

3次元ハイゼンベルグ群の極小 null-scroll とその構成

北海道大学大学院理学院 清原悠貴 *

Hiroataka Kiyohara

Department of Mathematics,

Hokkaido University

1 序論

本稿は著者によるプレプリント [13] の概説である。3次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 はリーマン幾何学において Thurston 幾何のモデル空間の一つであり、4次元の等長群をもつ naturally reductive な等質空間である。モデル空間には3次元定曲率空間形（等長群の次元は6）が含まれるが、空間形に次いで等長群の次元が高いモデルは可約なリーマン対称空間 $S^2 \times \mathbb{R}^1$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$, ハイゼンベルグ群 Nil_3 , 特殊線型群の普遍被覆 $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$ の4つである。これら4次元の等長群をもつモデル空間の曲面論はこの20年程活発になされており、特に Abresch-Rosenberg 微分の発見によって平均曲率一定曲面の研究が大きく発展した。Abresch-Rosenberg 微分とは [1, 2] で導入された3次元等質空間の曲面上の2次微分であり、平均曲率一定曲面に対して正則となるため、空間形の曲面論における Hopf 微分のアナロジーとして知られている。

3次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 では、平均曲率が一定な曲面の重要な研究として井ノ口 [11] や Daniel [8] の結果があり、曲面の単位法ベクトル場から自然に定まる正規ガウス写像と呼ばれる双曲面への写像の調和性によって曲面の極小性の特徴づけられる事が知られている。一方で Dorfmeister-井ノ口-小林 [9] は Abresch-Rosenberg 微分に加えて、Berdinski-Taimanov [3] による曲面のスピンル表現と Kenmotsu 型の表現の一般化である非線形 Dirac 方程式を用いて自明束上の平坦接続の族によって曲面の極小性の特徴づけを与えた。これにより彼らは可積分系的手法を通して Nil_3 の極小曲面の Weierstrass 型表現を構築した。この手法をパラ複素座標系を用いて整備することで、著者らは左不変ローレンツ計量を備えたハイゼンベルグ群の時間的極小曲面特徴付けと Weierstrass 型の表現を得ている [12]。これらの（時間的）極小曲面の Weierstrass データは支持関数と呼ばれる実数値関数と Abresch-Rosenberg 微分から定まる（パラ）正則1次微分形式であり、曲面の可積分条件もこれらの量によって記述される。

本稿では、曲面の可積分条件から自然に考えられる条件をみたとす Abresch-Rosenberg 微分をもつ時間的極小曲面の特徴付けを与える。本来 Abresch-Rosenberg 微分はその定義の仕方から幾何学的な説明が難しいが^{*}、特徴付けによって曲線とアファイン直線によって生成される一般化線織面と呼ぶべき曲面と見なすことができるようになり、幾何学的な意味を考察する切っ掛けが得られると考えられる。本稿では任意のこれらの曲面を構成する方法を与える。

* 部分多様体と群作用の幾何学 2023/06/26 講義録。本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものである。

E-mail address: kiyosannu@eis.hokudai.ac.jp

2 時間的曲面のスピンル表示

左不変ローレンツ計量 g を備えた 3 次元リー群 G の時間的曲面を考える．曲面はめ込みの定義域の 2 次元多様体が向きづけ可能かつ連結であればローレンツ面の構造が定まることから，時間的曲面はローレンツ面からリー群 G への共形はめ込みと考えられる．したがって局所的には時間的曲面 f はパラ複素平面 $\mathbb{C}'$ の単連結領域 $\mathbb{D}$ から G への共形はめ込みとみなしてよい．ここでパラ複素平面 $\mathbb{C}'$ とは，次の性質を満たす単位 1 とパラ虚数単位 i' で張られる実代数 $\mathbb{R} \oplus i'\mathbb{R}$ である：

$$i'^2 = 1, \quad 1 \cdot i' = i' \cdot 1 = i'.$$

パラ複素数には逆数や平方根を持たない元が存在し，体ではないことに注意が必要である．例えばパラ虚数単位 i' は平方根をもたず，また $\ell := (1 + i')/2$ は逆数をもたない．

曲面をパラ複素等角座標 z で微分すると，パラ複素化した接空間の元 f_z を得るが，パラ複素化したリー環に左移動させたものを $\Phi := f^{-1}f_z$ と表す．このとき $\mathbb{D}$ 上のあるパラ複素関数 ψ_j ($j = 1, 2$) と $\epsilon \in \{\pm i'\}$ が存在して， Φ をリー環 $\mathfrak{nil}$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3 を用いて

$$\Phi = \epsilon \left((\overline{\psi_2})^2 + (\psi_1)^2 \right) e_1 + \epsilon i' \left((\overline{\psi_2})^2 - (\psi_1)^2 \right) e_2 + 2\psi_1 \overline{\psi_2} e_3 \quad (2.1)$$

と表せる．特に $\psi_2 \overline{\psi_2} + \psi_1 \overline{\psi_1} > 0$ となる組 (ψ_1, ψ_2) は符号を除いて一意に定まり，時間的曲面 f の生成スピノルという．一方で，時間的曲面の第一基本形式を $I = e^u dz d\bar{z}$ ，単位法ベクトル場を N ，平均曲率を H ，ローレンツ計量 g の Levi-Civita 接続を ∇ とすると，微分 Φ は次の構造方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{z}} - \overline{\Phi_z} - [\Phi, \overline{\Phi}] &= 0, \\ \Phi_{\bar{z}} + \overline{\Phi_z} + \nabla_{\Phi} \overline{\Phi} + \nabla_{\overline{\Phi}} \Phi &= e^u f^{-1} H N. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Berdinski-Taimanov[3] は 3 次元リー群，特に 3 次元 Thurston 幾何のモデル空間の曲面に対し，(2.2) と同じ式で与えられる構造方程式を生成スピノルを用いて書き直し，非線形 Dirac 方程式で表せることを示した．時間的曲面の場合でも同様で，特に G がハイゼンベルグ群 Nil_3 とミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ の場合には，構造方程式は次の非線形 Dirac 方程式と同値である．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & \mathcal{U} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

ただし時間的曲面の第一基本形式を $I = e^u ded\bar{z}$ としたとき， $G = \mathbb{L}^3$ ならば $\mathcal{U} = He^{u/2}/2$ であり， $G = \text{Nil}_3$ ならば $\mathcal{U} = -He^{u/2}/2 + i'h/4$ ， $h = 2(\psi_2 \overline{\psi_2} - \psi_1 \overline{\psi_1})$ である．パラ複素関数 $\mathcal{U}$ をディラックポテンシャルとよび，関数 h を支持関数という．

注意 1. 1. Nil_3 の非線形ディラック方程式は過剰決定系であり，関数 H, u, h から曲面 f を再現するには方程式の解 (ψ_1, ψ_2) が次の関係式を満たす必要がある：

$$e^{u/2} = 2(\psi_2 \overline{\psi_2} + \psi_1 \overline{\psi_1}), \quad h = 2(\psi_2 \overline{\psi_2} - \psi_1 \overline{\psi_1}).$$

2. 支持関数が恒等的に消える Nil_3 の時間的曲面は **Hopf cylinder** と呼ばれる，第 3 軸方向からの自然な射影による平面曲線の逆像である．特に平均曲率は平面曲線の曲率に依存し，極小な Hopf cylinder は平面に限られる．この時間的極小曲面を **vertical plane** という．

3 Nil₃ の時間的極小曲面の可積分条件

3 次元ハイゼンベルグ群 Nil₃ は以下で表される線型リー群である.

$$\text{Nil}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nil₃ はしばしば $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ として考えられる. ここで群演算 $\cdot$ は

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (x_1 + \tilde{x}_1, x_2 + \tilde{x}_2, x_3 + \tilde{x}_3 + \frac{1}{2}(x_1\tilde{x}_2 - x_2\tilde{x}_1))$$

である. S. Rahmani[15] は Nil₃ の左不変ローレンツ計量はリー環 $\mathfrak{nil}_3$ の中心の方向 (空間的, 時間的, 光的の 3 種類) で等長的に分類されることを示した. 特にそのうち非平坦な計量 (中心方向が空間的または時間的) は次の 2 つで与えられる.

$$g_{\pm} = \mp dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 \pm \omega \otimes \omega, \quad \omega = dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2).$$

これらの計量に関する等長群の次元は 4 であり, 恒等写像を含む連結成分は左移動と第 3 軸周りの回転またはブーストと呼ばれるローレンツ変換で構成される. リーマン計量を備えた Nil₃ では極小性が正規ガウス写像の調和性で特徴づけられたが, g_+ に関する時間的曲面の極小性や g_- に関する空間的曲面の極大性もド・ジッター球面, 球面への正規ガウス写像の調和 (時間的曲面の場合はローレンツ調和) 性によって特徴づけられる [12, 5]. 本稿では時間的極小曲面を扱うため g_+ を採用する.

Nil₃ の極小曲面の各点において, 支持関数が消えないこととディラックポテンシャルが逆数をもつことが同値になる. ディラックポテンシャルが至る所で逆数をもつ時間的曲面に対して, 非線形ディラック方程式 (2.3) は次の Lax 形式に書き換えられる:

$$\begin{aligned} F_z &= FU, & F_{\bar{z}} &= FV, \\ U &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}w_z + \frac{1}{2}H_z\tilde{e}e^{-w/2}e^{u/2} & -\tilde{e}e^{w/2} \\ Q\tilde{e}e^{-w/2} & -\frac{1}{4}w_{\bar{z}} \end{pmatrix}, & V &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}w_{\bar{z}} & -\bar{Q}\tilde{e}e^{-w/2} \\ \tilde{e}e^{w/2} & \frac{1}{4}w_z + \frac{1}{2}H_{\bar{z}}\tilde{e}e^{-w/2}e^{u/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし, H は平均曲率, u は第 1 基本形式 $e^u dz d\bar{z}$ を定める関数であり, 関数 w, Q はそれぞれディラックポテンシャルの指数関数表示 $\mathcal{U} = \tilde{e}e^{w/2}$ ($\tilde{e} \in \{\pm 1, \pm i\}$) と Abresch-Rosenberg 微分の係数関数 $Q dz^2$ を定める関数である. 微分方程式系 (3.1) の可積分条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_{z\bar{z}} + e^w - Q\bar{Q}e^{-w} + \frac{1}{2}\left(H_{z\bar{z}} + H_z\frac{(-w+u)_{\bar{z}}}{2}\right)\tilde{e}e^{-w/2}e^{u/2} &= 0, \\ \frac{1}{2}w_{z\bar{z}} + e^w - Q\bar{Q}e^{-w} + \frac{1}{2}\left(H_{z\bar{z}} + H_{\bar{z}}\frac{(-w+u)_z}{2}\right)\tilde{e}e^{-w/2}e^{u/2} &= 0, \\ \bar{Q}_z\tilde{e}e^{-w/2} &= -\frac{1}{2}\bar{Q}H_z e^{-w}e^{u/2} - \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{u/2}, \\ \partial Q\tilde{e}e^{-w/2} &= -\frac{1}{2}QH_{\bar{z}}e^{-w}e^{u/2} - \frac{1}{2}H_z e^{u/2} \end{aligned}$$

であり, 特に時間的極小曲面の場合には次のように簡潔に表せる:

$$\frac{1}{2}w_{z\bar{z}} + e^w - Q\bar{Q}e^{-w} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = 0. \quad (3.2)$$

この条件から考えられる, 最も基本的な時間的極小曲面は $Q\bar{Q} = 0$ をみたす曲面であると言える. Abresch-Rosenberg 微分が恒等的に消える, すなわち定義域上で恒等的に $Q = 0$ をみたす (vertical plane を除く) 時間的極小曲面は **horizontal umbrella** と呼ばれる [12]. しかしながらパラ複素数の性質から,

$$Q \neq 0, \quad Q\bar{Q} = 0 \quad (3.3)$$

をみたす関数 Q が存在する. このような Abresch-Rosenberg 微分を持つ曲面は通常の曲面や空間的曲面には無く, 興味深い.

4 Nil_3 の null scroll

非線形ディラック方程式 (2.3) は特に Nil_3 の極小曲面の時には $\mathbb{L}^3$ の曲面に対するそれと非常に似た形になる. 実際, Nil_3 の時間的極小曲面に対して非線形ディラック方程式が一致するような $\mathbb{L}^3$ の時間的曲面が必ず存在することを, 次のように確かめることができる: $\mathbb{L}^3$ の時間的曲面の生成スピノルの定義を (2.1) から

$$\Phi = \epsilon((\overline{\psi_2})^2 + (\psi_1)^2) e_1 + \epsilon i'((\overline{\psi_2})^2 - (\psi_1)^2) e_2 + 2i' \psi_1 \overline{\psi_2} e_3$$

に変えると, ディラックポテンシャルは $\mathcal{U} = He^{u/2}/2$ から $\mathcal{U} = i'He^{u/2}/2$ に変わる. 第一基本形式 $e^u dz d\bar{z}$ は生成スピノルで表すと $e^u = 4(\psi_2 \overline{\psi_2} - \psi_1 \overline{\psi_1})^2$ となる. つまり Nil_3 の支持関数 h をもつ時間的曲面に対して, $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 $1/2$ 一定曲面で第一基本形式 $h^2 dz d\bar{z}$ を持つものを考えれば, これらの時間的曲面のディラックポテンシャルは一致する. したがってこのとき非線形ディラック方程式は一致し, Nil_3 の時間的極小曲面が $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率一定曲面を誘導することがわかる. 誘導される $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率一定曲面のガウス・コダッチ方程式は (3.2) で与えられる. したがって, 誘導される $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率一定曲面の Hopf 微分は $4Qdz^2$ となる. 以上より $Q\overline{Q} = 0$ をみたす Nil_3 の時間的極小曲面を調べるには, $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 $1/2$ 一定曲面で Hopf 微分 Adz^2 が $A\overline{A} = 0$ をみたすものを調べればよいことがわかる.

ミンコフスキー空間の時間的曲面では型作用素が対角化不可能な点が存在し得る. そのような点は擬臍点という. また擬臍点のみで構成される時間的曲面を全擬臍的であるという. 既に全擬臍的な時間的曲面は J. Clelland [7] によって $\mathbb{L}^3$ の null scroll を用いて特徴付けられている.

定理 2. ミンコフスキー空間の全擬臍的な時間的曲面は, null 直線を ruling にもつ null 曲線上の線織面である. 逆に $\mathbb{L}^3$ の任意の非退化 null 曲線 $\alpha(u)$ と $\alpha'(u)$ と各点で線型独立な α に沿った null ベクトル場 $B(u)$ に対して, はめ込み

$$\alpha(u) + vB(u)$$

は臍点からなる曲線を除いて全擬臍的である.

また擬臍点について次が知られている:

命題 3. ミンコフスキー空間の時間的曲面の点 p が擬臍点であるための必要十分条件は, Hopf 微分 Adz^2 が $A(p) \neq 0$ かつ $A(p)\overline{A(p)} = 0$ をみたすことである.

したがって (3.3) をみたす Nil_3 の時間的極小曲面に対しても類似した結果が期待できる. そこで 3 次元ハイゼンベルグ群に null scroll の概念を拡張した次の曲面を導入する.

定義 4. ハイゼンベルグ群 Nil_3 の時間的曲面 f に対して, Nil_3 の null 曲線 $\gamma = \gamma(s)$ とリー環 $\mathfrak{nil}_3$ の光錐に値をもつ曲線 $\tilde{B} = \tilde{B}(s)$ が存在して

$$f(s, t) = \gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$$

と表せるとき, 時間的曲面 f を Nil_3 の **null scroll** という. 曲線 $\gamma, \tilde{B}$ をそれぞれ null scroll の **base 曲線**, **ruling** という.

注意 5. null scroll は時間的曲面である. null scroll の定義式自体はハイゼンベルグ群である必要も零的である必要性もなく, 要請されるのはリー群の構造のみである. 擬ユークリッド空間では群構造は通常の積であり, 指数写像は恒等写像であるから, 上記の定義は線織面と同じである. さらに, 両側不変計量をもつリー群では指数写像は測地線を定めるため, 上記の定義は線織面を定める. したがって, 上記の定義は線織面の自然な拡張と見なすこと

ができる。また、ハイゼンベルグ群では null scroll は s を固定するごとに $\mathbb{R}^3$ の直線を定めるため、見た目は $\mathbb{R}^3$ の線織面になっている。

リー環 $\mathfrak{nil}_3$ とミンコフスキー空間を自然に同一視することで、ハイゼンベルグ群に曲線論を導入することができる。特にミンコフスキー空間における null 曲線に対する null Frenet frame または Cartan frame の存在定理 (例えば [6, 10] 参照) より次のように Nil_3 の null 曲線に対して動標構をリー環内に構築できる。

命題 6. 任意の Nil_3 の null 曲線 γ に対して、適当なパラメータ変換の後、以下をみたすリー環 $\mathfrak{nil}_3$ 値関数 A, B, C と実数値関数 k_1, k_2 が存在する：

$$\begin{aligned} A &= \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{ds}, \quad g(A, B) = g(C, C) = 1, \\ g(A, A) &= g(B, B) = g(A, C) = g(B, C) = 0, \\ (A', B', C') &= (A, B, C) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_1 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

逆に任意の実数値関数 k_1, k_2 に対して、 Nil_3 の null 曲線 γ と null frame (A, B, C) で、上記の条件をみたすものが存在する。

null 曲線の動標構 (A, B, C) を $\mathbb{L}^3$ の場合に倣って **null frame** と呼ぶことにする。速度ベクトル A に対して screen bundle の取り方が一意でないために、null frame の取り方は一意ではないことを注意しておく。一般に null scroll の平均曲率を求めると非常に煩雑になるが、 $\mathbb{L}^3$ における曲線論で知られた事実から、ある null scroll が極小であるための次の十分条件が得られる：

定理 7. null frame 付きの null scroll $(\gamma, (A, B, C))$ に対して、 $k_2 = 1/2$ ならば null scroll

$$\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$$

は極小である。ただし、 $\tilde{B}$ は B の e_3 成分を -1 倍した $\mathfrak{nil}_3$ の光錐に値をもつ曲線である。

したがって任意に実数値関数 k_1 を用意することで極小 null scroll を構成することができる。このとき構成された null scroll の Abresch-Rosenberg 微分は用意した関数 k_1 のみによって決まる。以上の議論から条件 (3.3) のもとでの可積分条件 (3.2) 厳密解 ([4, 14] 参照) を用いて k_1 を定義することにより、極小 null scroll を特徴付けることができる。これは Clelland による $\mathbb{L}^3$ の null scroll の特徴付けの Nil_3 版と言える。

定理 8. null scroll f が極小ならば f の Abresch-Rosenberg 微分 Qdz^2 は $Q\bar{Q} = 0$ をみたす。逆に Abresch-Rosenberg 微分 Qdz^2 が $Q\bar{Q} = 0$ をみたす任意の時間的極小曲面は null scroll である。

例 9. 定理 7 において $k_1 = 0$ をとると Abresch-Rosenberg 微分は 0 となり、horizontal umbrella が得られる (図 1)。

5 ruling を指定した極小 null scroll の構成方法

前節の極小 null scroll の構成方法 (定理 7) は曲線の曲率から構成したという点で、base 曲線を指定した極小 null scroll の構成方法である。この方法は極小 null scroll の一般的性質を調べるには有用であるが、微分方程式を解く必要があり煩雑である。しかし、次で与えられる null scroll の極小条件を考えると初等的な計算のみで具体例を構成することができる。

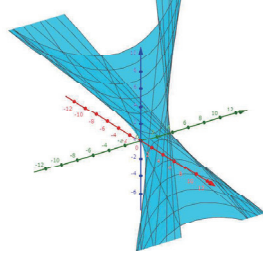


図1 ([13]) Horizontal umbrella

定理 10. null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$ が極小であるための必要十分条件は次のいずれかが成立することである：

$$g(A, \tilde{B}) = 0, \quad g(A, B) = 2\beta.$$

ただし, B は $\tilde{B}$ の e_3 成分を -1 倍した nil_3 の光錐に値をもつ曲線であり, β は計量から自然に定まるリー環のベクトル積 $\times$ について $\tilde{B} \times \tilde{B}' = -\beta B$ によって定義される関数である.

条件 $g(A, \tilde{B}) = 0$ や $g(A, B) = 2\beta$ かつ $\beta = 0$ は速度ベクトルと $\tilde{B}$ や B の一次従属性から対応する極小 null scroll は容易にわかる. 特に後者は $\beta = 0$ が $\tilde{B}$ が直線上にあることを意味し, vertical plane に対応する.

例 11 (vertical plane). 定数 $\theta \in (0, \pi)$ に対して $\tilde{B}$ を $\tilde{B}(s) = se_1 + s \cos \theta e_2 + s \sin \theta e_3$ と定める. null ベクトル場 A を $A = e_1 + \cos \theta e_2 - \sin \theta e_3$ により定めると次の vertical plane が得られる (図 2) .

$$\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s)) = ((1+t)s, (1+t)s \cos \theta, (1+t)s \sin \theta - 2s \sin \theta).$$

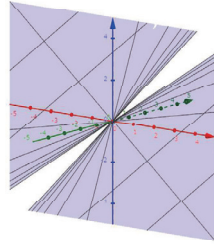


図2 ([13]) Vertical plane

条件 $g(A, B) = 2\beta$, $\beta \neq 0$ に対応する極小 null scroll は以下のようにして求められる：必要ならば $\tilde{B}$ を $1/(2\beta)$ 倍することにより, 一般性を失うことなく $\beta = 1/2$ として良いことになる. 指定した $\tilde{B}$ に対して nil_3 内の B を含むローレンツ平面を 1 つ固定すると, $g(A, B) = 1$ をみたす null ベクトル場 A が一意に定まる. このとき A を速度にもつ曲線 γ をとれば, null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$ は極小条件 $g(A, B) = 2\beta$, $\beta = 1/2$ をみたす. したがって問題は nil_3 内の B を含むローレンツ平面の取り方に帰着する. そこで $\beta = 1/2$ となる極小 null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$ に対して $\gamma^{-1}d\gamma/ds \times B$ を調べると次が得られる：

$$\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{ds} \times B = 2B' - 2g(\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{ds}, B')B.$$

したがって nil_3 内の B を含むローレンツ平面の取り方は関数 $g(\gamma^{-1}d\gamma/ds, B')$ によって決まる. この関数を b と置くことで次の定理により base 曲線の速度ベクトルが決定する.

定理 12. 極小条件 $g(A, B) = 2\beta$, $\beta = 1/2$ をみたす任意の極小 null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$ に対して次が成り立つ:

$$\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{ds} = -4(2g(B'', B'')B + B'') - 2b \left(B' + \frac{b}{4}B \right).$$

逆に $\beta = 1/2$ をもつ nil_3 の光錐の任意の曲線 $\tilde{B}(s)$ に対して任意に実数値関数 $b(s)$ をとり, nil_3 値 null ベクトル場 $A(s)$ を次で定める:

$$A = -4(2g(B'', B'')B + B'') - 2b \left(B' + \frac{b}{4}B \right).$$

このとき, $g(A, B) = 1$ であり, A を速度ベクトルとする null 曲線 $\gamma(s)$ 上の null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\tilde{B}(s))$ は極小である.

注意 13. 定理 12 において $b = 0$ として極小 null scroll を構成すると $(A, B, 2B')$ は base 曲線上の null frame を定める. このときの関数 k_1, k_2 は

$$k_1(s) = 4g(B''(s), B''(s)), \quad k_2(s) = \frac{1}{2}$$

である. 特に $b = 0$ かつ B'' が null ベクトル場であるとき, 例 9 より horizontal umbrella が得られる.

極小条件では 3 種類の場合分けをしたが, 実は $g(A, B) = 2\beta$ の 2 つのみ (さらに $b = 0$ のみ) 考えればよいことが定理 8 よりわかる.

定理 14. vertical plane ではない Nil_3 の任意の極小 null scroll に対して, 次をみたす null 曲線 γ と nil_3 の光錐に値をもつ曲線 $\tilde{B}$ が存在して, $\tilde{B}$ を ruling とする γ 上の null scroll は元の極小 null scroll と一致する:

$$\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{ds} = -4(2g_+(B'', B'')B + B'').$$

リー環の光錐の曲線は標準的な例として直線, 放物線, 双曲線, 円の 4 種類考えられる. このうち直線に対応するのは vertical plane であり, その他は定理 12 および定理 14 より得られる.

例 15. 曲線 $\tilde{B}$ を

$$\tilde{B} = \left(\frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{2} \right) e_1 + \frac{1}{2}s e_2 + \left(\frac{1}{8}s^2 - \frac{1}{2} \right) e_3$$

により定める. これは $\beta = 1/2$ の放物線を描く. 定理 12 で $b = 0$ が定める null 曲線 γ は

$$\gamma(s) = \left(-\frac{b^2}{48}s^3 - \frac{b}{4}s^2 - \left(\frac{b^2}{4} + 1 \right) s, -\frac{b^2}{8}s^2 - bs, -\frac{b^4}{3840}s^5 - \frac{b^3}{192}s^4 + \frac{b^4}{192}s^3 + \frac{b}{4}s^2 + \left(1 - \frac{b^2}{4} \right) s \right)$$

であり, $\tilde{B}$ を ruling とする γ 上の null scroll は horizontal umbrella である (図 3).

例 16. 曲線 $\tilde{B}$ を

$$\tilde{B} = \frac{1}{2} \cosh(s) e_1 + \frac{1}{2} \sinh(s) e_2 - \frac{1}{2} e_3$$

により定める. これは $\beta = 1/2$ の双曲線を描く. 定理 12 で $b = 0$ が定める null 曲線 γ は

$$\gamma(s) = \left(-\sinh(s), -\cosh(s) + 1, \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \sinh(s) \right)$$

であり, $\tilde{B}$ を ruling とする γ 上の null scroll は極小である (図 4).

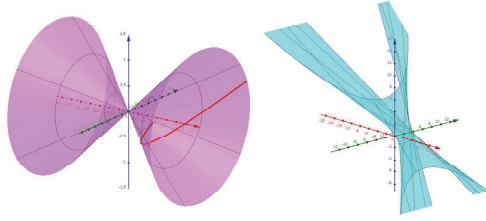


図 3 ([13]) example of minimal null scrolls constructed from ruling valued in a hyperbola (right) and the image of its ruling (left, red parabola)

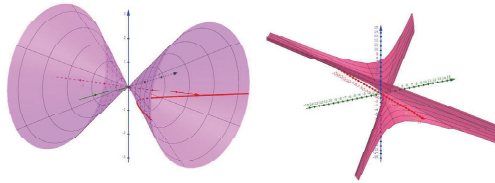


図 4 ([13]) example of minimal null scrolls constructed from ruling valued in a hyperbola (right) and the image of its ruling (left, red hyperbola)

例 17. 曲線 $\tilde{B}$ を

$$\tilde{B} = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}\cos(s)e_2 + \frac{1}{2}\sin(s)e_3$$

により定める. これは $\beta = 1/2$ の円を描く. 定理 12 で $b = 0$ が定める null 曲線 γ は

$$\gamma(s) = \left(-s, \sin(s), -\frac{1}{2}s\sin(s)\right).$$

であり, $\tilde{B}$ を ruling とする γ 上の null scroll は極小である (図 5) .

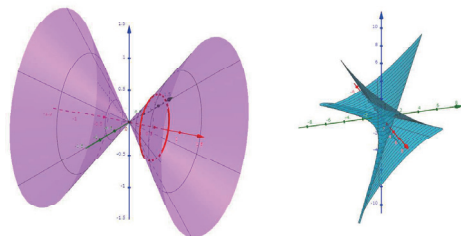


図 5 ([13]) example of minimal null scrolls constructed from ruling valued in a circle (right) and the image of its ruling (left, red circle)

謝辞

研究集会における講演の機会および本稿の執筆の機会を与えてくださった佐賀大学の橋永貴弘准教授に心より御礼申し上げます。

参考文献

- [1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28**: 1-28, 2005.
- [2] U. Abresch, H. Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.* **193**(2): 141-174, 2004.
- [3] D. A. Berdinskiĭ, I. A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.* **46**(6): 1248-1264, 2005. English translation: *Siberian Math. J.* **46**(6): 1005-1019, 2005.
- [4] O. P. Bhutani, M. H. M. Moussa, K. Vijayakumar. On the generalized forms of exact solutions to the Liouville equation via direct approach. *Int. J. Engng. Sci.* **32**(12): 1965-1969, 1994.
- [5] D. Brander, S. P. Kobayashi. Maximal surfaces in the Lorentzian Heisenberg group. arXiv:2302.10559, 2023
- [6] K. L. Duggal, A. Bejancu. Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Manifolds and Applications. *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [7] J. Clelland. Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$. *Asian J. Math.*, **16**(2): 189-208, 2012.
- [8] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):674-695, 2011.
- [9] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi. A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Asian J. Math.* **20**(3): 409-448, 2016.
- [10] K. L. Duggal, D. H. Jin. Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds. *World Scientific Publishing Company*. 2007.
- [11] J. Inoguchi. Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Differ. Geom. Dyn. Syst. (Electronic)*, 10:163-169, 2008.
- [12] H. Kiyohara, S-P. Kobayashi. Timelike minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *J. Geom. Anal.*
- [13] H. Kiyohara. Minimal null scrolls in the three-dimensional Heisenberg group. arXiv preprint arXiv: 2308.08178, 2023.
- [14] J. Liouville. Sur l'equation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. *J. Math. Pures Appl.* **18**: 71-72, 1853.
- [15] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, [Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups]. *J. Geom. Phys.* **9**(3): 295-302, 1992.
- [16] T. Weinstein. An introduction to Lorentz surfaces. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, **22**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.