

ある種の 2-group について

電通大 金沢 裕

second maximal class の 2-group についてしらべる。

定義

1. 群 G の部分群 $G_2, G_3, \dots$ を次のように定める。

$$G_2 = [G, G], \quad G_{i+1} = [G, G_i] \quad ; \quad i=2, 3, \dots$$

2. 2-群 G が

$$|G| = 2^n, \quad d(G) = r, \quad [G : G_2] = 2^{n-r+1}$$

のとき, 性質 $P_{n,r}$ をもつという。

3. 2-群 G が性質 $P_{n,r}$ ($3 \leq r$) をもつとき, $C_{G_4}(G_2/G_4)$ の G 中での完全送像を G_3 と定める。

4. 性質 $P_{n,r}$ をもつ群 G が次の条件をみたすとき exceptional group という。

$3 \leq r$, かつ $2 \leq i < r$ なるある i に対して

$$G_{i+1} = [G_i, G_i] \text{ が成り立つ。}$$

- 4'. 性質 $P_{n,n}$ をもつ群 G が exceptional group でないとき non-exceptional group といい.
5. 位数 2^n ($4 \leq n$) の群 G が $d(G) = n-2$ のとき second maximal class の 2 -群 といふ. (このとき G は性質 $P_{n,n-2}$ をみかす)

定理 1. second maximal class の 2 -群は non-exceptional group である.

定理 2. G が位数 2^n の second maximal class の 2 -群のとき, G/G_{n-2} は位数 2^{n-1} の second maximal class の meta-abelian な 2 -群である. ($5 \leq n$)

定理 3. G が位数 2^n ($4 \leq n$) の群で, $[G:G_2] = 2^3$, G_2 に含まれる G の正規部分群が $G_2, G_3, \dots, G_{n-1}$ であれば, G は second maximal class の 2 -群である.

これらの定理の証明は次の順序で行う. 次下 G は位数 2^n の群とする.

1. G が second maximal class の 2 -群 であれば次のことが成立する.
 - (1) G は性質 $P_{n,n-2}$ をもつ
 - (2) G_i ($2 \leq i \leq n-1$) は G_2 に含まれる位数 2^{n-i-1} の G の

唯一の正規部分群である.

(3) G/G_i ($2 \leq i \leq n-1$) は位数 2^{i+1} の second maximal class の 2 -群である.

2. $d(G) \geq n-2$ の non-exceptional group の factor group も non-exceptional group である.

3. $5 \leq n$ で, G が second maximal class の群で, かつ non-exceptional group のときは, G から次のような元 $x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ がえられる.

$$G = \langle x_0, G_1 \rangle, \quad G_1 = \langle x_1, y_1, G_2 \rangle,$$

$$G_i = \langle x_i, G_{i+1} \rangle = \langle y_i, G_{i+1} \rangle$$

$$x_i = [x_{i-1}, x_0], \quad y_i = [y_{i-1}, x_0]$$

4. $5 \leq n$, G が second maximal class の meta-abelian group のときは, G は non-exceptional group となる.