

Brownian space 上の Carleson 型測度とその応用

早大理工

新井 仁之 (Hitoshi Arai)

本稿では、解析学でよく知られた Carleson 測度の確率論的アナロジーを Brownian space 上に導入し、その応用を与える。まず、§1 で、Brownian space 上に Carleson 型測度を定義し、それが、解析学における Carleson 測度と類似した性質をもつことを証明する。§2 では、§1 で得た結果を 2 径数化する。その応用として、§3 で、bi-disc 上の Carleson 測度に関する Chang [4] の結果をより一般の領域 (境界が Dirichlet 問題に関する正則点からなっている領域の直積) 上に拡張し、また、§4 では、面積積分の変形に関する Stein [13] の結果を確率論的立場から論ずる。

1. Carleson 型測度. まず、Brownian space の定義をしておき、 $(B_t)_{t \geq 0}$ をある完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された d 次元 Brown 運動で、原点を出発点とするものとする。

$$\mathcal{F}_t = \sigma[B_s : 0 \leq s \leq t] \vee \{P\text{-零集合}\} \quad (t \geq 0)$$

とし、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty (= \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ を仮定する。このとき、組 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t); (B_t))$ を Varopoulos [15] に習って、 d 次元 Brownian space ということにする。よく知られているように、 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$ は、usual condition をみたす filtered probability space になっている (cf. Meyer [11, p. 286])。

つぎに、Carleson 型測度を導入する。

定義 1.1. μ を $([0, \infty[\times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F})$ 上の測度とする。ここで、 $\mathcal{B}([0, \infty[)$ は $[0, \infty[$ の Borel 集合体を表わすものとする。

つぎのノルム

$$\|\mu\|_c \equiv \sup \left\{ \mu([T, \infty[) / P(T < \infty) : T \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-停止時間で、} \right. \\ \left. P(T < \infty) \neq 0 \text{ となるもの} \right\}$$

が有限であるとき、 μ を Carleson 型という。

このように定義しておくと、Carleson 型測度が Carleson 測度と、ほぼ同じ性質をもつことがわかる。実際、つぎの定理が成り立つ。以下、 $\mathcal{M}^p \equiv \{X = (X_t) : X \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale で、} X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^p\} \quad (0 < p \leq \infty)$ とおく。

定理 1.1. $([0, \infty[\times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F})$ 上の測度 μ に対して、

つぎの (1)~(4) は、互いに同値である。

(1) μ は、Carleson 型

$$(2) \quad \exists C > 0, 0 < \forall p < \infty, \forall X \in \mathcal{M}^p: \iint |X|^p d\mu \leq C \|X^*\|_p^p.$$

$$(3) \quad 1 < \forall p < \infty, \exists C_p > 0, \forall X \in \mathcal{M}^p: \iint |X|^p d\mu \leq C_p \|X_\infty\|_p^p.$$

$$(4) \quad 1 < \exists p < \infty, \exists C_p > 0, \forall X \in \mathcal{M}^p: \iint |X|^p d\mu \leq C_p \|X_\infty\|_p^p.$$

証明. (1) $\rightarrow$ (2). 任意の $\lambda > 0$ を固定する. $T = \inf \{t: |X_t| > \lambda\}$

とおく. $\{|X_s| > \lambda\} \subset \{T \leq s\}$ であるから.

$$\{(s, \omega): |X_s(\omega)| > \lambda\} \subset [T, \infty[.$$

である. ゆえに.

$$\begin{aligned} \mu(\{(s, \omega): |X_s(\omega)| > \lambda\}) &\leq \mu([T, \infty[) \leq \|\mu\|_c P(T < \infty) \\ &\leq \|\mu\|_c P(X^* > \lambda) \end{aligned}$$

ゆえに, (1) $\rightarrow$ (2) が成り立つ.

(2) $\rightarrow$ (3). Doob の不等式より明らか. (3) $\rightarrow$ (4) 明らか.

(4) $\rightarrow$ (1). T を任意の $(\mathcal{H}_t)$ 停止時間とする.

$$X_t = E[I_{\{T < \infty\}} | \mathcal{H}_t] \quad (I_{\{t\}} = \text{"}\{t\}\text{の特性関数"}) \text{ とおく.}$$

のとき.

$$X_t \geq E[I_{\{T \leq t\}} | \mathcal{H}_t] = I_{\{T \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

であるから.

$$\begin{aligned} \mu([T, \infty[) &\leq \iint I_{\{T \leq t\}} \mu(dt, d\omega) \leq \iint |X|^p d\mu \\ &\leq C_p \|X_\infty\|_p^p \leq C_p P(T < \infty) \end{aligned}$$

となるから、(4) $\rightarrow$ (1) が成り立つ。■

この定理は、Carleson の定理 (cf. [7, p. 33]) の確率論的アナロジーである。さらに、Fefferman - Stein の定理 (cf. [7, p. 240]) の確率論的アナロジーとして、つぎのことが成り立つ。

定理 1.2. $X \in M^2$ に対して、 $\mu_X(F) = E[\int_0^\infty I_F d\langle X \rangle]$,
 $F \in \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F}$ とおくと、

$$\|X\|_{BMO}^2 = \|\mu_X\|_c$$

である。ただし、ここで、 $\|X\|_{BMO}^2 \equiv \sup_{t \geq 0} \|E[|X_\infty - X_t|^2 | \mathcal{F}_t]\|_\infty$ とする。

定理 1.2 は、Meyer [11, p. 333] から容易に導ける。

今、Carleson 型測度 μ が与えられているとする。すると、定理 1.1 (1) $\rightarrow$ (3) より、すべての evanescent set H に対して、 $\mu(H) = 0$ が成り立っている。したがって、Dellacherie の定理 (cf. [11, p. 250]) を使えば、定理 1.2 は、つぎのように一般化できる。このことは、風巻紀彦先生よりご指摘いただいた。

定理 1.3 (風巻 [10]). μ を $([0, \infty[\times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F})$ 上の測

度とする。このとき、つぎの(1), (2) は同値である。

(1) μ は、Carleson 型である。

(2) ある raw IV 過程 A が一意的に存在して、

$$(a) \exists c > 0, \forall T ((\mathcal{H}_t)\text{-停止時間}): E[A_\infty - A_T | \mathcal{H}_T] \leq c$$

$$(b) \mu(F) = E\left[\int_0^\infty I_F dA\right], F \in \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F}$$

をみたす。

ところで、定理 1.1, 定理 1.2 から Carleson 型測度が、

Carleson 測度の確率論的な類似物になっていることがわかるが、それのみならず、Carleson 型測度から実際に、Carleson 測度をつくることができる。このことについて述べる。簡単のため、 $d=2$ を仮定する。

μ を Carleson 型測度とする。 $\tau = \inf \{t: |B_t| = 1\}$ とおき、 $\Delta \equiv \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ ($\mathbb{C}$ = 複素数体) とおく。 Δ の Borel 集合 F に対して、

$$\tilde{F} \equiv \{(t, \omega): B_t(\omega) \in F\} \cap [0, \tau[$$

とおく。そこで、

$$N_\mu(F) = \mu(\tilde{F}) \quad (F \subset \Delta)$$

とおくと、この N_μ が、 Δ 上の Carleson 測度になっている。実際、

弧 $I \subset \partial\Delta$ に対して、 $S(I) \equiv \{z \in \Delta: \frac{z}{|z|} \in I, 1-|z| \leq \text{"Iの長さ"} / 2\pi\}$

とおき、 $T_I(\omega) = \inf \{t: (t, \omega) \in S(I)\}$ とおくと、 $S(I)$ が progressive

set であるから、 T_I は、 $(\mathbb{H}_t)$ -停止時間である。

さらに、

$$\widetilde{S(I)} \subset [T_I, \infty[, \quad P(T_I < \infty) \leq A|I| \quad (A: \text{絶対定数})$$

であるから、

$$N_\mu(S(I)) \leq \mu([T_I, \infty[) \leq \|\mu\|_c P(T_I < \infty) \leq A\|\mu\|_c |I|$$

が成り立つ。

2. Bi-Brownian space 上の Carleson 測度。 $(\Omega_j, \mathbb{H}^j), P^j;$

$(\mathbb{H}_{t_j}^j); (B_{t_j}^j)$ を $n(j)$ 次元 Brownian space とする ($n(j) \geq 1; j =$

$1, 2$)。 $(\Omega, \mathbb{H}, P)$ を $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{H}^1 \otimes \mathbb{H}^2, P^1 \otimes P^2)$ の完備化とし、

$$F_{st} = (\mathbb{H}_s^1 \otimes \mathbb{H}_t^2) \vee \{P\text{-零集合}\} \quad (s, t \geq 0)$$

とおく。このとき、 $(\Omega, \mathbb{H}, P; (F_{st}); B^1, B^2)$ を $B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間

という。このとき、 $B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間上に Carleson 型測度を導

入する。そのために、まず、random region を定義しておく。

定義 (Sato [12])。 $\mathcal{P}$ を $\{A \times]s_1, t_1[\times]s_2, t_2[: 0 \leq s_j < t_j;$

$j=1, 2; A \in \mathbb{H}_{s_1, s_2}\}$ で生成される σ -集合体とする。

$R'_+ =]0, \infty[$ とする。 Ω から $(R'_+)^2$ の中集合への写像 T が、

$$\{(s, t, \omega) \in (R'_+)^2 \times \Omega : (s, t) \in T(\omega)\} \in \mathcal{P}$$

をみたすとき、 T を random region という。

この random region を使って、 $B_{N(1)} \times B_{N(2)}$ 上の Carleson 型測度を
つぎのように定義する。

定義 2.1. μ を $((R'_+)^2 \times \Omega, \mathcal{B}(R'_+)^2 \otimes \mathbb{F})$ 上の測度とする。た
だし、 $\mathcal{B}(R'_+) = "R'_+ \text{ の Borel 集合体 }"$ とする。Random region T
に対して、 $S(T) \equiv \{(s, t, \omega) \in (R'_+)^2 \times \Omega : (s, t) \in T(\omega)\}$ とおく。 μ
が、

$$\|\mu\|_c \equiv \sup \{ \mu(S(T)) / P(T \neq \emptyset) : T \text{ は random region で、}$$

$$P(T \neq \emptyset) > 0 \text{ をみたす} \} < \infty$$

となるとき、 μ を $(B_{N(1)} \times B_{N(2)})$ 上の Carleson 型測度というこ
とにする。

さて、ここで K^p 空間の定義をしておく。

$K^p \equiv \{ X = (X_{st}) : (X_{s0})_s, (X_{0t})_t \text{ はそれぞれ } (\mathbb{F}_s^1), (\mathbb{F}_t^2) \text{ に適} \\ \text{合した局所 martingale で、} \Delta X_{st} \equiv X_{st} - X_{s0} - X_{0t} + X_{00} \text{ は、[3]} \\ \text{の意味での 2 径数確率積分表示をもち、} X^* \equiv \sup_{s,t} |X_{st}| \\ \in L^p(\Omega, \mathbb{F}, P) \} \quad (0 < p \leq \infty) \text{ とおく。}$

このとき、定理 1.1 と同様にして、つぎのことが得られる。

定理 2.1. $((R'_+)^2 \times \Omega, \mathcal{B}(R'_+)^2 \otimes \mathbb{F})$ 上の測度 μ に対して、つぎ
の (1) ~ (4) は互いに同値である。

- (1) μ は $(B_{n_1}, \times B_{n_2}, \text{上 } \tau)$ Carleson 型
- (2) $\exists C > 0, 0 < \forall p < \infty, \forall x \in K^p: \iint |x|^p d\mu \leq C \|x^*\|_p^p$
- (3) $1 < \forall p < \infty, \exists C_p > 0, \forall x \in K^p: \iint |x|^p d\mu \leq C_p \|x_{\infty\infty}\|_p^p$
- (4) $1 < \exists p < \infty, \exists C_p > 0, \forall x \in K^p: \iint |x|^p d\mu \leq C_p \|x_{\infty\infty}\|_p^p$

また、 $(B_{n_1}, \times B_{n_2}, \text{上の})$ Carleson 型測度と Sato [12] による BMO とは、つぎのような関係にある。

定理 2.2. $x \in K^2$ で、 $x = \Delta x$ とする。 $\mu_x(F) \equiv E\left[\int_0^\infty \int_0^\infty I_F d\langle x \rangle\right]$, $F \in \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathbb{F}$ とおくと、

$$\|\mu_x\|_c = \|x\|_{BMO}^2$$

である。ここで、 $\|x\|_{BMO} = \sup\{\|x_T\|_2 / \sqrt{P(T \neq \phi)} : T \text{ は random region で、} P(T \neq \phi) > 0\}$ 。

3. 直積領域上の Carleson 測度への応用. S. Y.-A. Chang [4] は、つぎのことを証明した。

定理 C. $Bi-disc \Delta^2$ 上の有界な bi-harmonic 関数 u に対して、 $d\mu_u \equiv |\nabla_1 \nabla_2 u(z_1, z_2)|^2 \log \frac{1}{|z_1|} \log \frac{1}{|z_2|} dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2$ は、 Δ^2 上の Carleson 測度である。すなわち、任意の開集合 $U \subset \partial\Delta \times \partial\Delta$

に対して、

$$(*) \quad \mu_u(S(U)) \leq C|U|$$

をみたす。ただし、ここで、 $S(U) \equiv \{(z, w) \in \Delta^2 : I_z \times I_w \subset U\}$,
 $I_z \equiv \{e^{i\varphi} : |\varphi - \operatorname{Arg} z| < 1 - |z|\}$ であり、 C は U に依存しない定数である。

また、Chang [4] は、条件 (*) がつきのことと同値であることも示している。

$$(**) \quad 1 < \forall p < \infty, \exists C_p > 0, \forall f \in L^p(\partial\Delta \times \partial\Delta) :$$

$$\int |\tilde{f}|^p d\mu_u \leq C_p \|f\|_p^p$$

($\tilde{f}$ は f の Δ^2 への bi-harmonic extension)。

この § では、定理 C をより一般の領域へ拡張する。

以下、本稿では、 $D_j \subset \mathbb{R}^{n(j)}$ ($n(j) \geq 2; j=1, 2$) で、境界が Dirichlet 問題に関する regular boundary point (cf. [8, p.168]) になっている有界領域を表わすものとする。

$z_j \in D_j$ に対して ω_{z_j} で z_j と D_j に関する調和測度を表わし、 dV_j で $n(j)$ 次元 Lebesgue 測度を表わす。

本稿では、 $z_j^{(0)} \in D_j$ を 1 つとり、固定し、 $\omega_{z_j^{(0)}}$ を ω_j と略して記すことにする。また、簡単のため、

$$D = D_1 \times D_2, \quad \partial_0 D = \partial D_1 \times \partial D_2, \quad d\omega = d\omega_1 \times d\omega_2, \quad dV = dV_1 \times dV_2$$

とする。 $G_j(\cdot, \cdot)$ を D_j の Green 関数とする。

$$f \in L^1(d\omega) \text{ に対して、 } \tilde{f}(z_1, z_2) = \iint f d\omega_{z_1} d\omega_{z_2} \quad ((z_1, z_2) \in D)$$

とおく。

この § での主要結果は、つぎの定理である。

定理 3.1. $f \in L^p(d\omega)$ とする。 $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D$ に対して、

$$d\mu_f^\xi(\eta_1, \eta_2) \equiv G_1(\xi_1, \eta_1) G_2(\xi_2, \eta_2) |\nabla_1 \nabla_2 \tilde{f}(\eta_1, \eta_2)|^2 dV(\eta_1, \eta_2)$$

とおくと、 $d\mu_f^\xi$ は、任意の $1 < p < \infty$ に対して、 $L^p(d\omega)$ 有界になる。すなわち、

$$1 < \forall p < \infty, \quad \exists C_{p, f, \xi} > 0, \quad \forall g \in L^p(d\omega):$$

$$\int_D |g|^p d\mu_f^\xi \leq C_{p, f, \xi} \int_{\partial_0 D} |g|^p d\omega$$

が成り立つ。

この定理は、定理 2.1 から導かれる。

ここで、 D 上の Carleson 測度について述べる。

$$B_j(x_j, r) \equiv \{z_j \in \mathbb{R}^{n(j)} : |z_j - x_j| < r\} \quad (x_j \in \mathbb{R}^{n(j)}, r > 0) \text{ とし、}$$

$$S_j(x_j, r) \equiv B_j(x_j, r) \cap \partial D_j \text{ とおく。}$$

$$z_j \in D_j \text{ に対して、 } d_j(z_j) \equiv \inf \{|z_j - x_j| : x_j \in \partial D_j\} \text{ とする。}$$

前述の S. Y.-A. Chang [4] の bi-disc Δ^2 上の Carleson 測度の定

義を修正して、 D 上の Carleson 測度を つぎの ように 定義する。

定義 3.1. μ を D 上の 測度 とする。 μ が、

$$\exists C > 0, \forall U \subset \partial_0 D \text{ (開集合)} : \mu(S(U)) \leq C \omega(U)$$

をみたすとき、 μ を ω -Carleson 測度 といふことにする。ただし、ここで、

$$S(U) \equiv \{ (z_1, z_2) \in D : S_1(x_1, d_1(z_1)) \times S_2(x_2, d_2(z_2)) \subset U \text{ が} \\ |x_j - z_j| = d_j(z_j) \text{ をみたすすべての } x_j \in \partial D_j \text{ に対して成り立つ } j = \\ 1, 2) \} \text{ とする。}$$

このとき、つぎのことが成り立つ。

定理 3.2. D_j が、Jerison-Kenig [9] の意味での NTA 領域であるとする。つぎの (1), (2), (3) は同値である。

(1) μ は、 ω -Carleson 測度

(2) $\mu(D) < \infty$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists C_{\mu, \varepsilon} > 0$, $\forall U \subset \partial_0 D$ (開集合) :

$$\mu(D_\varepsilon \cap S(U)) \leq C_{\mu, \varepsilon} \omega(U),$$

ここで、 $D_\varepsilon \equiv \{ (z_1, z_2) \in D : d_j(z_j) < \varepsilon, j = 1, 2 \}$ 。

(3) $1 < \forall p < \infty$, $\exists C_p > 0$, $\forall f \in L^p(d\omega) : \int_D |\tilde{f}|^p d\mu \leq C_p \int_{\partial_0 D} |f|^p d\omega$ 。

したがって、定理 3.1 及び定理 3.2 より、つぎの系が成り

It follows.

系 3.3. D_j を NTA 領域とする ($j=1, 2$). $f \in L^\infty(dw)$, $z \in D$ に対して、定理 3.1 で定めた測度 $d\mu_f^z$ は、 ω -Carleson 測度である。

定理 C は、この系 3.3 の 1 つの系として導かれる。また、定理 2.1 の系として、つぎも得られる。以下、

$H^1 \equiv \{f \in L^1(dw) : \|f\|_{H^1} \equiv \|N(\tilde{f})\|_{L^1(dw)} < \infty\}$, $N(\tilde{f})(x_1, x_2) \equiv \sup \{|\tilde{f}(z)| : z \in P^1(x_1) \times P^2(x_2)\}$, $P^j(x_j) \equiv \{z_j \in D_j : |z_j - x_j| < 2d_j(z_j)\}$ とおく。

系 3.4. $D_j \subset \mathbb{R}^2$ を単連結な NTA 領域とする ($j=1, 2$). $f \in L^2(dw)$ に対して、つぎの (1), (2), (3) は同値である。

- (1) f は H^1 の双対空間に属する。
- (2) $\forall z \in D : d\mu_f^z$ は ω -Carleson 測度である。
- (3) $\exists z \in D : d\mu_f^z$ は ω -Carleson 測度である。

この結果は、 D が bi-disc の場合には、R. Fefferman [6] によって得られている。系 3.4 の D_j に関する条件が系 3.3 に比べて複雑である理由は、その証明に関数論の Walsh の定理 (cf. [14, p.170]) を使

っているという (おそらく technical) なものである (cf [1])。

注意. 定理 3.1 及び系 3.3 の結論は、 $f \in L^\infty(d\omega)$ でなくとも、

$$(\tilde{f}(\tau(\xi_1) \wedge s, X_{\tau(\xi_2) \wedge t}^2))_{st} \in \text{BMO} \quad (\text{ここで、} X^j = B^j + \xi_j; \tau(\xi_j))$$

$= \inf \{t_j : X_{t_j}^j \notin D\}$) であれば成り立つ。

4. Varopoulos の不等式への応用.

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}_{st}; B^1; B^2)$ を $B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間とし、

$$B^i = (x_1^i, \dots, x_{n(i)}^i), \quad i=1, 2$$

とおく。

$X \in K^p$ ($0 < p \leq \infty$) に対して、

$$|\nabla_i X_{st}|^2 = \sum_{j=1}^{n(i)} \left| \left(\frac{\partial X}{\partial x_j^i} \right)_{st} \right|^2 \quad (i=1, 2)$$

とおく。ここで、 $\frac{\partial}{\partial x_j^i}$ は通常の確率微分である。

$X, Y \in \bigcup_{p>0} K^p$ に対して、

$$V(X, Y) \equiv \left(\int_0^\infty \int_0^\infty |\nabla_1 X_{st}|^2 |\nabla_2 Y_{st}|^2 ds dt \right)^{1/2}$$

とおく。最近、N. Varopoulos ([16]) は、つぎの不等式を証明した：

$1 < p < 2$, $2 < q < \infty$, $1/r = 1/p + 1/q$, $1/p + 2/q < 1$ のとき、

$$\exists C_{p,q} > 0, \forall X \in K^p, \forall Y \in K^q : \|V(X, Y)\|_r \leq C_{p,q} \|X^*\|_p \|Y^*\|_q$$

この不等式は、定理 2.1 を使うことによって、つぎのよう

に拡張できる。

定理4.1. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $1/r = 1/p + 1/q$ とする。このとき、

$$\exists C_{p,q} > 0, \forall X \in K^p, \forall Y \in K^q: \|V(X, Y)\|_r \leq C_{p,q} \|X^*\|_p \|Y^*\|_q.$$

証明は、[2] にゆずるが、 $0 < p < 2$, $q = \infty$ の場合に、定理2.1. を使う。

以下、 $n(1) = n(2) = 2$, $D_j \subset \mathbb{R}^2$ ($j = 1, 2$), 及び D_j が (多重連結) 有界 C^2 領域であることを仮定する。容易にわかるように、前述の Varopoulos の作用素 $V(\cdot, \cdot)$ は、E. Stein [13] によって導入された面積積分

$$B(u, v)(x) = \left(\iint_{P(x)} |\nabla_1 u(z_1, z_2)|^2 |\nabla_2 v(z_1, z_2)|^2 dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2 \right)^{1/2},$$

$$P(x) \equiv P^1(x_1) \times P^2(x_2) \quad (x = (x_1, x_2) \in \partial_0 D)$$

の確率論的アナロジーになっている。

定理4.1 の系として、 $B(\cdot, \cdot)$ に関する Stein の定理 ([13, Theorem]) の確率論的精密化が導かれる：

定義. $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D$ に対して、 $X^j(\xi_j, t_j) = B_{t_j}^j + \xi_j$ とし、
 $\tau(\xi_j) = \inf \{ t_j : X^j(\xi_j, t_j) \notin D_j \}$ ($j = 1, 2$) とおく。

$$H^p(D) \equiv \{ u : u \text{ は } D \text{ 上の bi-harmonic 関数で、} \|u\|_{H^p} \equiv \|N(u)\|_{L^p(dw)} < \infty \}$$

とし、 $u, v \in U_{p>0} H^p(D)$ に対して、

$$\tilde{B}^{\xi}(u, v) = \left(\int_0^{\tau(\xi_1)} \int_0^{\tau(\xi_2)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 (X^1(\xi_1, s), X^2(\xi_2, t)) ds dt \right)^{1/2}$$

$$M^{\xi} u = \sup \{ |u(X^1(\xi_1, t_1), X^2(\xi_2, t_2))| : 0 \leq t_j < \tau(\xi_j), j=1, 2 \}$$

とおく。

Steinの定理 ([13, Theorem]) の確率論的精密化はつき"のもの
である。

系 4.2. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $1/r = 1/p + 1/q$ とする。このとき、

$$\forall \xi \in D, \exists C_{r, \xi} > 0, \exists C_{p, q, \xi} > 0, \exists C'_{p, q, \xi} > 0,$$

$$\forall u \in H^p(D), \forall v \in H^q(D) :$$

$$\|B(u, v)\|_{L^r(d\sigma)} \leq C_{r, \xi} \|\tilde{B}^{\xi}(u, v)\|_{L^r(dP)}$$

$$\leq C'_{p, q, \xi} \|M^{\xi} u\|_{L^p(dP)} \|M^{\xi} v\|_{L^q(dP)}$$

$$\leq C_{p, q, \xi} \|u\|_{H^p(D)} \|v\|_{H^q(D)}$$

ただし、ここで、 $d\sigma$ は、 $\partial_0 D$ 上の induced Euclidean measure
とする。

(注) Steinの定理は、 D が bi-disc, $\xi = (0, 0)$ のとき、

$$\|B(u, v)\|_{L^r(d\sigma)} \leq C_{p, q} \|u\|_{H^p(D)} \|v\|_{H^q(D)} \quad \text{ということを主張している。}$$

5. 本稿での結果の証明及び、そのほひ詳しいことゝは、
[1], [2] として別に発表する予定です。

参考文献

- [1] H. Arai, Carleson measures on product domains and 2-parameter Brownian martingales, preprint.
- [2] H. Arai, On an inequality of Varopoulos for 2-parameter Brownian martingales, preprint.
- [3] Brossard and L. Chevalier, Calcul stochastiques et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes; application aux fonctions bi-harmoniques, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 97-120.
- [4] S. Y. -A. Chang, Carleson measure on bi-disc, Ann. of Math. 109 (1979) 613-620.
- [5] E. Decamp, Caractérisation des espaces BMO de martingales dyadiques à deux indices, et de fonctions bi-harmoniques sur $R_+^2 \times R_+^2$, Thèse de doctorat de 3^e cycle, Grenoble (1979).
- [6] R. Fefferman, Bounded mean oscillation on polydisc, Ann. of Math. 110 (1979), 395-406.
- [7] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
- [8] L. L. Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [9] D. S. Jerison and C. E. Kenig, Boundary behaviour of harmonic functions in non-tangentially accessible domains, Advan. in Math. 46 (1982), 80-147.
- [10] 風巻紀彦, Private communications (1984).

- [11] P. A. Meyer, Un cours sur les integrales stochastiques, Lect. Notes in Math., 511, Springer Verlag, (1976), 245-400.
- [12] H. Sato, Caractérisation par les transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $R_+^{m+1} \times R_+^{n+1}$, Thèse de doctrat doctrat de 3^e cycle, Grenoble (1979).
- [13] E. M. Stein, A variant of the area integral, Bull. Sc. math. 2^e Série 103 (1979), 449-461.
- [14] 竹之内, 阪井, 貴志, 神保. 関教環. 培風館.
- [15] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p -functions for Brownian motion and several variables, J. Func. Analysis 39 (1980), 85-121.
- [16] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2^e série 105 (1981), 181-224.