

モデル乱流の逐次近似解

信州大 工 大 路通雄

1° 乱れの Reynolds 数 R_0 が小さいときに解を R_0 の整ベ 2 級数の形で求める手続きは, 乱れの減衰時間 $\tau \geq 0$ と波数 k の全領域に対する *uniformly valid* な結果を与えないことがさきに示唆された^{1), 2)}.

その原因は, 要するに非線型効果を表わす波数空間での合成積 (convolution) が, 逐次近似の段階で漸近的に適正なオーダーを持たないことにあると考えられる. 具体的な考察は, 自由に減衰する一様な 1 次元 Burgers モデルについて行われたけれども, この事情の一般性から見て, 実在の 3 次元 Navier-Stokes 乱流についても同様の結論が期待されるであろう.

このような解析的振動の破綻は, 特に非線型問題の場合には珍しいことではないか^{3), 4)}, 個々の問題における特異性の挙動はさまざまで, すべてのに適用する万能の理論は存在しないから, それぞれの場合ごとに吟味しなければならない.

幸い Burgers モデルについては以前から厳密解が知られているので 5), 6), ここでそれぞれを手かかりに簡単なコメントを加えたい。

2° R_0 が小さい場合には, Burgers 方程式を無次元形で

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R_0 u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

と書くと都合が良い。ここで変換

$$u = -\frac{2}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta = -\frac{2}{R_0} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

を行えば, (1) は熱伝導方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3)$$

に帰着し, 容易に解くことができる。結果は

$$\theta(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} R_0 V(x') - \frac{1}{4t} (x - x')^2\right] dx', \quad (4)$$

ただし $u(x, t)$ の初期値を $u(x, 0)$ として

$$V(x') = \int^{x'} u(x'', 0) dx'' \quad (5)$$

とおいた。

(4) に (2) を代入して

$$\Phi \equiv \Phi(x, t; R_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} R_0 V(x') - \frac{1}{4t} (x - x')^2 \right] dx' \quad (6)$$

と書くと

$$u = -\frac{2}{R_0} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (7)$$

これが(1)の厳密解である。

3° 上の結果で R_0 が小さいとして, Φ を R_0 の整べき級数に展開すれば

$$\Phi = A_0 - \frac{1}{2} R_0 A_1 + \frac{1}{8} R_0^2 A_2 + \dots, \quad (8)$$

ここに

$$A_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [V(x')]^n \exp \left[-\frac{1}{4t} (x - x')^2 \right] dx', \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

であって, 特に

$$A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{4t} (x - x')^2 \right] dx' \equiv \sqrt{4\pi t} \quad (10)$$

は x に依存しない。したがって $\partial A_0 / \partial x \equiv 0$ であり, (7) と (8) とから

$$u(x, t; R_0) = \frac{\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{1}{4} R_0 \frac{\partial A_2}{\partial x} + \dots}{\sqrt{4\pi t} - \frac{1}{2} R_0 A_1 + \frac{1}{8} R_0^2 A_2 - \dots} \quad (11)$$

が得られる。

(11)において $R_0 = 0$ のときの $u \equiv u(x, t; 0)$ を u_0 とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} V(x') \exp\left[-\frac{1}{4t}(x-x')^2\right] dx' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} V(x-\xi) \exp\left(-\frac{1}{4t}\xi^2\right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x-\xi, 0) \exp\left(-\frac{1}{4t}\xi^2\right) d\xi, \quad ((5) \text{により})\end{aligned}$$

と変形されるので, 再び $x-\xi = x'$ とおきもとめて

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \exp\left[-\frac{1}{4t}(x-x')^2\right] dx' \quad (12)$$

となり, (1)で $R_0 = 0$ とおいた

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

の解と確かに一致する。あるいは $\sqrt{4\pi t} u_0 = \partial A_1 / \partial x$ を (11) に代入すれば, $R_0 \neq 0$ の解を

$$u = \frac{u_0 - \frac{1}{4}R_0 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \frac{1}{24}R_0^2 \frac{\partial B_3}{\partial x} - \dots}{1 - \frac{1}{2}R_0 B_1 + \frac{1}{8}R_0^2 B_2 - \dots}, \quad (14)$$

ただし

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} A_n, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (15)$$

のように表わすこともできる。

4° さてに展開(8)では R_0 が小さいとしたが, 実はこれは指

数関数の展開であるから、 A_n が有界連続である限り一様収束で、(11)または(14)は、すべての R_0 に対して厳密な関係式と見なされる。ここで、あらかじめ R_0 が十分に小さいならば、(14)からさらに

$$u = u_0 + R_0 u_1 + R_0^2 u_2 + \cdots, \quad (16)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} B_1 u_0 - \frac{1}{4} \frac{\partial B_2}{\partial x}, \\ u_2 &= \frac{1}{8} [(2B_1^2 - B_2) u_0 - B_1 \frac{\partial B_2}{\partial x}] + \frac{1}{24} \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

の形のべき級数表示が可能であろう。

もちろん、これだけでは R_0 級数(16)の収束半径その他具体的な性質はわからないけれども、Burgers方程式の解 $u(x, t; R_0)$ は、かなり一般的に $R_0 = 0$ で解析的であると考えられる。はじめに述べたような波数空間での解析に現われる困難と比べて、やや意外な結果であったが、取りあえず両者の関係をもう少し検討してみたい。

5° 上では方程式の厳密解を求めてからそれを R_0 の級数に展開した。一方、まず解を級数(16)のように仮定して(1)に直接代入し、 R_0 の各べきの項を比べると、逐次に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

であり、この方程式系を u_0 から順々に解いて行けば再び u が得られるはずである。

また、波数空間に移って

$$u(x, t; R_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t; R_0) e^{ikx} dk, \quad (19)$$

$$v = v_0 + R_0 v_1 + R_0^2 v_2 + \dots \quad (20)$$

とすると、(18)の代わりに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} + k^2 v_0 &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + k^2 v_1 &= -\frac{1}{2} ik v_0 * v_0 \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となって[†]、問題は(16)と(20)および(18)と(21)の対応に帰着する。

6° 以下、両者の関係について手かりを得るために、最

† 文献2), 式(32)-(38)参照。 $v_0 * v_0$ 等は波数空間での合成積を示す。ただし2)では右辺の係数 $1/2$ が落ちてゐるが、その論点には影響しない。

も簡単な具体例として、 u の初期分布 $u(x, 0)$ がデルタ関数であるとしよう。すなわち

$$u(x, 0) \equiv \delta(x) \quad (22)$$

とおく。このとき (18) と (21) から、 ϕ の近似は直ちに

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad ; \quad v_0 = \frac{1}{2\pi} \exp(-k^2 t) \quad (23)$$

したがって

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \propto \frac{x}{t^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad ; \quad v_0 * v_0 \propto \frac{k}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{k^2}{2} t\right) \quad (24)$$

であって、 ϕ の 1 近似を与える解は、 $t \rightarrow \infty$ のときそれぞれ

$$u_1 \sim \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad ; \quad v_1 \sim \frac{k^3}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{k^2}{2} t\right) \quad (25)$$

に漸近する。ただし常数係数は省いた。解の比を作れば

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{u_1}{u_0} \right| &\sim \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad ; \quad \left| \frac{v_1}{v_0} \right| \sim k^3 t^{-1/2} \exp\left(-\frac{k^2}{2} t\right) \\ &\rightarrow 0 \quad \quad \quad \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

つまり u_1/u_0 は、 v_1/v_0 とちがって有界であり、0 に収束することはわかる。Figs 1, 2 にこの事情を誇張して図式的に描いた。いずれも t を固定したときの ϕ の近似を実線で、 ϕ の 1 近似を破線で示している。Fig. 2 では、カスケード過程によって k の大きい所で破線の方がゆっくりに減少するために展開の特異性を生じると考えられるが (文献 2), Fig. 3 参照), Fig. 1

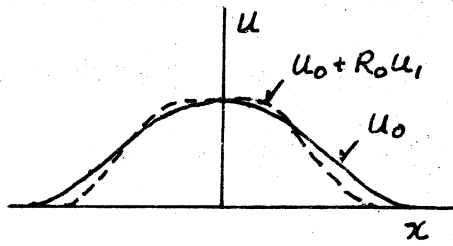


Fig. 1

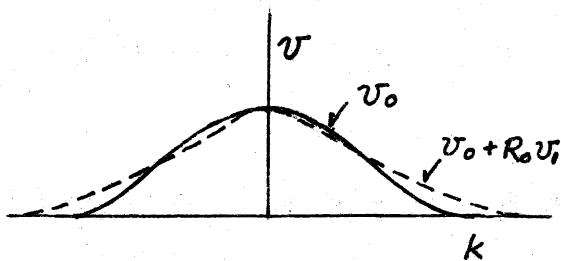


Fig. 2

については、その関係が逆になるので問題がないものと解釈される。実際 x 空間での非線型性は u の勾配を急峻にするように作用することからも、Fig. 1の傾向は理解されよう。

いうまでもなく、本例はまわめて特別な場合について

で、しかも最低次の項を取り扱っただけであるから、一般的結論にはほど遠いが、問題の本質的な性格をある程度示唆しているように思われる。

7° 以上、表題からはだいぶ離れたけれども、弱いモデル乱流のレイノルズ数展開について波数空間で見いだされた特異性に対する一つの解釈の可能性を示した。眼目は、 u の展開(18)が x について一様収束であっても、その項別フーリエ変換(20)が k について同様であるとはいえないことにある。もっとも、乱流とはいいなから、ここでは統計性の要素は何もない。またBurgers方程式の厳密解が知られていることを利用しているので、Navier-Stokes乱流の場合にどうな

るが不明である。予想としては波数空間での事情にかかわりなく，形式的に物理空間に戻れば差し支えないと期待したいのであるが，確実なことは他日を待たなければならない。

参 考 文 献

- 1) 大路通雄：弱い乱れのパラドックス，“第4回乱流シンポジウム”(1972) 51.
- 2) 大路通雄：低レイノルズ数乱れの非線型性，数理所講究録 185 (1973) 112.
- 3) E. Hopf : *Comm. Pure Appl. Math.* 3 (1950) 201.
- 4) J. D. Cole : *Quant. Appl. Math.* 9 (1951) 225.
- 5) M. Van Dyke : *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Acad. Press (1964) New York-London.
- 6) J. D. Cole : *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell Publ. Comp. (1968) Waltham Mass.