

有理関数近似について

茨城大 理 林 実樹広

複素平面 $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K 上の関数 f を多項式や有理関数で近似する問題は古くから考えられている。連続関数 f の多項式による一様近似は Mergelyan によって、有理関数による一様近似は Vitushkin によってその特徴付けが与えられた。その後、uniform algebra の理論の発展とありまって、平面上の analytic 関数の作る algebra の研究が進み、とりわけ Gamelin, Garnett, Davis 等により有界正則関数の近似に関しても Vitushkin の結果と同様の formulation が行なえることが示された。これらの議論は Operator T_p に関して不変な algebra については統一的に取り扱うことが出来るが、なお細部においてこの統一を妨げる問題点が残っている。途中残された問題点について整理しながら、ここでは有理関数を中心とした近似問題を述べる。平面上の uniform algebra についての Gamelin 自身による解説 [7] はよく整理されているので参照された。

§ 1 平面上の uniform algebra

平面上の uniform algebra の例を上げながら話を進める。 K は平面のコンパクト集合, $C(K)$ により K 上の複素数値連続関数の全体を表わすことにして, $f \in C(S^2)$ ($S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) のうち K 上に一様に有理関数で近似されるもの全体を $R(K)$ とおくと, 有理関数近似は

問題 A $f \in R(K)$ の特徴付け

である。Vitushkin は continuous analytic capacity α (後述) を用いて次のように特徴付けた。

定理 1.1 $f \in C(S^2)$ に対して, 定数 $r \geq 1$ 及び $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$)

があり, 次の条件をみたす: $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall \delta > 0$ に対して,

ϕ が $\Delta(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ に台をもつ C^1 関数ならば

$$(IR) \quad \left| \iint f(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \right| \leq \delta \alpha(\delta) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\| \alpha(\Delta(z_0, \delta) \setminus K)$$

このとき, $f \in R(K)$. 逆に, $f \in R(K)$ ならば $\alpha(\delta) = 2\pi \sup \{ |f(z_1) - f(z_2)| \mid z_1, z_2 \in \Delta(z_0, \delta) \}$ として上の不等式が成立する。

具体的な関数 f に対して上の不等式を満たすようなコンパクト集合 K を見出すことはほとんど不可能である。そのため, 開集合 $U \subset S^2$ に対して

$$A(U) = \{f \in C(S^2) \mid f \text{ は } U \text{ 上 analytic}\}$$

とする。 $R(K) \subseteq A(K^0)$ は明らかである。 $f \in A(K^0)$ という条件は実際に容易に確かめられるので

問題 B $R(K) = A(K^0)$ とする K を求める.

ことは応用上意味がある. $f \in A(U)$ とする関数の特徴付けは,

(I_R) を

$$(I_A) \quad \left| \iint f(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \right| \leq \delta a(\delta) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\| \alpha(\Delta(z_0, r\delta) \setminus U)$$

で置き換えればそのまゝ成立する. これより次の定理が系として得られる.

定理 1.2 次は同値である.

(i) $A(K^0) = R(K).$

(ii) 定数 $c > 0$, $r > 0$ があって

$$\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus K^0) \leq c \alpha(\Delta(z, r\delta) \setminus K) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C}, \forall \delta > 0.$$

(iii) 任意の有界開集合 D に対して, $\alpha(D \setminus K^0) = \alpha(D \setminus K).$

[注] 条件の (iii) はもっと弱く, 各点 $z \in \mathbb{C}$ に対してある $r \geq 1$ が存在して,

$$(iv) \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus K^0)}{\alpha(\Delta(z, r\delta) \setminus K)} < \infty$$

としても同値になる. この条件は, 各点 $z \in \mathbb{C}$ ごとに確かめればよく, 実際上便利である.

D が連結な開集合であれば, D の直径を $\text{diam}(D)$ とし,

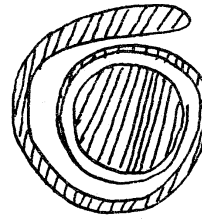
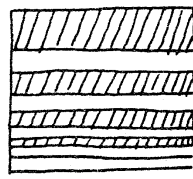
$$\alpha(D) \leq \text{diam}(D) \leq 4 \alpha(D)$$

が成立する. これより古典的に Mergelyan, Lavrent'ev の定理がただちに得られる.

定理 1.3 K を平面のコンパクト集合で, $\mathbb{C} \setminus K$ は連結とする

(i) (Mergelyan) $f \in A(K^0)$ は
 K 上多項式により一様近
 似される.

$C(K)$: 連続関数の例. 四部 K



(ii) (Lavrent'ev) $K^0 = \emptyset$ な

らば, K 上の連続関数は多項式で一様近似される.

§2 Pointwise bounded approximation

ここでは $R(K)$ は K 上の関数に制限して考えることにする.
 一様収束では連続関数の近似しか出ない. リーマン球 S^2
 の開集合 U 上の有界 analytic 関数を有理関数で近似することを
 考える.

$$H^\infty(U) = \{f \mid f \text{ は } U \text{ 上 analytic な有界関数}\}$$

とみる. 関数列 f_n が関数 f に pointwise bounded (pt. b.) に収
 束するということと, 定数 $M > 0$ があつて

$$\|f_n\| \leq M, \quad f_n(z) \rightarrow f(z) \quad \text{for each } z$$

と定義する. とくに, $\|f_n\| \leq \|f\|$ とおいておくと, あるいは,

f_n は f に strongly pt. b. に収束するという.

前節と同様2つの問題が考えられる.

問題 A' $f \in H^\infty(K^0)$ で, $R(K)$ の関数 f_n により (strongly) pt. b.
 近似されるものを特徴付けよ.

問題 B' $R(K)$ が $H^\infty(K^0)$ の中で (strongly) pt. b. dense とは K

を求めよ.

[注] Rungeの定理によれば, $f \in R(K)$ は K の近傍で analytic な関数により K 上一様近似されるものの全体であるから, この問題は, K^0 上で analytic な有理関数 f を, K の近傍で analytic な関数により近似することである.

この種の問題は, O. J. Farrell (1935) に初まる次の定理である.

[定理] 単連結な領域 U で, ∂U が連結な場合には, $f \in H^\infty(U)$ の元は多項式 p_n によつて U 上 strongly pt. b. 近似される.

その後, abstract な拡張を含めて, この定理が多くの人によつて一般化された. 問題 A' の答は定理 4.6 によえることとして, ここでは問題 B' を考える. Vitushkin の方法が応用できることに注目して, 現在のところ Gamelin - Garnett [4] によつて次の結果が得られている.

定理 2.1 平面のコンパクト集合 K に関し、次は同値である.

(i) $R(\partial K) = C(\partial K)$ かつ $R(K)$ は $H^\infty(K^0)$ で pt. b. dense

(ii) 定数 $c > 0$, $r > 0$ があつて

$$\delta(\Delta(z, \delta) \setminus K^0) \leq c \alpha(\Delta(z, \delta) \setminus K) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C}, 0 < \delta \leq r.$$

(iii) 任意の有界開集合 D に対して, $\delta(D \setminus K^0) = \alpha(D \setminus K)$.

(iv) 各点 $z \in \partial K$ に対して, ある $r \geq 1$ が存在して

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta(z, \delta) \setminus K^0)}{\alpha(\Delta(z, r\delta) \setminus K)} < \infty.$$

問題1. この定理において条件 $R(DK) = C(DK)$ を落すことは未解決である. 【難点は, $R(DK) \neq C(DK)$ であって, $R(K)$ が $H^\infty(K^0)$ で pt. b. dense となる場合があるので, 他の条件 (ii) ~ (iv) についても修正しなくてはならない】

この定理の証明には, capacity に関する議論だけでは不十分で, uniform algebra としての $R(K)$ の性質に立ち入る必要がある. とくに次の定理を示す.

定理 2.2 $R(DK) = C(DK)$ かつ $R(K)$ が $H^\infty(K^0)$ で pt. b. dense とする. このとき, $R(K)$ は $H^\infty(K^0)$ で strongly pt. b. dense となり $R(K) = A(K^0)$ となる.

[注] 定理の条件で $R(K)$ が $A(K)$ で pt. b. dense としても $A(K^0) = R(K)$ が示めせる. これは Y. Kobayashi [6] による (なお MR.48 #2774 を参照のこと).

[注] $A(D)$ の $H^\infty(D)$ における pt. b. density については, 条件なしに analytic capacity を用いた完全な特徴付けが定理 2.1 と同じ形で与えられる. このときも, (i) $\Rightarrow$ (ii) 及び (iv) $\Rightarrow$ (i) の証明には定理 2.2 に対応して次の定理を用いる.

定理 2.3 $A(D)$ が $H^\infty(D)$ で pt. b. dense ならば, strongly pt. b. dense である.

以上述べた uniform algebra $R(K)$, $A(D)$, $H^\infty(D)$ の間の関係の証明

には類似点が多く見られる。何らかの形でこれらと一本にまとめることが当然考えられる。これについて次の2つの節で述べる。はじめに analytic capacity の面から、次に strongly pl. b. dense に関して述べる。

§3 $\mathcal{A}$ -capacity

analytic capacity を一般化して次のようにして $\mathcal{A}$ -capacity を定義する。

定義 3.1 $\mathcal{A}$ を リーマン球 S^2 上の有界な Borel 関数からなる algebra とする。このとき、任意の集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\gamma_{\mathcal{A}}(E) = \sup \left\{ |f(\infty)| \mid \begin{array}{l} f \in \mathcal{A} \text{ は } E \text{ のコンパクト部分の外で} \\ \text{analytic で, } f(\infty) = 0, \|f\| \leq 1 \end{array} \right\}$$

例 1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ を リーマン球 S^2 上の有界な Borel 関数で、平面のコンパクト集合の外では analytic なものの 全体 としたとき、 $\gamma_{\mathcal{A}}(E)$ は単に $\gamma(E)$ と書かれ、analytic capacity と呼ばれる。

例 2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cap C(S^2)$ のとき、 $\gamma_{\mathcal{A}}(E)$ は $\alpha(E)$ と書かれ、continuous analytic capacity と呼ばれる。

例 3. $\mathcal{U}$ を有界な開集合として、 $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}_0 \mid f \text{ は } \mathcal{U} \text{ 上 analytic}\}$ とおけば

$$\gamma_{\mathcal{A}}(\Delta(z, \delta)) = \gamma(\Delta(z, \delta) \setminus \mathcal{U}) \quad (\text{右辺は } H^\infty(\mathcal{U}) \text{ に対応する capacity})$$

例 4. $\mathcal{U}$ は同じとして、 $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}_0 \cap C(S^2) \mid f \text{ は } \mathcal{U} \text{ 上 analytic}\}$

$$\gamma_A(\Delta(z, \delta)) = \alpha(\Delta(z, \delta) \setminus U) \quad (\text{右辺は } A(U) \text{ に対応する capacity})$$

例5. K をコンパクト集合として, $\mathcal{A} = \{f \in A_0 \mid f \text{ は } K \text{ の近傍で analytic}\}$ とおけば,

$$\gamma_A(\Delta(z, \delta)) = \gamma(\Delta(z, \delta) \setminus K) = \alpha(\Delta(z, \delta) \setminus K) \quad (\text{右辺は } R(K) \text{ " "})$$

終りの3例より, $\mathcal{A}$ を適当に定めることにより各種 capacity の議論が統一的に進められることがわかる. Vitushkin のう
法が適用されるためには, 次 ^(に示せる) T -不変という概念が必要であ
る.

$f \in S^2$ 上の有界 Borel 関数, ϕ をコンパクトな台をもつ C^1 -級
関数として,

$$\begin{aligned} (T_\phi f)(w) &= \phi(w) f(w) + \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z)}{z-w} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \end{aligned}$$

と定義する.

[T_ϕ の性質]

- 1° ある点列 $z_n, z_n \rightarrow z_0$, に対して $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ ならば $(T_\phi f)(z_n) \rightarrow (T_\phi f)(z_0)$.
- 2° $T_\phi f$ は f の analytic な点 $\mathbb{C}$ 及び $\text{supp}(\phi)$ の外で analytic である.
- 3° $(T_\phi f)(\infty) = 0$, $(T_\phi f)'(\infty) = -\frac{1}{\pi} \iint f(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy$
- 4° $\text{supp}(\phi) \subset \Delta(z, \delta)$ ならば

$$\|T_\phi f\| \leq 2\delta \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\| \omega(f; z, \delta)$$

$$\in E', \quad \omega(f; z, \delta) = \sup \{ |f(z_1) - f(z_2)| \mid z_1, z_2 \in \Delta(z, \delta) \}$$

5° f がコンパクト集合 K の外で analytic, K の近傍で $\phi \equiv 1$ と
 仮定すれば, $f = T_\phi f + f(\infty)$.

定義 3.2 $\mathcal{A}_0$ の subalgebra $\mathcal{A}$ が T -不変とは, $\mathcal{A}$ 上のコンパクトな台をもつ C^1 -級関数 ϕ に対して, $f \in \mathcal{A}$ ならば $T_\phi f \in \mathcal{A}$ とはること.

上で上げた例 1~5 の $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_0$ 上で T -不変である. 又, 1° から
 たとえば, ある slit の左及び右側から連続な f のを求めて f
 T -不変なものを作れる.

定理 3.3 (問題 A 型の答: Danie [3]) $\mathcal{A}$ を T -不変な $\mathcal{A}_0$ の
 subalgebra とする. $f \in \mathcal{A}_0$ に対して定数 c , $r \geq 1$, $\delta_0 > 0$ が
 存在して, g が $\Delta(z_0; \delta)$ に台をもつ C^1 -級関数ならば

$$\frac{1}{\pi} \left| \iint f(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \right| \leq c \delta \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\| \omega(f; z_0, \delta)$$

が $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \delta < \delta_0$ に対して成立つならば, $g_n \in \mathcal{A}$,
 $\|g_n\| \leq M \|f\|$ (M は c, r にのみ関係して定まる定数) が存
 在して,

$$g_n \rightarrow f \quad \text{a.e. } [dx dy].$$

更に, g_n は f の連続点からなるコンパクト集合上では一様に
 f に収束する.

[注] 証明の大筋は Vitushkin の scheme と同じであるが, 細い点
 で微妙である. とくに, $g_n \rightarrow f$ a.e. $[dx dy]$ の部分は [5];

Lemma 10.3] の証明を多少修正して導く。

定理 3.4 (問題 B 型の答; 同上) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を T -不変な $\mathcal{A}_0$ の sub-algebra とする. 定数 $C, r \geq 1, \delta_0 > 0$ が存在して,

$$\delta_{\mathcal{A}_1}(\Delta(z, \delta)) \leq C \delta_{\mathcal{A}_2}(\Delta(z, r\delta)) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C}, 0 < \delta < \delta_0$$

とすれば, 各 $f \in \mathcal{A}_1$ は $\mathcal{A}_2$ の元により前定理の形で近似できる.

[注] この定理を定理 1.1, 定理 2.2 で述べた各点 $z \in \mathbb{C}$ ごとの条件にすることは, pt. b. dense から strongly pt. dense が導びけるために一般には出ない. $\mathcal{A}_1 \subset C(S^2)$, もしくは $\mathcal{A}_2 = A(U)$ の場合にはこの性質がみたされる.

T -不変な subalgebra があまりに一般的のためにその台となる定義域を確定している.

問題 2. pt. b. dense から strongly pt. dense を導びくような適当な条件を付した T -不変 algebra を考え, 既知の場合を含む形で一般論を作る.

§4 Strongly pointwise bounded density

$R(K)$ 及び $A(U)$ を統一的に議論するために T -不変な $C(K)$ の subalgebra を次のように定める.

定義 4.1. K を平面のコンパクト集合とする. $C(K)$ の sub-algebra A が T -不変とは, 任意のコンパクトな台をもつ C^1 級関数

ϕ に対して, $f \in A$ ならば $(T_\phi f)|_K \in A$ となること. ここで, $T_\phi f$ を考えるために f は S^2 上の有界 Borel 関数としての ϕ べての延拓を許すことになる.

[註] A が T -不変な $C(K)$ の subalgebra で uniformly closed ならば " $R(K) \subset A$ " が示される.

T -不変な algebra の例としては, $R(K)$, $A(U)$ の他にも幾つか知られている. たとえば, E を有界な Borel 集合, E のコンパクト集合の外では 0 となる有界 Borel 関数 h に対して,

$$f(w) = \iint \frac{h(z)}{z-w} dx dy$$

は連続である. このよる関数の $\bar{E}$ 上の uniform closure を $R(E)$ とすると, $R(E)$ は $C(\bar{E})$ の T -不変な subalgebra となる. [algebra となることは, $\hat{\mu}(w) = \int \frac{1}{z-w} d\mu(z)$ となること, $\alpha = \hat{\mu} \vee \hat{\nu}$ となれば $\hat{\alpha} = \hat{\mu} \hat{\nu}$ となることから従う].

$A \in C(K)$ の T -不変な subalgebra として,

$$A = \{ f \in C(S^2) \mid f|_K \in A, f \text{ は } \infty \text{ 点の近傍で analytic} \}$$

とおけば, A は T -不変となる. これより α -capacity α を定数する. 前節の定理により次が得られる.

定理 4.2 $A \in C(K)$ の T -不変 closed subalgebra となれば,

定理 1.1 が, $A (\leftrightarrow R(K))$, $\alpha(\Delta(2, \delta)) (\leftrightarrow \alpha(\Delta(2, \delta) \setminus K))$ と置き換えて成立する.

定理 4.3 2 つの $C(K)$ の T -不変 closed subalgebra に対して

定理1.2 が同様の置き換えにより成立つ.

以下, $C(K)$ の T -不変な closed subalgebra A を 1 つ固定して考
える. 点 $x \in K$ が A の peak point とは, $f(x)=1$, $|f|<1$ on
 $K \setminus \{x\}$ となる $f \in A$ が存在すること. A の peak point
でない点の全体を $Q (\subseteq K)$ であらわす. Q は F_σ -set である.
 $\lambda_Q = dx dy|_Q$ は平面の Lebesgue measure を Q に切ったものとす
る.

定理 4.4 (Dunford [2]) f を Q 上の有界 Borel 関数, $f_n \in A$,
 $\|f_n\| \leq M (< \infty)$ が存在して, $f_n \rightarrow f$ a.e. $[\lambda_Q]$ ならば,
 $g_n \in A$, $\|g_n\| \leq \|f\|$ なるものを取り, $g_n \rightarrow f$ a.e. $[\lambda_Q]$ と出
来る.

系. $H^\infty(\lambda_Q)$ を A の $L^\infty(\lambda_Q)$ における w^* -closure とすると, A は
 $H^\infty(\lambda_Q)$ で strongly pt. b. dense である.

これを用いて, 次の 2 つの定理が Gamelin - Garnett [5] で与
えられた.

定理 4.5 任意の $f \in C(K)$ に対して,

$$d(f, A) = d(f, H^\infty(\lambda_Q))$$

とくに, $H^\infty(\lambda_Q) \cap C(K) = A$ となる.

定理 4.6 $f \in H^\infty(\lambda_Q)$ であるための必要十分条件は, 各点
 $z \in \overline{Q}$ に対して, 定数 $r \geq 1$, $C > 0$ が存在して, 十分小さい

$\delta > 0$ に対して, ϕ が $\Delta(z_0, \delta)$ に白をもつ C^1 級関数に対して

$$\left| \iint f(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy \right| \leq C \delta \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\| \alpha_{\Delta}(\Delta(z_0, \delta))$$

と取ることである.

(註) $H^\infty(\lambda_\Delta) \cap C(K) = A$ をこの結果から, 定理 1.1 の条件において, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ という条件は, 単に定数 $C > 0$ で置き換えればよい.

もう一つ, 次のような algebra を考へる.

定義 4.7. $H^\infty(D)$ の closed subalgebra H が stable とは,

i) $A(D) \subseteq H$

ii) $f \in H$ ならば, $\frac{f - f(z_0)}{z - z_0} \in H$ for $z_0 \in D$.

(註) この二つの条件から H が T -不変であることが示めせる.

逆に T -不変な closed subalgebra (ii) をみたすので, (i) のもとに (ii) は " T -不変" と同値な条件である.

定理 4.8 (L1) H を $H^\infty(D)$ の closed stable subalgebra, $E \subseteq \partial D$ の閉集合と可なり. L_E を D 上の有界な連続関数で $D \cup E$ 上に連続に延長出来るもの^(全体)と可なり. $H_E = H \cap L_E$ とかくと次は同値である:

i) $d(h, H_E) = d(h, H)$ for all $h \in L_E$.

ii) H_E は H において pt. b. dense である.

iii) 各 $f \in H$ は $f_n \in H_E$ に次のように近似出来る:

$\|f_n\| \leq \|f\|$, f_n は U の subset で E からの距離が正であるもの
の上では一様に f に収束する。

問題3. 条件 (i) を stable からはずして, $H^\infty(\Omega_0)$ の場合に f
定理 4.4 と一般化できるか?

定理の証明には次の事実が使われる。

定理 4.9 $H \subset H^\infty(U)$ の closed stable subalgebra とする。 H
の maximal ideal space を $\mathcal{M}$ とし, $z \in H$ の Gelfand 変換 $\hat{z}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$
を考へる。 $\lambda \in U$ に対して $\mathcal{M}_\lambda = \{\phi \in \mathcal{M} \mid \hat{z}(\phi) = \lambda\} = \hat{z}^{-1}(\{\lambda\})$
を λ におけるファイバーと呼ぶ。 $f \in H$ とする。

$$\sup_{\phi \in \mathcal{M}_\lambda} |\hat{f}(\phi)| = \overline{\lim_{\substack{U \ni \zeta \\ \zeta \rightarrow \lambda}} |\hat{f}(\zeta)|}$$

問題 4. (Cluster value problem) より正確に, $\hat{f}(\mathcal{M}_\lambda)$ は f の
点 λ における cluster set に一致するか。 i.e.

$$\{\hat{f}(\phi) \mid \phi \in \mathcal{M}_\lambda\} \stackrel{?}{=} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\zeta_n) \mid \zeta_n \in U, \zeta_n \rightarrow \lambda \right\}.$$

このためには, 次のことを示せばよい。 $\forall f \in H, |f| > 0$ on
 U とする。 $\frac{1}{f} \in H^\infty$ とくに, H が $A(U)$ の $L^\infty(U)$ における w^*
closure とすると, $\frac{1}{f} \in A(U)$ の元で p.b. 近似出来ることを示
せばよい。

この問題が正しいければ, $H^\infty(U)$ に関して知られる定理を一
般化できる。

§ 5 Negligible sets

具体的に集合 E の analytic capacity を求めることは、一般的にはほとんど不可能である。これでは capacity を用いた特徴付けも実用的とはいえない。次のように negligible set を考えることは、純く定理からわかるように応用を広げる。

定義 5.1 S^2 の subset E が α -negligible とは、(a) S^2 上の連続関数 f で E の補集合 U 上 analytic なものがあれば、 f は E の近傍 U 上で analytic な連続関数 f_n に S^2 上で一様近似できる。また、 E が δ -negligible とは、(b) ある定数 $M > 0$ があって、 S^2 上の有界な Borel 関数 f で U 上 analytic なものがあれば、 E の近傍 U 上で analytic な Borel 関数 f_n が存在して、 $f_n \rightarrow f$ pt.wise on U , $\|f_n\| \leq M \|f\|$ とできる。

定理 5.2.

- (i) E が α -negligible とあれば、定理 1.2 の条件 (iv) は $z \in \partial K \setminus E$ に関して確かめれば十分である。
- (ii) E が δ -negligible とあれば、定理 2.1 の条件 (iv) は $z \in \partial K \setminus E$ に関して確かめれば十分である。

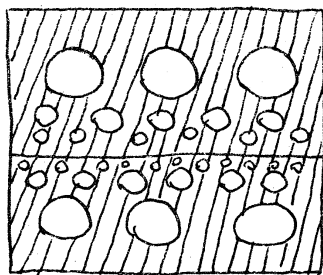
定理 5.3. α -negligible set の countable union は α -negligible である。 δ -negligible set の有限和は δ -negligible, compact δ -negligible set の countable union は δ -negligible である。

定理 5.4. $\gamma \in C^2$ -級 の曲線とあれば、

(i) J の subset E は α -negligible である.

(ii) J の subset E で 長さ 0 の集合は δ -negligible である.

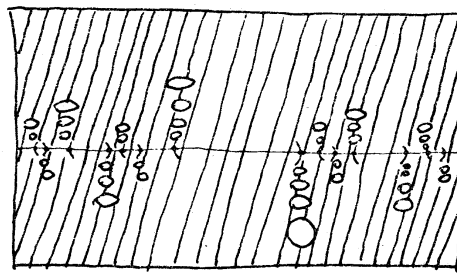
さて, K を平面のコンパクト集合として, $\mathbb{C} \setminus K$ の連結成分を $U_1, U_2, \dots$ とすると, U_i の連結性から, $z \in \partial U_i$ に対しては capacity の条件 (iv) (定理 1.2, 2.1) は成立している. 従って K の inner boundary と呼ばれる集合 $\partial K \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial U_i)$ の点が negligible の場合にはこの定理を適用できる. たとえば,



$$A(K^0) = R(K)$$

四部 K

カントール曲の逆像集合



$$R(K) \text{ は } H^\infty(K^0) \text{ の pt, b, dense.}$$

negligible set は capacity により次のように特徴付けられる

定理 5.5 E を S^2 の subset とする.

(i) 定数 $C > 0$ があつて $\alpha(S) \leq C \alpha(S \setminus E)$ for any set S

ならば, E は α -negligible であり, 逆にこのとき $\alpha(S) = \alpha(S \setminus E)$ for any set S とする.

(ii) 定数 $M > 0$ があつて, $r(S) \leq M r(S \setminus E)$ for any set S

ならば, E は δ -negligible である. 逆も成立する. E が compact

negligible であるとは $\gamma(S) = \gamma(S \setminus E)$ for any S である。

とくに, negligible set は対応する capacity で 零 になること
とわかる。

問題5 $\alpha(E) = 0$ であるとは E は α -negligible か? 同様に $\gamma(E) = 0$ であるとは γ -negligible か?

これは, 次の capacity の semiadditivity が示されればよい。

問題6 universal constant $M > 0$ がある, 2,

$$\alpha(E \cup F) \leq M(\alpha(E) + \alpha(F)) \text{ for any sets } E, F.$$

$$\gamma(E \cup F) \leq M(\gamma(E) + \gamma(F)) \text{ for any sets } E, F.$$

上の問題は部分的に解答でも有効である。たとえば, 定理 5.4 は, C^2 -級曲線で分けられた2つの集合 E, F に対して上の不等式を導びくことにより証明される。

これらの問題は互いに関係が深く, 次の事実が示めされている。(Davie [3]).

定理 5.6 次の conjecture は同値である。

(i) E が compact で $\gamma(E) = 0$ であるとは E は γ -negligible

(ii) universal constant M がある, 2,

$$\gamma(E \cup F) \leq M(\gamma(E) + \gamma(F)) \text{ for } \forall \text{ compact } E, F, E \cap F = \emptyset$$

(iii) universal constant M がある, 2,

$$\alpha(E \cup F) \leq M(\alpha(E) + \alpha(F)) \text{ for } \forall \text{ compact } E, F, E \cap F = \emptyset$$

References

1. A. M. Davie, T. W. Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, T. A. M. S. 175 (1973), 37-68.
2. A. M. Davie, Bounded limits of analytic functions, P. A. M. S. 32 (1972), 127-133.
3. _____, Analytic capacity and approximation problems, T. A. M. S. 171 (1972), 409-444.
4. T. W. Gamelin and J. Garnett, Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras, J. Functional Anal. 8 (1971), 360-404.
5. _____, Bounded approximation by rational functions, Pac. J. Math. 45 (1973), 129-150.
6. Y. Kobayashi, One condition for $R(K)=A(K)$, Proc, Japan Acad. 48 (1972), 578-580.
7. G. G. Lorentz (Editor), Approximation Theory, Academic Press, Inc., New York and London 1973; T. W. Gamelin, Uniform algebras on plane sets, pl01-pl49.