は -1 になる.

於いて決まってくる。　えい換えれば, (4.1)~(4.4)は $\Sigma, M,$
 ξ, η の時間 τ についての単純な常微分方程式でなく, 従っ
 て各 Shock ray を独立に求めることは出来ない*。　右の名
 Step $\Delta\tau$ 毎に, 総ての path を同時に求める必要があるの
 ある。

§5. Discussion.

以上の方法は, 星の Eccentric Explosion や太陽面の
 Flare—必要な場合には Magnetic Shock に拡張して一等
 に広汎に用いることが出来るが, その適用には次のような制
 限乃至問題がある。

i) Quasi Stationary の仮定のために, 爆発の energy
 が瞬時に発生する blast wave には厳密には用いられ
 ず Pulse Damping を入れる必要がある。　尤もエネル
 ギー発生から時間が余り経ていない場合には充分よい近
 似となると思われる⁹⁾。

ii) 音波の場合と違って, 衝撃波面の通った後は, 元の媒
 質の状態を本質的に変えて了うと共に, 反射, 屈折のく

*つまり, これらの変数は, 右の他に, Initial の ξ_0, η_0 に
 依存し, 従って, 偏微分方程式系で表わされる。　尤も右が
 大となって波面が広がれば, 断面積の影響は小さくなる。

り返して乱れた状態になっている。従って、この理論では波面の先端の位相と、その直後の瞬時的状態しか推定できない。

iii) θ が, $\theta_c < \theta < 180^\circ - \theta_c$ *

の間では、屈折反射の regular pattern が存在せず、従って上の方法では解が存在しない。¹⁰⁾ 壁による反射での Mach Pattern に相当するものを研究する必要がある。

終りに、本研究室の坂下志郎、石塚俊久(茨城大)、大谷浩の諸氏による熱心な討論に対して感謝します。

(1968, 3. 29)

文 献

- 1) Y. Ôno, S. Sakashita & N. Ohyama, Suppl. Prog. Theo. Phys. No. 20 (1961), 85.
- 2) 例えば, Kaplan, Ueno, Kogure 等の研究.
- 3) J. B. Keller, J. Appl. Phys. 25 (1954), 938.
- 4) G. B. Whitham, J. Fluid Mech. 1 (1956), 290.
- 5) A. S. Kampaneets, Dokl. Akad. Nauk, 130 (1960), 1001.
- 6) Y. Ôno, S. Sakashita & H. Yamazaki, Prog. Theo.

* 理想気体では $\theta_c \sim 63^\circ$.

Phys. 23 (1960), 294.

7) Y. Ôno & T. Ishizuka, Prog. Theo. Phys. に投稿予定.

8) 例えば, Kline-Kay, Electromagnetic Theory and

Geometrical Optics (1964) 参照.

9) S. A. Colgate & R. H. White, Ap. J. 143 (1966), 626.

10) T. Ishizuka, Y. Hashimoto & Y. Ôno, Prog. Theo. Phys.

32 (1964), 207.