

Jacobi forms に付随する L-函数について

東大理 村瀬 篤

講演では, Jacobi form に付随する L-函数 (のーつ) を定義し, その解析的性質について述べた。本稿では講演で詳しく触れなかった L-函数の Piatetski-Shapiro & Rallis 型の積分表示 ([PS-R]) を中心に扱う。local factor の具体的な計算については, 現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. Jacobi forms

Jacobi form を扱うには, T. Shintani ([Sh]) により導入された次のような $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\underline{G}$ のアデール群 $\underline{G}_A$ 上の保型形式ととらえるのが便利である。整数 $n \geq 1$, $m \geq 0$ に対し $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $H = H_{n,m}$ を

$$H = M(m, n) \times M(m, n) \times Z_m$$

(ただし, $M(m, n)$ および Z_m は, それぞれ $m \times n$ 次行列 および m 次対称行列 のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数群), 乗法演算を,

$$(\xi, \eta, z)(\xi', \eta', z') = (\xi + \xi', \eta + \eta', z + z' + \xi^t \eta' + \eta^t \xi')$$

により定めるものとする。 H は, two step nilpotent 非代
数群で, "Heisenberg group" と呼ばれる。 H には, n 次

の symplectic 群 $G = G_n = \{g \in GL(2n) \mid {}^t g J_n g = J_n\}$
($J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$) が次のように作用する; $h = (\xi, \eta, z) \in H$,
 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対し,

$$h^g = (\xi', \eta', z + \xi^t \eta' - \xi^t \eta)$$

ただし, $(\xi', \eta') = (\xi, \eta)g = (\xi a + \eta c, \xi b + \eta d)$.

ここで, $\underline{G} = \underline{G}_{n,m} \in$, $H_{n,m}$ と G_n との半直積

$$\underline{G}_{n,m} = H_{n,m} \ltimes G_n$$

により定義する。 $\underline{G}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結非代数群であ

る。 $\underline{G}$ の中心は, $\underline{Z} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{Z}_m\}$ だから,

$m \geq 1$ ならば, $\underline{G}$ は reductive ではない。 $\underline{G}$ は,

$$(\xi, \eta, z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left[\begin{array}{c|c} 1_{m+m} & \begin{matrix} \xi & \eta \\ \eta^t & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1_{m+m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1_m & \xi \\ 0 & I_n \\ \hline 0 & \begin{matrix} I_m & 0 \\ -\xi^t & 1_n \end{matrix} \end{array} \right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} 1_m & 0 \\ \hline a & b \\ \hline 0 & 1_m \\ \hline c & d \end{array} \right]$$

により $Sp(m+m)$ の部分群とみさせる。 Lie 群 $\underline{G}(\mathbb{R})$

のユ=タリ表現 (特に discrete series) については, I. Satake
の研究 ([Sa]) がある。

complex domain $\mathcal{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C}) \ni \mathcal{D} = \mathcal{D}_{R,m}$ とかく。 $\mathcal{H}_n = \{ z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t z = z, \operatorname{Im} z > 0 \}$ は n -次 Siegel 上半空間である。 Lie 群 $\underline{G}(\mathbb{R})$ は、 $\mathcal{D}$ に次のように解析的かつ推移的に作用する：

$$\begin{aligned} \underline{g} \langle \Sigma \rangle &= (g \langle z \rangle, w j(g, z)^{-1} + \xi \cdot g \langle z \rangle + \eta) \\ \text{すなわち } \underline{g} &= (\xi \eta \xi) g \in \underline{G}(\mathbb{R}), \Sigma = (z, w) \in \mathcal{D} \quad z \in \mathcal{H}_n \\ g \langle z \rangle &= (az+b)(cz+d)^{-1}, j(g, z) = cz+d \quad (g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}), \\ & z \in \mathcal{H}_n). \quad G(\mathbb{R}) \text{ における } i1_n \in \mathcal{H}_n \text{ の固定部分群を} \\ K_\infty &= K_{n,\infty} \text{ とかく: } K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}) \mid \alpha + i\beta \in U(n) \right\}. \\ \Sigma_0 &= (i1_n, 0) \in \mathcal{D} \text{ の } \underline{G}(\mathbb{R}) \text{ における固定部分群は} \\ \underline{Z}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty &\text{ に等しい。従って, } \underline{g} \mapsto \underline{g} \langle \Sigma_0 \rangle \text{ は,} \\ \underline{G}(\mathbb{R}) / \underline{Z}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty &\text{ から } \mathcal{D} \text{ の上への diffeomorphism} \\ &\text{ を与える。}\end{aligned}$$

次に、整数 l と m -次半整数正定値対称行列 S に対し、保型因子 $J_{S,l}$ を定義する。 $u, v \in M(m, n)$ に対し、 $S(u, v) = {}^t u S v$, $S[u] = {}^t u S u$ と略記する。
 $\underline{g} = (\xi \eta \xi) g \in \underline{G}(\mathbb{R})$ ($g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$), $\Sigma = (z, w) \in \mathcal{D}$ に対し、

$$\begin{aligned} J_{S,l}(\underline{g}, \Sigma) &= \det j(g, z)^l e \left[-{}^t S \xi \right. \\ &\quad \left. + {}^t S[w] j(g, z)^{-1} c - 2{}^t S(\xi, w) j(g, z)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - {}^t S[\xi] g \langle z \rangle \right] \end{aligned}$$

とかく。 $\equiv \equiv \equiv \quad \varphi(x) = e^{2\pi i x} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (\underline{g}, \underline{Z})$
 $\longmapsto J_{s,l}(\underline{g}, \underline{Z})$ は $\underline{G}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}$ 上の保型因子
 を定める。

最後に, $\equiv$ の保型因子を用いて weight l ,
 index S の holomorphic cusp forms の空間
 $\mathcal{G}_{s,l}$ を定義する。 $\mathbb{Q}$ の T -デリ環を A とかく。

$A/\mathbb{Q}$ の non trivial character χ_A を $\chi_A(x_\infty) =$
 $\varphi(x_\infty)$ ($x_\infty \in \mathbb{R}$) なるものとする。 $Z(A)$ の character
 χ_S を $\chi_S(\gamma) = \chi_A(\pi_S \gamma)$ により定義する。

さらに $\mathbb{K}_f = \prod_{p < \infty} \mathbb{K}_p$ ($\mathbb{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$)
 とかく。 正整数 l に対し, $\mathcal{G}_{s,l}$ を次の条件
 (1.1) — (1.4) をみたす $\underline{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$ -valued function
 f のなす $\mathbb{C}$ -vector space とする。

$$(1.1) \quad f(\pi(\gamma)) \equiv \underline{g} \underline{k} k_\infty \\
= \chi_S(\gamma) \det j(k_\infty, i1_n)^{-l} f(\underline{g}) \\
(\gamma \in Z_A, \underline{g} \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}, \underline{k} \in \mathbb{K}_f, k_\infty \in K_\infty)$$

$Z \in \mathcal{D}$ に対し, $\underline{g}_Z \langle Z_0 \rangle = Z$ なる $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ の元 $\underline{g}_Z$
 を選べ, $F_f(Z) = f(\underline{g}_Z) J_{s,l}(\underline{g}_Z, Z_0)$ とかく。
 条件 (1.1) により $F_f(Z)$ は $\underline{g}_Z$ のとり方によらず Z
 への函数となる。

$$(1.2) \quad Z \longmapsto F_f(Z) \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上正則。}$$

(1.3) f は $\underline{G}_A$ 上有界。

最後の条件を述べるために、いくつか記号を導入する必要がある。 整数 d ($1 \leq d \leq n$) に対し、

$$P(d) = \left\{ \begin{bmatrix} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta \end{bmatrix} \in G_n \mid \begin{array}{l} A \in GL(d) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \end{array} \right\}$$

$$N(d) = \left\{ \begin{bmatrix} 1_d & * & * & * \\ 0 & 1_{n-d} & * & 0 \\ 0 & 0 & 1_d & 0 \\ 0 & 0 & * & 1_{n-d} \end{bmatrix} \in G_n \right\}$$

と置く。 $\{P(d) : 1 \leq d \leq n\}$ は G_n の maximal parabolic subgroups の共役類の代表系をなす。

$N(d)$ は $P(d)$ の unipotent radical である。 さらに

$$H(d) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \in H \mid \eta = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

と置く。 最後の条件 (cuspidal condition) は次の通り。

$$(1.4) \quad \int_{\frac{N(d)_A}{N(d)_\mathbb{Q}}} f(\underline{u} \underline{g}) d\underline{u} = 0 \quad \text{for } \forall \underline{g} \in \underline{G}_A \quad \forall d$$

$$T = T' \cup \dots, \quad \underline{N}(d) = H(d) \cdot N(d).$$

$G_{S, \ell}$ の各元 f を weight ℓ , index S の 正則 Jacobi cusp form と呼ぶ。 $G_{S, \ell}$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元であることが知られている。

§2. Hecke 作用素, L-函数 ([Sh])

$p \nmid \det(2S)$ なる素数 p に対し fix L , $\underline{G}_p = \underline{G}_{\mathbb{Q}_p}$, $\underline{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ etc. と略記する. $\psi_{S,p} \in \psi_S$ の local component とする. $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(\underline{G}_p, \underline{K}_p; \psi_{S,p}) \in$, 次の条件 (2.1), (2.2) をみたす $\underline{G}_p$ 上の $\mathbb{C}$ -valued functions のなる $\mathbb{C}$ -module とする.

$$(2.1) \quad \varphi((\alpha \alpha') \underline{x} \underline{x}') = \psi_{S,p}(\alpha) \varphi(\underline{x})$$

$$(\alpha \in \mathbb{Z}_p, \underline{x}, \underline{x}' \in \underline{K}_p)$$

$$(2.2) \quad \varphi \text{ は modulo } \underline{\mathbb{Z}}_p \text{ で compact な support をもつ.}$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p$ に対し L convolution

$$\varphi_1 * \varphi_2(\underline{x}) = \int_{\underline{\mathbb{Z}}_p \backslash \underline{G}_p} \varphi_1(\underline{x} \underline{z}^{-1}) \varphi_2(\underline{z}) d\underline{z}$$

により積を定めることにより, $\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}$ -algebra となる.

$$\underline{N} = \left\{ (\alpha \eta_0) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} * & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n), \right.$$

$$\left. X \in \mathbb{Z}_n \right\},$$

$$\underline{I} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_n & \\ & & & t_1^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t_n^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

とあり, $d\underline{x} \in \underline{N}_p$ の Haar measure なる

$$\int_{\underline{N}_{\mathbb{Z}_p}} d\underline{n} = 1$$

なることを示す。さらに $t \in T_p$ に対し,

$$\delta_{\underline{N}}(t) = d(t\underline{n}t^{-1})/d\underline{n}$$

により $\underline{N}$ の module $\delta_{\underline{N}}$ が定義される。 $\varphi \in \mathcal{H}_p$,

$t \in T_p$ に対し

$$\widehat{\varphi}(t) = \delta_{\underline{N}}^{-\frac{1}{2}}(t) \int_{\underline{N}} \varphi(\underline{n}t) d\underline{n}$$

とあるとき, $\widehat{\varphi}$ は T_p 上 compactly supported である。

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\pi\lambda = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & & & \\ & p^{\lambda_2} & & \\ & & p^{\lambda_3} & \\ & & & p^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in T_p$$

とある。 $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し

$$F_{\varphi}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(\pi\lambda) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

とあるとき, $F_{\varphi} \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ である。

$1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ に対し, $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ の
自己同型 σ_{ij}, τ_k は

$$\sigma_{ij}(X_l) = \begin{cases} X_j & l=i \\ X_i & l=j \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tau_k(X_l) = \begin{cases} X_k^{-1} & l=k \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定め, σ_{ij}, τ_k たちで生成される $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$

の自己同型群 Σ , W とかく。 とき F_φ は, W -不変
(i.e. $F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$) である。

Proposition 1 (Satake 同型) 写像 $\varphi \mapsto F_\varphi$
は, $\mathcal{X}$ から $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W \hookrightarrow \mathbb{C}$ -algebra と
しての同型を与える。

$\chi \in \text{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ ($T_p^\circ = T_{\mathbb{Z}_p}$) に対
して, $\underline{\mathbb{Q}}_p$ 上の函数 ϕ_χ を

$$\phi_\chi((\alpha \beta \gamma) \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) =$$

$$\chi_{S,p}(\beta) \chi \cdot \partial_N^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \Phi(\gamma)$$

$$(\beta \in \mathbb{Z}_p, \alpha \in \mathbb{N}_p, t \in T_p, \gamma \in M_{nn}(\mathbb{Q}_p), \delta \in \mathbb{K}_p)$$
 により定める。 ただし Φ は $M_{nn}(\mathbb{Z}_p)$ の特性函数。

$\underline{\mathbb{Q}}_p$ の“帯球函数” ω_χ を,

$$\omega_\chi(\underline{g}) = \int_{\mathbb{K}_p} \phi_\chi(\underline{k} \underline{g}) d\underline{k} \quad (\underline{g} \in \underline{\mathbb{Q}}_p)$$

により定義する。 とき $\mathbb{K}_p$ の Haar measure $d\underline{k}$ は
 $\int_{\mathbb{K}_p} d\underline{k} = 1$ により正規化する。 とき, 次が
 成立する。

Proposition 2

$$(i) \quad \omega_X((003) \underline{k} \underline{g} \underline{k}') = \psi_{S,p}(3) \omega_X(\underline{g})$$

$$3 \in \mathbb{Z}_p, \underline{k}, \underline{k}' \in \mathbb{K}_p, \underline{g} \in \mathbb{G}_p$$

$$(ii) \quad \omega_X(1) = 1$$

$$(iii) \quad \varphi \in \mathcal{A} \text{ に対し,}$$

$$\varphi * \omega_X = \hat{\omega}_X(\varphi) \cdot \omega_X$$

$$\text{ただし, } \hat{\omega}_X(\varphi) = F_\varphi(x_1^{-1}(p), \dots, x_n^{-1}(p))$$

$$\left(= \text{すなわち } \chi \left(\begin{smallmatrix} t_1 & & & \\ & t_n & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_n^{-1} \end{smallmatrix} \right) = \chi_1(t_1) \cdots \chi_n(t_n) \text{ である} \right)$$

Proposition 3

$\varphi \mapsto \hat{\omega}_X(\varphi)$ は, $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism を与える。逆に $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への任意の $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism は, $\hat{\omega}_X(\chi$ ($\chi \in \text{Hom}(\mathbb{T}_p/\mathbb{T}_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$)) の形にかける。

$\mathcal{A}_p$ は convolution により, $G_{S,e}$ に作用する。この作用は, $G_{S,e}$ の自然な計量に関し正規であり, また, Proposition 1 により $\mathcal{A}_p$ は可換だから, $G_{S,e}$ の基底として, $\bigotimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{A}_p$ の同時固有函数からなるものがとれる。 $f \in G_{S,e}$ が $\mathcal{A}_p(p \nmid \det(2S))$ の同時固有函数であるとする:

$$f * \varphi = \lambda_{f,p}(\varphi) \cdot f \quad (\varphi \in \mathcal{A}_p, \lambda_{f,p}(\varphi) \in \mathbb{C}).$$

$\varphi \mapsto \lambda_{f,p}(\varphi)$ は, $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism である Proposition 3 より,

$$\lambda_{f,p}(\varphi) = \widehat{\omega}_{\chi_{f,p}}(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{A}_p$$

なる $\chi_{f,p} \in \text{Hom}(T_p/T_p^0, \mathbb{C}^\times)$ が存在する. $\chi_{f,p}$ に対応する $\mathbb{Q}_p^\times$ の character を $\chi_{f,p}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$) とし,

$$L_p(s, f) = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{f,p}^{(i)}(p) p^{-s})^{-1} (1 - \chi_{f,p}^{(i)}(p)^{-1} p^{-s})^{-1}$$

と置く.

$$L(s, f) = \prod_{p \nmid \text{ord}(2s)} L_p(s, f)$$

が, 我々の考察の対象とする f の L -函数である.

§3. Orbit decomposition

$W = \mathbb{Q}^{4n+2m}$ (横ベクトル上の空間と考える) 上の行列

$$J_W = \left[\begin{array}{cc|cc} \overset{m}{0} & \overset{2n}{J_n} & \overset{m}{1_m} & \overset{2n}{0} \\ \hline -1_m & 0 & 0 & -J_n \end{array} \right] \quad \text{により定まる非退化歪対称}$$

形式 $\langle, \rangle_W$ に関する symplectic 群 G^* とする:

$$G^* = \left\{ g^* \in GL(4n+2m) \mid \langle Wg^*, W'g^* \rangle_W = \langle W, W' \rangle_W \right. \\ \left. \forall W, W' \in W \right\}.$$

$\mathcal{A}$ を, $\langle, \rangle_W$ に関する W の maximal isotropic $\mathbb{Q}$ -subspace のなす集合とする. $G_{\mathbb{Q}}^*$ は, $\mathcal{A}$ に (右から) 推移的に作用する. $e_i = (0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0)$ ($1 \leq i \leq 4n+2m$) を, W の basis

とする。 $L_0 \ni e_i (1 \leq i \leq m), e_i + e_{i+m} (m+1 \leq i \leq m+2n)$ で張られる W の部分空間とすると, $L_0 \in \mathcal{X}$. L_0 の G_Q^* における固定部分群を P_Q^* とすると, P^* は G^* の maximal parabolic subgroup で, その Levi subgroup は $GL(2n+m)$ と同型であり, $\mathcal{X}$ と $P_Q^* \backslash G_Q^*$ は G_Q^* の作用する均質空間として同一視される.

$$\underline{g} = (\tilde{z} \eta z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \underline{g}' = (\tilde{z}' \eta' z') \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \underline{G}$$

に対し,

$$2(\underline{g} \times \underline{g}') = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} m & n & n & m & n & n \\ 1_m & \tilde{z} & \eta & \tilde{z} & \tilde{z}' & \eta' \\ 0 & 1_n & 0 & {}^t \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & -{}^t \tilde{z} & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} m & n & n & m & n & n \\ 1_m & & & & & \\ a & b & & & & 0 \\ c & d & & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & 1_m & 0 & 0 \\ & & & {}^t \eta & 1_n & 0 \\ & & & {}^t \tilde{z}' & 0 & 1_n \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & 1_m & & \\ & & & a' & b' & \\ & & & c' & d' & \end{matrix} \end{array} \right]$$

$$(\tilde{z} = z - z' - \eta {}^t \tilde{z} + \eta {}^t \tilde{z}')$$

とみると, 2 は $\underline{G} \times \underline{G}$ から G^* への準同型写像を定める. 明らかに, $\text{Ker } 2 = \underline{Z}^d = \{(00z) \times (00z) \mid z \in Z_m\}$. $m=0$ のときは, 2 は $[PS-R]$ で与えられる $Sp(m) \times Sp(m)$ から $Sp(2n)$ への embedding に一致している. $\underline{G}_Q \times \underline{G}_Q$ は, 2 を通じて $\mathcal{X}$ に作用する.

この節の目標は, $\mathcal{X}$ の $\underline{G}_Q \times \underline{G}_Q$ -orbit decomposition を求め, 各 orbit の代表 L に対し,

$\underline{G}_a \times \underline{G}_a$ における 固定部分群

$$\underline{P}(L)_a = \left\{ \underline{g} \times \underline{g}' \in \underline{G}_a \times \underline{G}_a \mid L \cdot \underline{z}(\underline{g} \times \underline{g}') = L \right\}$$

の構造を調べる ことである。 $L, L' \in \mathcal{L}$ に対し、
 L, L' が 同じ $\underline{G}_a \times \underline{G}_a$ -orbit に属するとき $L \sim L'$
 とかく。

$$W_1 = \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{m+2n} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

とおく。 $L \in \mathcal{L}$ に対し 二つの "不変量" を次のように
 定義する。

$$K_1(L) = L \cap W_1$$

$$K_2(L) = \dim(L \cap W_2) - \dim(L \cap W_1),$$

ただし L, W_1 と $\mathbb{Q}^m$ を自然に同一視し、 $K_1(L) \in \mathbb{Q}^m$
 の $\mathbb{Q}$ -subspace のなす集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^m)$ の元とみる。 実際、
 $0 \leq K_2(L) \leq n$ であることがわかる。

$$\text{明らかに } K_1(L_0) = \{0\}, \quad K_2(L) = 0.$$

このとき、次のことが証明される。

Proposition 4 $L, L' \in \mathcal{L}$ に対し

$$L \sim L' \iff K_i(L) = K_i(L') \quad i=1, 2.$$

$\mathbb{Q}^m$ の subspace $U \in \mathcal{E}$, W の subspace
 とみなし, $U' \in \mathcal{E}$, $\langle, \rangle_W$ に関する U の直交補空間,
 $U^\perp = U' \cap \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} e_i$ とおく. 整数 d ($0 \leq d \leq n$) と,
 $U \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}^m)$ に対し, $U, U^\perp, e_{m+n+i}, e_{2m+3n+i}$
 $(1 \leq i \leq d)$ と $e_{m+j} + e_{2m+2n+j}, e_{m+n+j} + e_{2m+3n+j}$
 $(d+1 \leq j \leq n)$ で張られる W の subspace $\in L_{U,d}$ と
 かく. $\mathcal{E}$ 上 $L_{U,d} \in \mathcal{E}$ として, $K_1(L_{U,d}) = U$,
 $K_2(L_{U,d}) = d$.

Cor $\mathcal{E}$ の $\underline{G}_{\mathbb{Q}} \times \underline{G}_{\mathbb{Q}}$ -orbit decomposition
 の代表系として $\{ L_{U,d} \mid U \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}^m), 0 \leq d \leq n \}$
 をとる事ができる.

次の節で必要になる $\underline{\mathcal{P}}(L)$ の構造を調べよう.
 Cor. より $L = L_{U,d}$ の場合だけ調べれば十分である.

Lemma 1 $\underline{\mathcal{P}}(L_{\{0\},0}) = \underline{G}^d = \{ \underline{g} \times \underline{g} \mid \underline{g} \in \underline{G} \}$

Lemma 2 $\underline{\mathcal{P}}(L_{\{0\},d}) = \mathcal{H}(d) \underline{\mathcal{P}}(d) \quad d \geq 1$
 に対し,

$$\mathcal{H}(d) = \{ (\xi \eta \xi) \times (\xi' \eta' \xi') \in H \times H \mid$$

$$\xi = \xi', \quad \xi_i = \eta'_i = 0 \quad (1 \leq i \leq d),$$

$$\xi_j = \xi'_j, \quad \eta_j = \eta'_j \quad (d+1 \leq j \leq n) \}$$

($\xi_i, \dots$ は $\xi, \dots$ の第 i 行)

$$P(d) = \left\{ \begin{pmatrix} \overset{d}{A} & \overset{n-d}{*} & \overset{d}{*} & \overset{n-d}{*} \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ 0 & \delta & * & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overset{d}{A'} & \overset{n-d}{0} & \overset{d}{0} & \overset{n-d}{0} \\ * & \alpha & * & \beta \\ * & * & {}^t A'^{-1} & * \\ * & \delta & 0 & \delta \end{pmatrix} \mid \right.$$

$$\left. A, A' \in GL(d), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \right\}$$

特に, $\underline{P}(L_{\{0\}, d})$ は

$$\underline{N}(\{0\}, d) = \mathcal{H}(d) \cdot (N(d) \times {}^t N(d))$$

を normal subgroup とし得る。

一般に $U \neq \{0\}$ のときは $\underline{P}(L_{U, d})$ の構造は複雑であるが, 我々の目的のためには次で十分である。
 $\mathbb{Q}^m$ の subspace U に対し, $\hat{U} = \{x \in \mathbb{Q}^m \mid x^t U = 0\}$
 $Z(U) = \{z \in Z_m \mid \hat{U} \cdot z \subset U\}$ とおく。

Lemma 3 $\underline{P}(L_{U, d})$ は $U \neq \{0\}$ のとき,

$$\underline{N}(U, d) = \{(00z) \times 1 \mid z \in Z(U)\}$$

を normal subgroup とし得る。

§4. Basic identity

$N^* \in P^*$ の unipotent radical とする。

$p^* \in P_A^*$, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\delta_{P^*}^s(p^*) = [d(p^* n^* p^{*-1}) / dn^*]^s$$

(dn^* は N_A^* の Haar measure) とする。 $\varphi \in G_A^*$

上の $\mathbb{C}$ -valued function で $\varphi(p^* g^*) = \delta_{P^*}^s(p^*)$

$\cdot \varphi(g^*)$ ($p^* \in P_A^*$, $g^* \in G_A^*$) をみたすものとする。

$\operatorname{Re} s \gg 0$ で、 f は "よい" 函数ならば Eisenstein 級数

$$(4.1) \quad E(g^*; \varphi) = \sum_{x^* \in P_{\mathbb{Q}}^* \backslash G_{\mathbb{Q}}^*} \varphi(x^* g^*)$$

は 絶対収束し、 $G_{\mathbb{Q}}^* \backslash G_A^*$ 上 slowly increasing な 函数

を定める。 $\mathcal{C} \in \mathbb{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$ -valued smooth function で

$$(4.2) \quad f(\underline{x} \underline{g}(\alpha \beta)) = \psi_s(\beta) f(\underline{g}) \quad \underline{x} \in \mathbb{G}_{\mathbb{Q}}, \beta \in \mathbb{Z}_A$$

$$(4.3) \quad f \text{ は } \mathbb{G}_{\mathbb{Q}} \backslash \mathbb{G}_A \text{ 上 rapidly decreasing}$$

$$(4.4) \quad \int_{\underline{N}^d(\mathbb{Q}) \backslash \underline{N}^d_A} f(\underline{u} \underline{g}) d\underline{u} = 0 \quad \underline{g} \in \mathbb{G}_A$$

が 任意の $1 \leq d \leq n$ にも成立

をみたすもののなす空間とする。 $\varphi \in \mathcal{C}$ に対し、convolution

$$I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A \times \underline{G}_A \setminus \underline{G}_A \times \underline{G}_A} E(\iota(\underline{g} \times \underline{g}'); \varphi) \\ f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}'$$

を考える。定義 (4.1) より

$$I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A \times \underline{G}_A \setminus \underline{G}_A \times \underline{G}_A} \sum_{\gamma^* \in P_A^* \setminus G_A^* / U(\underline{G} \times \underline{G})_A} \\ \sum_{\xi^* \in \gamma^{*-1} P_A^* \gamma^* \cap U(\underline{G} \times \underline{G})_A \setminus U(\underline{G} \times \underline{G})_A} \varphi(\gamma^* \xi^* \iota(\underline{g} \times \underline{g}')) \\ \times f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}' .$$

対応 $\gamma^* \mapsto L_0 \gamma^*$ は, $P_A^* \setminus G_A^* / U(\underline{G} \times \underline{G})_A$ と, $\sim$ との同値関係を定め, 2つは $\iota(\underline{P}(L_0 \gamma^*)) = \gamma^* P_A^* \gamma^{*-1} \cap U(\underline{G} \times \underline{G})_A$ である。今 $L \in \mathcal{L}$ に対し, $L = L_0 \gamma_L^*$ なる $\gamma_L^* \in G_A^*$ 存在する。

$$I(\varphi; f) = \sum_{L \in \mathcal{L}/\sim} I_L ,$$

$$I_L = \int_{\underline{P}(L)_A \setminus (\underline{G} \times \underline{G})_A} \varphi(\gamma_L^* \iota(\underline{g} \times \underline{g}')) f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}' .$$

(I_L は L の同値類に依存しない)。

$L = L_0$ のとき, $\underline{P}(L) = \underline{G}^d$ なることは容易,

$$I_{L_0} = \int_{\underline{G}_A} \varphi(L(\underline{g} \times 1)) \Omega(\underline{g}; f) d\underline{g},$$

ただし

$$\Omega(\underline{g}; f) = \int_{\underline{G}_Q \backslash \underline{G}_A} f(\underline{x} \underline{g}^{-1}) \overline{f(\underline{x})} d\underline{x}.$$

$L \sim L_0$ ならば, $L = L_{U,d}$, $(U,d) \neq (\{0\}, 0)$ としてよい。このとき $\underline{P}(L)$ は Lemma 2.3 で定めた $\underline{N}(U,d)$ は normal subgroup として, I_L の積分は

$$J = \int_{\underline{N}(U,d)_Q \backslash \underline{N}(U,d)_A} f(\underline{n} \underline{g}) \overline{f(\underline{n}' \underline{g}')} d\underline{n}^*$$

($\underline{n}^* = \underline{n} \times \underline{n}' \in \underline{N}(U,d)_A$) を通す, $U \neq \{0\}$ のときは上の積分 J が更に

$$\int_{\underline{N}_Q^d \backslash \underline{N}_A^d} f(\underline{n} \underline{g}) d\underline{n} = 0$$

を通すことから (4.4) により $I_L = 0$. $U \neq \{0\}$ のときは, J が

$$\int_{Z(U)_Q \backslash Z(U)_A} \psi_S(z) dz$$

を通し, さらには ψ_S が $Z(U)_A$ 上 nontrivial であること ($S > 0$ からの帰結) から $I_L = 0$ を得る。

まとめると

Proposition 5 (Basic identity)

$$(4.5) \quad I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A} \varphi(L(\underline{g} \times 1)) \Omega(\underline{g}; f) d\underline{g}$$

最後に, basic identity の Jacobi form の
L-函数の理論への応用について大ざっぱに述べる。

$G_{S, \ell} \subset \mathcal{C}$ であるから weight ℓ , index S の
Jacobi form f に対して (4.5) を適用できる。

$f \in G_{S, \ell} \ni \otimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$ の同時固有函数とす
ると §2 の最後に述べたことから $\Omega(\underline{g}; f)$ は
帯球函数 $\omega_{\chi_{f, p}}(\underline{g}_p)$ たちの積に分解する。従っ
て φ を分解型 ($\varphi(g^*) = \prod_v \varphi_v(g_v^*)$ $g^* = (g_v^*)$
 $\in G_A^*$) にとれば (4.5) の右辺はある Euler 積に分解
する。 K^* を適当な G_A^* の compact subgroup とし、
 $\varphi_S(p^* k^*) = \delta(p^*)^S$ ($p^* \in P_A^*$, $k^* \in K^*$) の
形にとれば (実際は ∞ -成分を少し変更する必要があ
る), good prime p ($p \nmid \det(2S)$) における
Euler 積の local factor を計算するに役立つ。
これは $L_p(s, f)$ における elementary factor を与える

ものになる。一方, Eisenstein 級数の理論 (Langlands) により, (4.5) の左辺は, S の函数として全平面に解析接続され, ある函数等式を持つ。これにより, f に付随する L -函数 $L(s, f)$ の解析的性質に関して情報が得られる。この方法によって満足すべき結果が得られるのは, 最初に固定した S が各素数 p に対し, 次の二条件 (4.6) $_p$, (4.7) $_p$ をみたすことである:

$$(4.6)_p \quad \mathbb{Q}_p^m \text{ の lattice } L_1 \text{ で } L_1 \supset L = \mathbb{Z}_p^m \\ \text{かつ } "x \in L_1 \Rightarrow S[x] = {}^t x S x \in \mathbb{Z}_p" \text{ ならば} \\ L_1 = L$$

(4.6) $_p$ の下で

$$L' = \{ x \in \mathbb{Q}_p^m \mid x \in (2S)^{-1}L, \text{ 且 } S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は $\mathbb{Q}_p^m$ の lattice で $L \subset L' \subset p^{-1}L$ 。今,

$$\partial_p(S) = \dim_{\mathbb{F}_p} (L'/L) \quad \text{と} \quad \partial_p(S) \leq 2 \quad \text{が知られる。}$$

$$(4.7)_p \quad \partial_p(S) = 0 \quad (\text{即ち } L' = L)$$

§2 で述べたこと (Satake 同型の存在) はこの場合にまで成立し, $L(s, f)$ の解析接続, 函数等式等が証明される。($\partial_p(S) = 1$ のときは Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ は可換であるが Satake 同型は存在しない。 $\partial_p(S) = 2$ のときは一般に $\mathcal{H}_p$ は可換でなない)

$m=1$, $S=(1)$ の場合 $(4.6)_p$, $(4.7)_p$ は $\forall p$ に
 対し成立する, この場合 $f \in \mathbb{G}_{S, \ell}$ は vector valued
 の半整数ワイト $(\ell - \frac{1}{2})$ の Siegel modular form
 と同一視される.

最後に付したが Shintani は [Sh] においてまったく
 別の興味深い方法で Jacobi form の L-函数の研究
 を創めている. $m=1$ のときは 菅野孝史 氏が [Sh]
 で未解決だった部分も含めて証明を復元している.
 本稿の §1.2 は [Sh] に多く依っていることを付言し
 たい.

Reference

- [PS-R] I. Piatetski-Shapiro & S. Rallis
 "L-functions of automorphic forms on simple classical groups", in "Modular forms" ed. by R.A. Rankin, Halsted Press, 1984, 251-261.
- [Sa] I. Satake
 「ある群拡大と $z=4$ の表現について」
 数学, 21 (1969) 241-253
- [Sh] T. Shintani unpublished notes