

液膜流における 2 次元パルス

京大理学部 川原 琢治 (Takuji Kawahara)

京大理学部 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

京大理学部 岩崎 宏 (Hiroshi Iwasaki)

斜面を流下する粘性流体の薄い層状流（液膜流）の上に生じる長波長の不安定波動は、不安定性、散逸性、分散性をもつ非線形偏微分方程式によって近似的に記述される。本報告では、この種の近似方程式の空間 2 次元の場合を取り上げ、初期値問題の数値解の振舞いをもとに 2 次元軸対称ソリトンの存在の可能性を議論する。具体的な数値計算は次の形の空間 2 次元の偏微分方程式

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} + \beta \Delta u_x + \gamma \Delta^2 u = 0 \quad (1)$$
$$(\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

に対して行われる。以下下付き添字 x, t などは微分を表すものとする。 α, β, γ は正の定数であり、対応する項はそれぞれ不安定性、分散性、散逸性を表す。

数値実験の結果は分散性の相対的な強弱により異なる。初期値問題は 2 次元不安定を起こし、2 次元的な局在構造を生じる。分散性が弱い場合には、その構造は一定とはならず不規則な変動を示す。分散性が強い場合には、任意の初期条件から同一振幅の軸対称に近い 2 次元パルスが複数個生成され、十分長い時間の後には、パルスは準定常な格子状配列に近づく。

この2次元パルスが分散性が強い極限における軸対称パルスとどのような関係にあるか、極限における軸対称パルスはソリトンであるか否かを調べる。

1. 液膜流

液膜流の観測例としては Kapitza[1]の実験が有名である。ガラス円柱の表面に水を流し、スパークによる影絵法を用いて周期波あるいは単一波を観測した。これは円柱表面の軸対称な流れの例であり、円周方向に一樣となる場合を考えているので、その意味で1次元的である。一方、平板上の液膜流では波のパターンは流れに垂直な方向に一樣とはならず局在した馬蹄形構造をもち、波形は不規則な変動を示す。そのような不規則波の観測例を図1に示す。Petviashvili は(1)式の $\beta = 0$ の場合の進行定常波解を数値計算によって求め図2のような局在する馬蹄形パルス解を得た[2]。そしてこれが観測によるパターンと類似していることを指摘している。

液膜流における波動で特徴的な点は、流体層の深さ(h_0)に比べはるかに長い波長(λ)をもつ不安定波が発生するということである。従って、いわゆる長波長近似が成り立つことになる。ここでは、長波長近似により(1)のような式が導出される物理的背景について触れておく。

いま図3のように、深さ h_0 の粘性流体が傾き θ の斜面上を流下する場合を考える。斜面の方向に x 軸、斜面に垂直に z 軸、流れに直角な方向に y 軸をとるとする。重力加速度を g 、表面変位を $z = \eta(x, y, t)$ で表す。この流れは定常な層流解

$$\begin{aligned} U &= (g \sin \theta / \nu)(h_0 z - z^2/2), \quad V = W = 0, \\ P &= P_0 - \rho g \cos \theta (z - h_0), \end{aligned} \quad (2)$$

をもつ。 ν は動粘性係数、 ρ は密度、 P は圧力を表す。流れを特徴づける無次元パラメータとして、液膜の Reynolds 数： $R = U_0 h_0 / \nu$ 、表面張

力の効果の強さを表す Weber 数: $We = \sigma / \rho g h_0^2 \sin \theta$ (σ : 表面張力) および波長と水深の比である浅水パラメター: $\mu = h_0 / \lambda$ が考えられる。

定常層流解は一般に不安定となることが解 (2) の線形安定性を調べることにより示される。 $\theta \neq \pi / 2$ の場合には Reynolds 数が臨界値 $R_c = 5 \cot \theta / 4$ を越えるとき不安定となる。 $\theta = \pi / 2$ の場合はすべての Reynolds 数 ($R > 0$) に対して不安定となる[3]。

不安定波動の振舞いは一般には粘性流体に対する方程式から決定されるべきものであるが、液膜流の波動に対しては波長が水深に比べ十分長いという近似 (長波長近似) が用いられる。すなわち、浅水パラメターが十分小さく $\mu = h_0 / \lambda \ll 1$ とすることができ、表面変形 η を記述する近似方程式を導くことができる。近似方程式の導出は Benney[4]を始め多くの論文で取り扱われている。(Roskes[5], Atherton-Homsy[6], Krishna-Lin[7][8], Topper-Kawahara[9])。 μ 展開による長波長近似を行うと η に対する方程式は、例えば

$$\begin{aligned} \eta_t + 2\eta^2 \eta_x + \mu \{ [(8/15)(R\eta^3 - 5\cot\theta/4)\eta^3 \eta_x + (2/3) \\ \mu^2 W \eta^3 (\eta_{xxx} + \eta_{xyy})]_x + [(-2/3)\cot\theta \eta^3 \eta_y + (2/3)\mu^2 W \\ \eta^3 (\eta_{xyy} + \eta_{yyy})]_y \} + \mu^2 \{ [(32R^2 \eta^6 / 63 + 2 - 40R \eta^2 \cot\theta \\ / 63) \eta^4 \eta_{xx} + (5/12 - 104R \eta^3 \cot\theta / 315) \eta^4 \eta_{yy} + B_1 \eta_x^2 \\ + B_2 \eta_y^2 + C_1 \eta_{xxxx} + C_2 \eta_{xxyy} + C_3 \eta_{yyyy} + \dots]_x + \\ [(19/12 - 32R \eta^3 \cot\theta / 105) \eta^4 \eta_{xy} + D_1 \eta_x \eta_y + E_1 \eta_{xxxy} \\ + E_2 \eta_{xyyy} + \dots]_y \} + O(\mu^3) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

のようになる。 B_1 , B_2 などは具体的な表示を与えた他の項と同様に η の多項式で表される。(3) 式は $\mu \ll 1$ という近似だけを用いて得られたものであり、 μ が小さければ変位 η が有限の場合にも適用することができる。 $O(\mu)$ の項は η について非線形で x , y に関する偶数階微分を含んでいるので、非線形の不安定性または散逸性を表す。 $O(\mu^2)$ の項は x , y につ

いて奇数階微分を含んでおり非線形分散性を表すと言える。通常の流体の液膜流に対しては、Reynolds 数 R は $O(1)$ であり、Weber 数 We は多くの流体に対し $\mu^2 We \sim O(1)$ となる。 μ の大きさと、非線形性の程度の相対的な大小関係に応じて、さらに様々な可能性があるが、 $\eta = 1 + u$ ($u \ll 1$) として展開すると簡単な方程式として次式を得る：

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} - \alpha' u_{yy} + \beta \Delta u_x + \gamma \Delta^2 u = 0 \quad (4)$$

$$(\alpha, \alpha', \beta, \gamma > 0, \Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

1次元の場合は Benney により最初に得られた方程式

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (5)$$

となり、 $\alpha = \gamma = 0$ の極限ではソリトン解をもつ KdV 方程式、 $\beta = 0$ の極限ではカオスの振舞いを示す Kuramoto-Sivashinsky 方程式となる。

1次元の方程式 (5) の初期値問題を周期境界条件のもとに数値的に解いた結果の概略は次のようである。分散性が相対的に弱く 0 に近い場合には、解の振舞いは Kuramoto-Sivashinsky カオスと呼ばれる不規則変動を示す。分散性の増大に伴い、局在するパルス構造が明確となり、各パルスはその形をほぼ保って時間発展することになる。変動の不規則性は局在パルスの相互作用による変動として定性的に記述されることが示されている。分散性が相対的に強い場合には、同一の振幅のソリトンのパルスが並んだ平衡解が漸近状態となる。パルスの振幅が一定となることは KdV ソリトンからの摂動により説明することができる [10]。このように、1次元の方程式 (5) においてはパルスの局在構造が系の時間発展で基本的な役割を演じる。とくに分散性の強い場合には、KdV ソリトンの摂動解が初期値問題で形成される同一振幅のパルスの性質とよく一致することが明らかにされている。

2. 数値計算の結果

(4) 式の数値計算の結果は α' が小さければ $\alpha' = 0$ の場合と定性的に同じであったので以下では $\alpha' = 0$ とし、スケール変換した次式

$$u_t + u u_x + u_{xx} + \delta \Delta u_x + \Delta^2 u = 0 \quad (6)$$

を考える。 $\delta \equiv \beta / \sqrt{\alpha \gamma}$ は分散性の相対的な強さを表すパラメーターである。2次元の周期領域を考え、適当な初期条件のもとに(6)式を数値的に解く。空間領域を 64×64 ととりフーリエ分解を用いる。 δ の大きさに応じて適当な mesh size を選び非線形項は擬スペクトル法により評価し、時間発展は Runge-Kutta 法を用いて求める。

(6) 式の線形分散関係は

$$\omega = -\delta k (k^2 + l^2) + i \{k^2 - (k^2 + l^2)^2\} \quad (7)$$

で与えられる。 k, l は x, y 方向の波数成分を表す。従って、 ω の虚数部が正となる波数に対し一様状態は不安定となる。 y 方向の波数 l は安定化に働くので、 $k = 1/\sqrt{2}, l = 0$ で成長率が最小となる。このため、初期状態は不安定性により1次元の波動構造を生じる。さらに、この1次元の波動は2次元不安定となり、流れに垂直な y 方向にも構造を生じることになる。その後の時間発展の様子は分散性の相対的な強さ (δ の大小) に応じて異なる。 δ が小さい場合には変動は不規則で、Petviashvili が得た馬蹄形のパルス解に似た2次元の構造を生じるが、全般的な振舞いはカオス的である。 δ を大きくするに従い一定振幅の2次元パルスを生じ十分長時間経過した後には格子状の準定常配列に近づいて行く。 $\delta = 0$ と $\delta = 2.5$ の場合の数値計算の結果を図4と図5に示す。特に興味深いのは δ を大きくするに従い生成されるパルスが軸対称な釣鐘型に近くなることである。このことは1次元の場合に KdV ソリトンからの摂動により分散性が

強い場合の解が記述できたこととの類推で言うと、2次元の軸対称なソリトンが可能となることを示唆している。そこで純分散性の極限 ($\delta \rightarrow \infty$) におけるソリトン解についてまず考えてみよう。

3. 純分散性方程式

(4) において不安定性と散逸性を表す項を無視した純分散性の方程式

$$u_t + u u_x + \Delta u_x = 0 \quad (8)$$

を考える。この式では分散項の係数が1となるようにスケールし直している。(8)式は磁化プラズマにおけるイオン音波を記述する方程式として導かれ Zakharov-Kuznetsov 方程式と呼ばれているものと同じである[11, 12]。また、これはドリフト波の渦ソリトン (Nozaki[13]) やロスビー波ソリトン (Petviashvili[14]) を記述する方程式でもある。

(8)式の定常進行波解は $u(x - ct, y)$ の形を仮定し、一度積分を実行すると

$$\Delta u + u^2/2 - cu = 0 \quad (9)$$

を満たすことになる。軸対称解は

$$(r^{-1} d/dr)(r du/dr) + u^2/2 - cu = 0 \quad (10)$$

を数値的に解いて図6のように求まり、釣鐘型パルスとなる。この軸対称解が前節に述べた数値実験における一定振幅パルスに対応するものであるか否かを知る試みの一つとして、この解を第0近似として、(6)式の不安定性と散逸性を表す項を摂動項と考えて振幅と速度を決定する。軸対称解の解析的表現が得られていないので振幅と速度の決定は数値的に行う。

δ をパラメーターとして表現したとき振幅は 1.92δ 、パルスの速度は $c = 0.4\delta$ で与えられる。この関係は初期値問題の数値実験で得られるパルスの振幅および速度と δ が大きいときよく一致する。従って、軸対称パルスが $\delta \rightarrow \infty$ での純分散性方程式のソリトン解となることが期待される。

4. 軸対称解はソリトンか?

数値実験の結果から軸対称ソリトン解の存在が予想されるので、Zakharov-Kuznetsov 方程式の厳密解の可能性について考える。そのため発展方程式 (8) または定常進行波に対する式 (9) を考える。(8) 式で $u = v_x$ と置き、一度積分すると

$$v_t + v_x^2/2 + v_{xxx} + v_{xyy} = 0 \quad (11)$$

となる。

ここで

$$v = g/f = g/1 + mg \quad (12)$$

の形の解を仮定すると、 g が満たすべき関係は

$$\begin{aligned} g_t + g_{xxx} + g_{xyy} &= 0, \\ g_x^2 - 12mg_x g_{xx} - 4mg_x g_{yy} - 8mg_y g_{xy} &= 0, \\ g g_x - 12m(g_x^2 + g_y^2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

の3式となる。(13) を満たす解として

$$\begin{aligned} g &= \exp \xi, \quad \xi = p[x - (p^2 + q^2)t] + qy, \\ v &= \exp \xi / 1 + [p/12(p^2 + q^2)] \exp \xi \end{aligned} \quad (14)$$

が得られ

$$\begin{aligned}
 u &= v_x \\
 &= 3(p^2 + q^2) \operatorname{sech}^2\{p[x - (p^2 + q^2)t]/2 + qy/2\}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

となる。これは準1次元のパルス解である。

(9)の厳密解、とくに軸対称解、の可能性について著者らはいくつかの試みを行ったが、現在のところ1ソリトン解の解析的表現を得ることに成功していない。ソリトン解の存在と安定性の理論的証明がなされているようであるが[15]著者らの知る限りでは解析的な表現は得られていないようである。

数値的に得られた軸対称パルス解が実際にソリトンの振舞いを示すか否かを見るために衝突の実験を行った。まず最初に、1パルスを初期条件として数値実験を行い軸対称パルス解の安定性を調べた。パルス幅の約10倍の距離を進む間パルスは変化しないことを確かめた。また、ランダムな攪乱を加えてもパルスは安定に伝わることも示された。このことから孤立した軸対称パルス解は安定であるといえる。

図7は速度1の準1次元解((15)で $p=1$, $q=0$ の場合)と速度4の軸対称パルス解(数値解)の衝突の数値実験の結果を示す。図には $0.5n$ ($n=1\sim 20$)となる等高線がプロットされている。準1次元解は軸対称解により乱されていることがわかる。軸対称解は長時間にわたって近似的に安定である。

図8は速度1と4をもつ振幅の異なる軸対称パルス解を中心線が一致するように衝突させた場合の結果を示す。 $0.01+2n$ ($n=0,1,2,\dots$)の等高線がプロットされている。図9は図8と同じ場合のパルス波形の変化を示す。パルスの中心線での断面図を表している。図10に振幅変化、図11にパルスピークの軌道を示す。図8~11から、衝突により大きい

パルスの振幅が増大するとともに小さいパルスの振幅が減少し、さざ波が生成されることがわかる。また、パルスは衝突により図11に示されるような位相ずれを起こす。

以上、数値実験の結果から、単一の軸対称パルスは安定に伝わるが衝突に関しては非弾性的でありパルスの振幅が数%程度変化することがわかる。

(8)式は純分散性の非線形方程式であるが、このように衝突に際しパルスの振幅が保存されない非弾性的変化を示すことは興味深い結果である。このことと軸対称パルスの解析的表現(すなわち(8)~(10)式の厳密解)の可能性(但し(10)式はPainlevéの超越関数を与える微分方程式には属さない)との関係、あるいは衝突に際し振幅変化を起こすような分散性非線形系での相互作用の解析的な記述が可能か否かなどは今後の問題と思われる。

参考文献

- [1] P.L.Kapitza: Wave flow of thin layers of a viscous fluid.
Collected Papers of P.L.Kapitza, Vol.II (Ed.D.ter Haar)
Pergamon Press, London (1965) 662-709.
- [2] V.I.Petviashvili: Multidimensional and dissipative solitons.
Physica 3D (1981) 329-334.
- [3] 川原琢治: 液膜流におけるソリトン. 数理科学 260 (1985) 54-61.
- [4] D.J.Benney: Long waves on liquid films. J.Math.& Phys. 45
(1966) 150-155.
- [5] G.J.Roskes: Three-dimensional long waves on a liquid film.
Phys.Fluids 13 (1970) 1440-1445.
- [6] R.W.Atherton and G.M.Homsy: On the derivation of evolution
equations for interfacial waves. Chem.Eng.Comm. 2 (1976) 57-77.
- [7] M.V.G.Krishna and S.P.Lin: Nonlinear stability of a viscous
film with respect to three-dimensional side-band disturbances.

- Phys.Fluids 20(1977)1039-1044.
- [8] S.P.Lin and M.V.G.Krishna: Stability of a liquid film with respect to initially finite three-dimensional disturbances. Phys.Fluids 20(1977)2005-2011.
- [9] J.Topper and T.Kawahara: Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid. J.Phys.Soc.Jpn. 44(1978) 663-666.
- [10] T.Kawahara and S.Toh: Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system. Phys.Fluids 31 (1988)2103-2111.
- [11] V.E.Zakharov and E.A.Kuznetsov: Three-dimensional solitons. Sov.Phys.JETP 39(1974)285-286.
- [12] E.W.Laedke and K.H.Spatschek: Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields. Phys.Fluids 25(1982)985-989.
- [13] K.Nozaki: Vortex solitons of drift waves and anomalous diffusion. Phys.Rev.Lett. 46(1981)184-187.
- [14] V.I.Petviashvili: Self-focusing of an electrostatic drift wave. Sov.J.Plasma Phys. 3(1977)150-151.
- [15] V.I.Petviashvili and O.A.Pokhotelov: Solitary vortices in plasmas. Sov.J.Plasma Phys. 12(1986)651-661.



図 1。 平板上の 2 次元不規則波の観測例 (Petviashvili[2]による)。

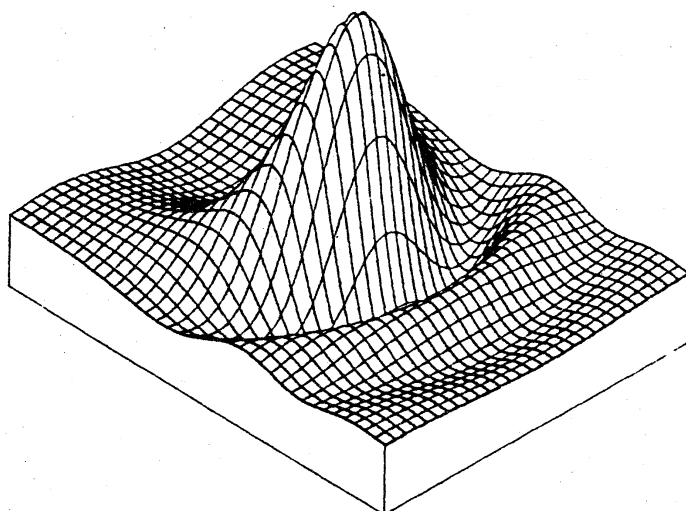


図 2。 馬蹄形パルス (数値解: Petviashvili[2]による)。

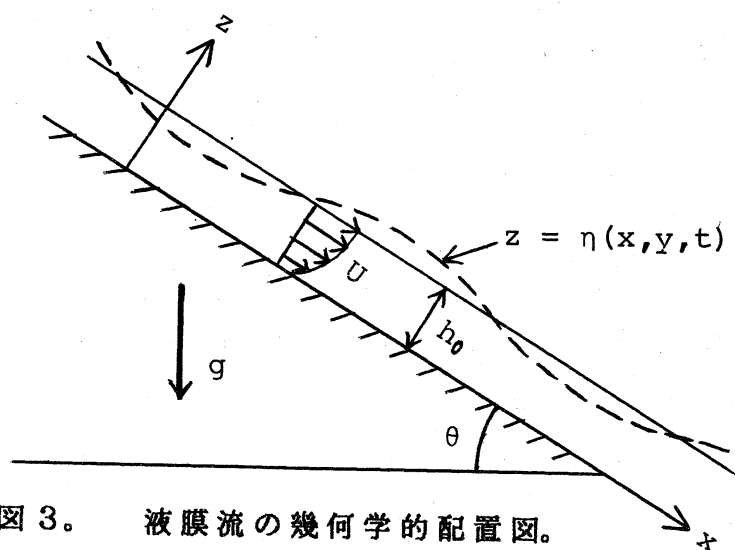
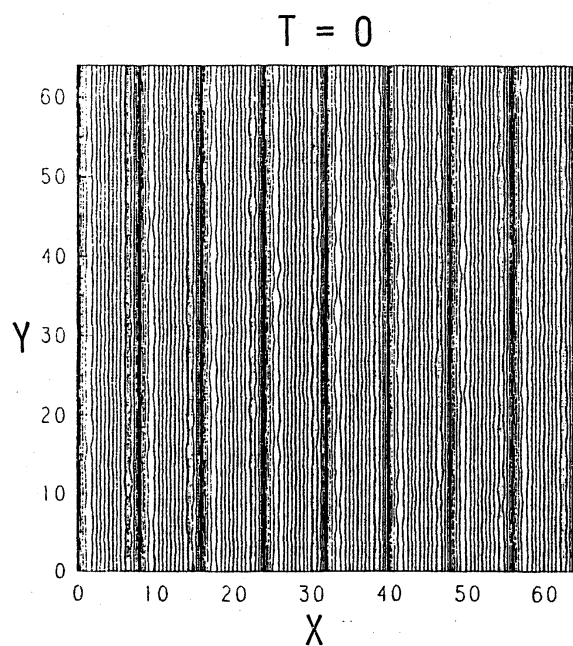


図 3。 液膜流の幾何学的配置図。



u の高低を濃淡で表示している。
濃いほど高い。

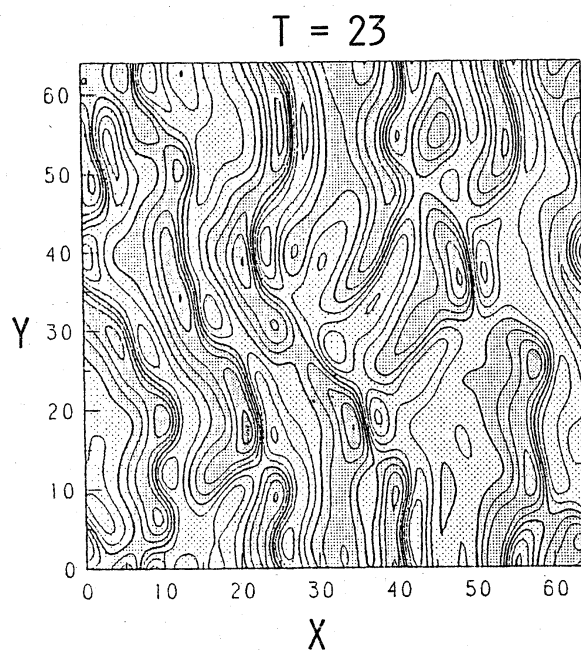
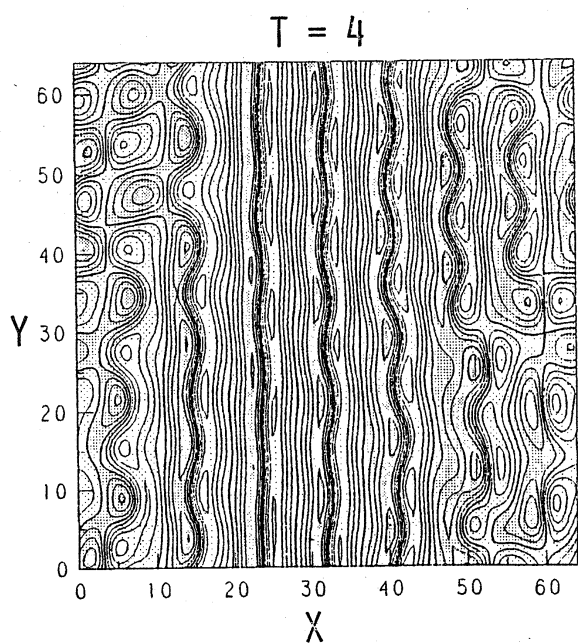


図4。 (6) 式の初期値問題の時間発展 ($\delta = 0$)。初期条件として1次元の安定周期解を与えている。

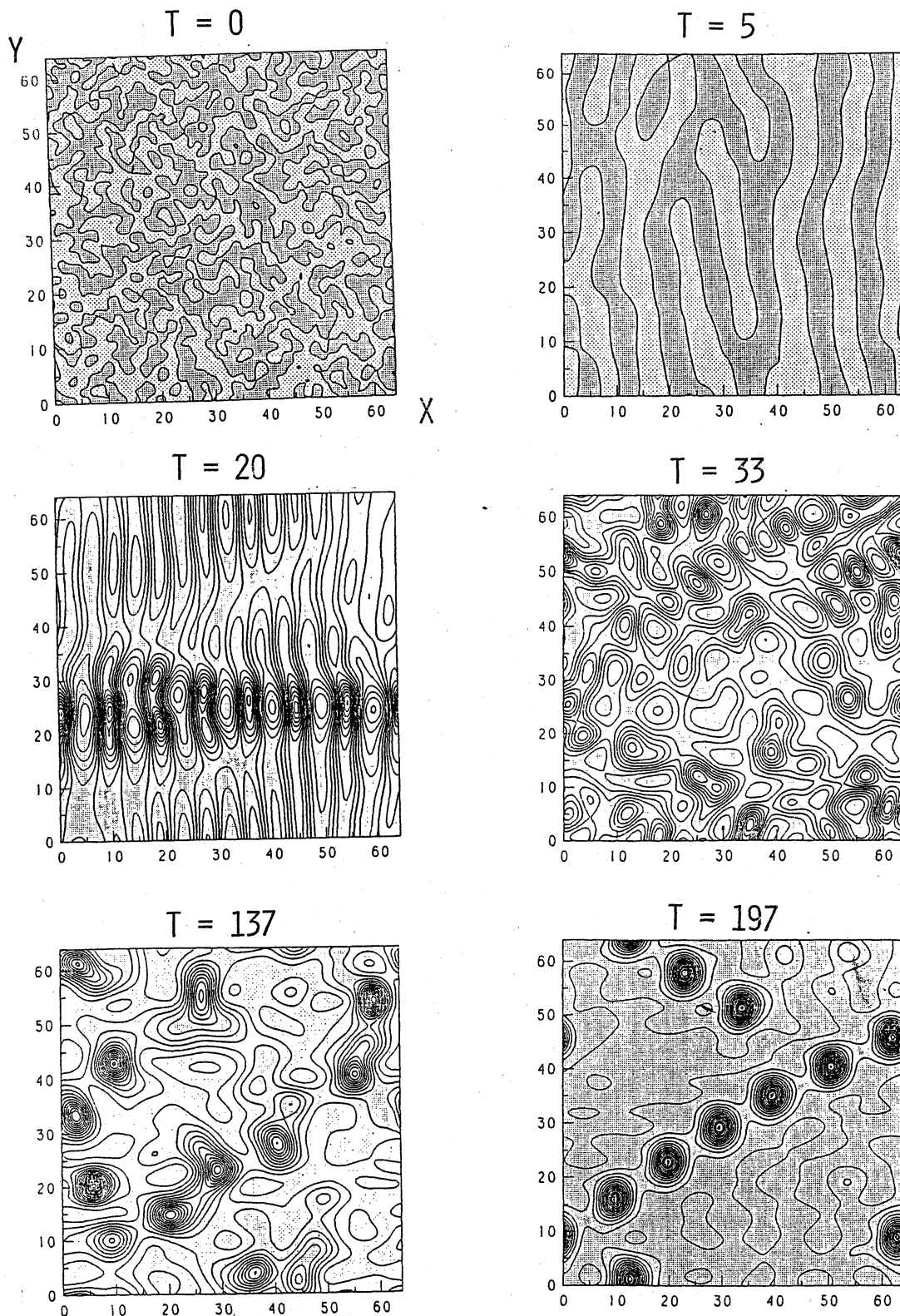


図5。 (6) 式の初期値問題の時間発展 ($\delta = 25$)。1次元構造、2次元不安定、同一振幅パルスの生成、格子状再配列 (準定常状態) が見られる。

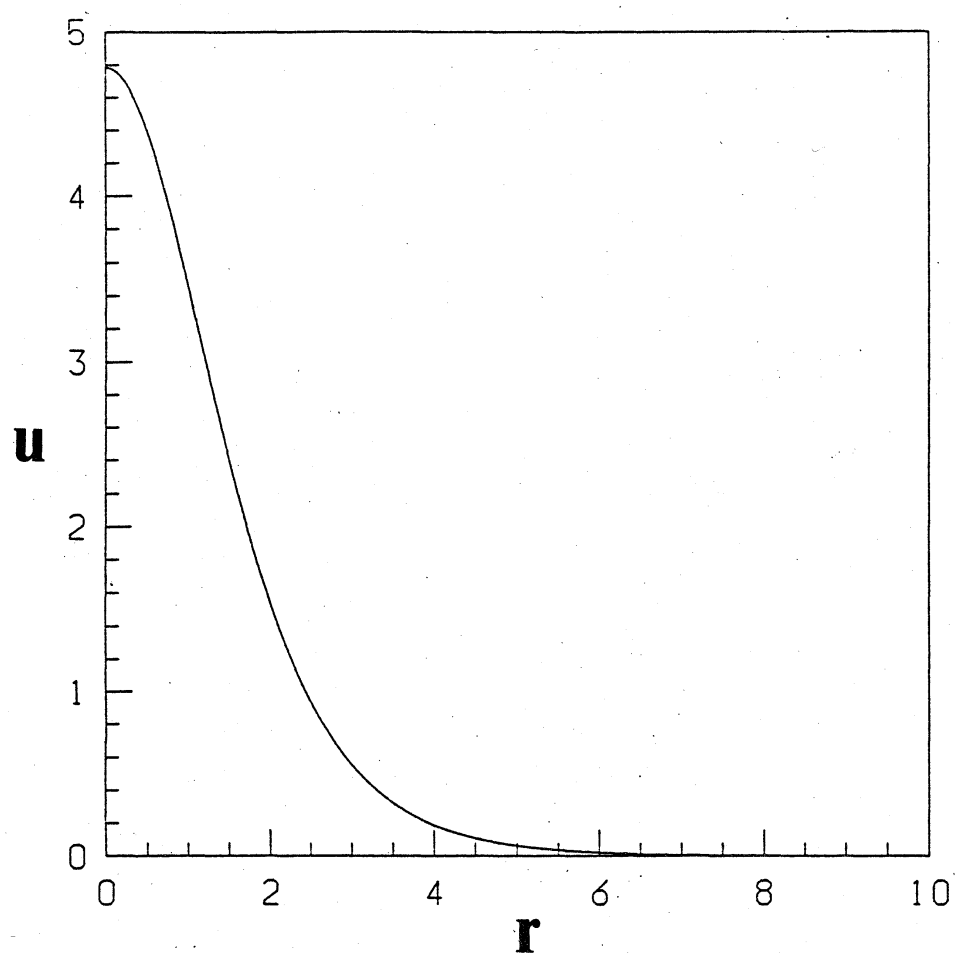


図 6. 軸対称パルス解（（10）式の数値解）。

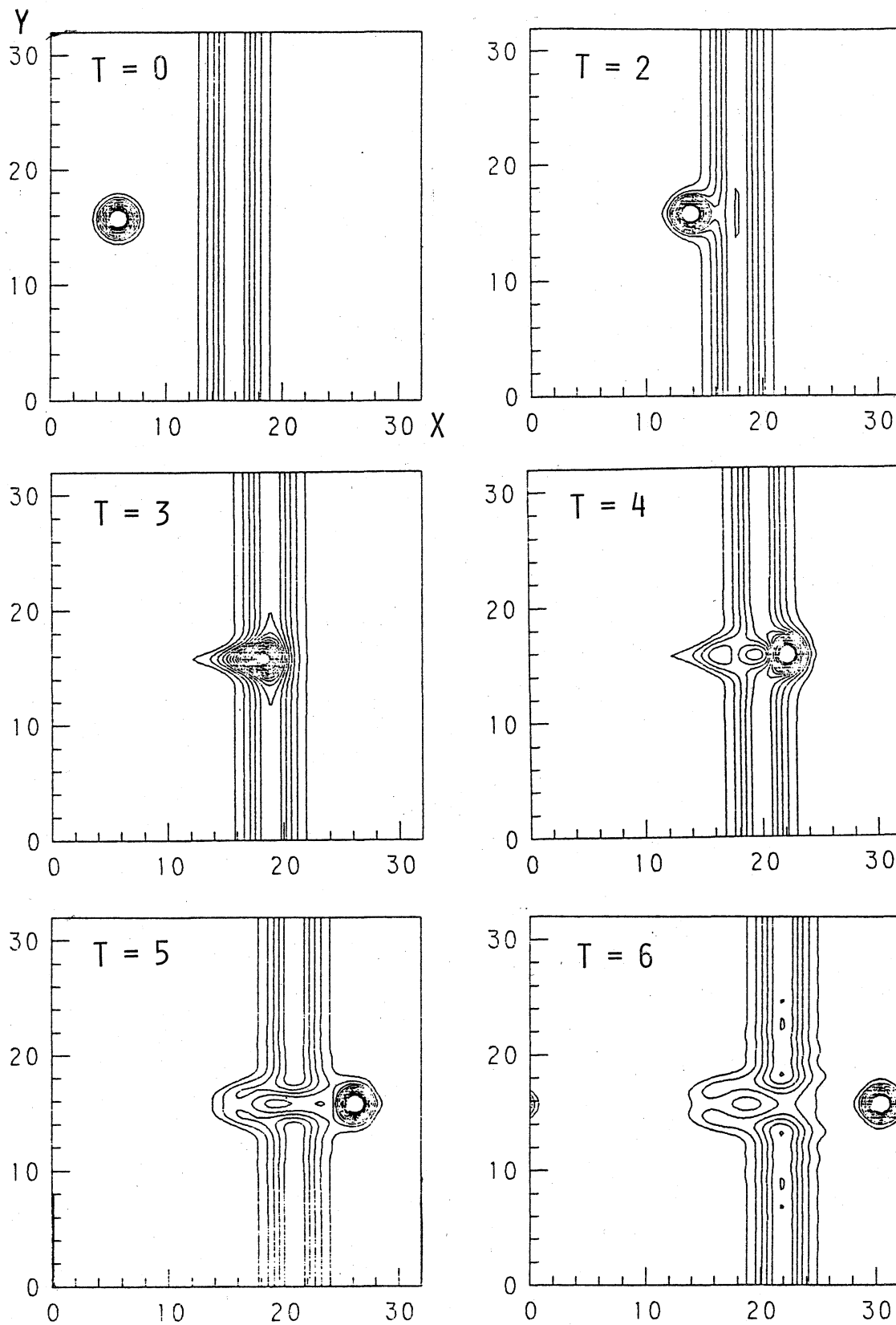


図7. 準1次元解と軸対称解の衝突。 $0.5n$ ($n = 1 \sim 20$) の等高線。

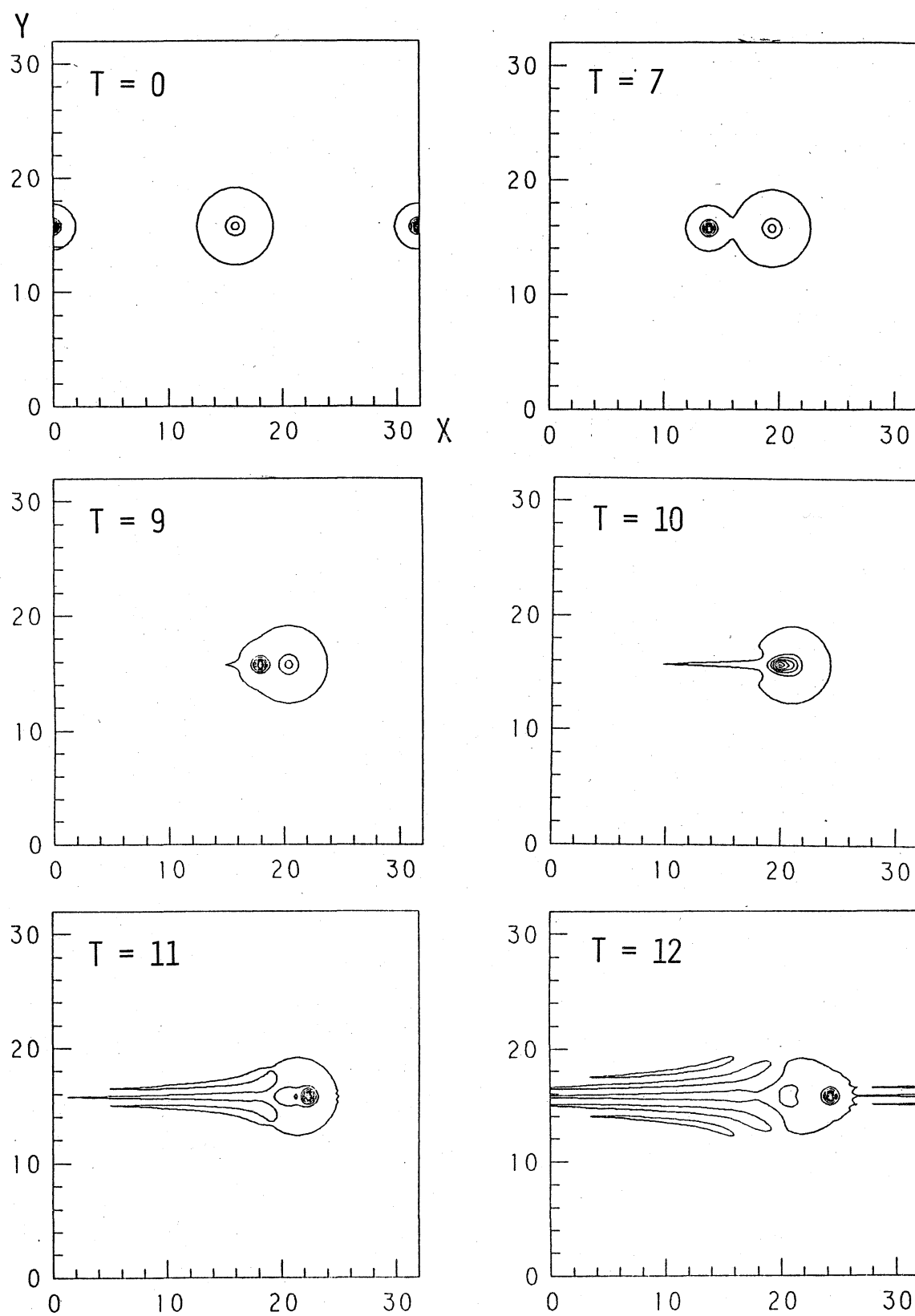


図 8. 軸対称解の衝突。 $0.01 + 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の等高線。

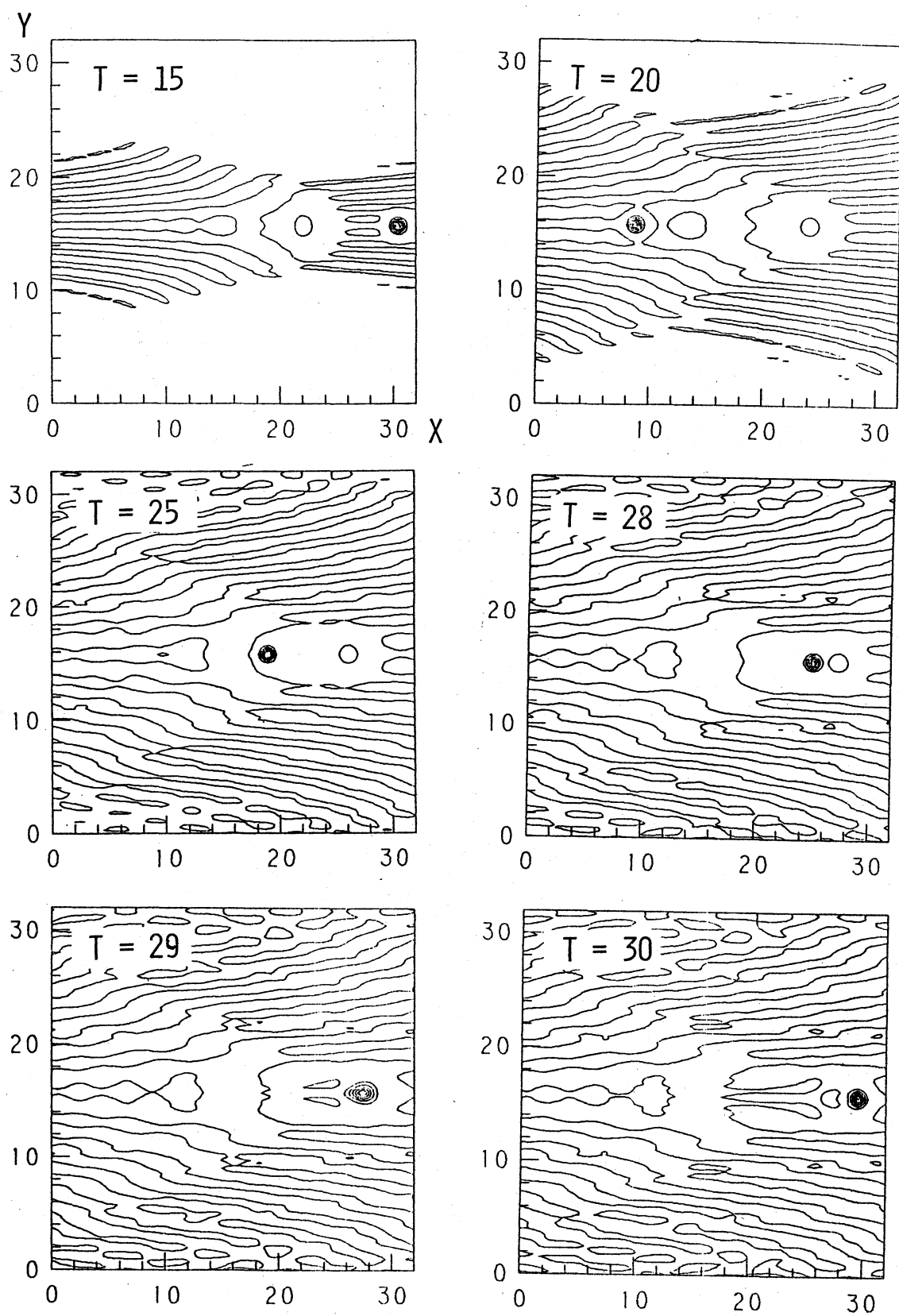


図8. 軸対称解の衝突。 $0.01 + 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の等高線。

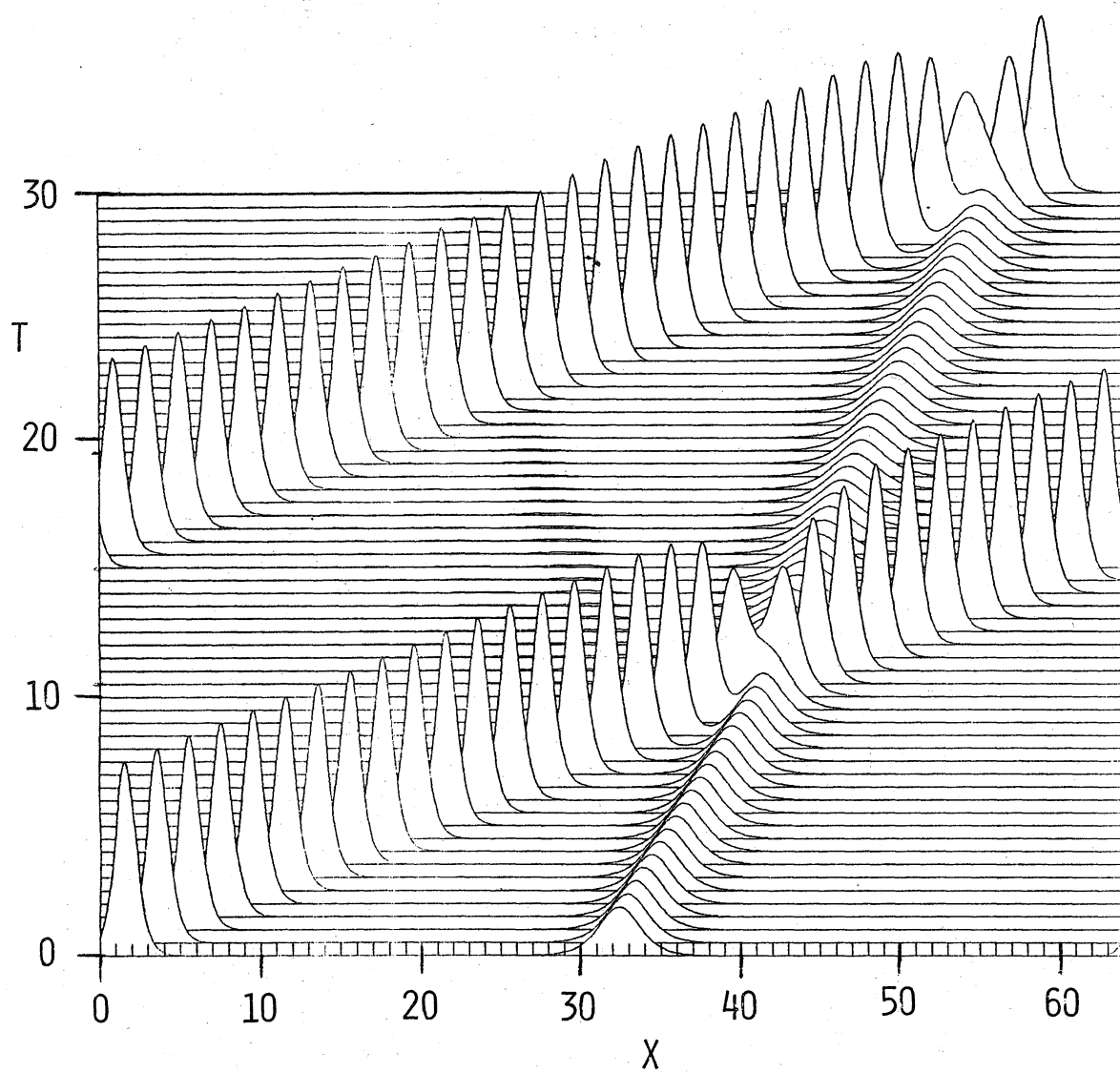


図9。衝突におけるパルス波形の変化。パルス中心の断面図を示す。

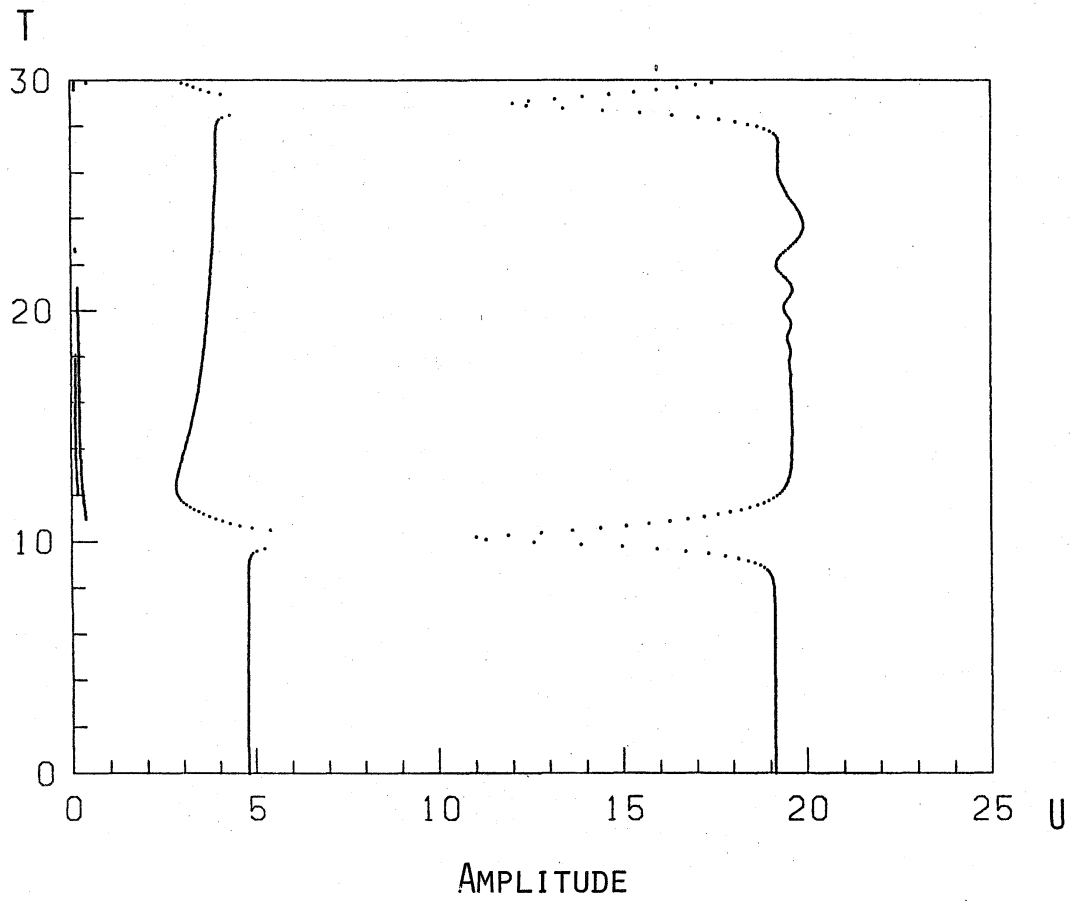


図 10。 衝突時におけるパルス振幅の変化。大きいパルスの振幅は増大し、小さいパルスの振幅は減少する。

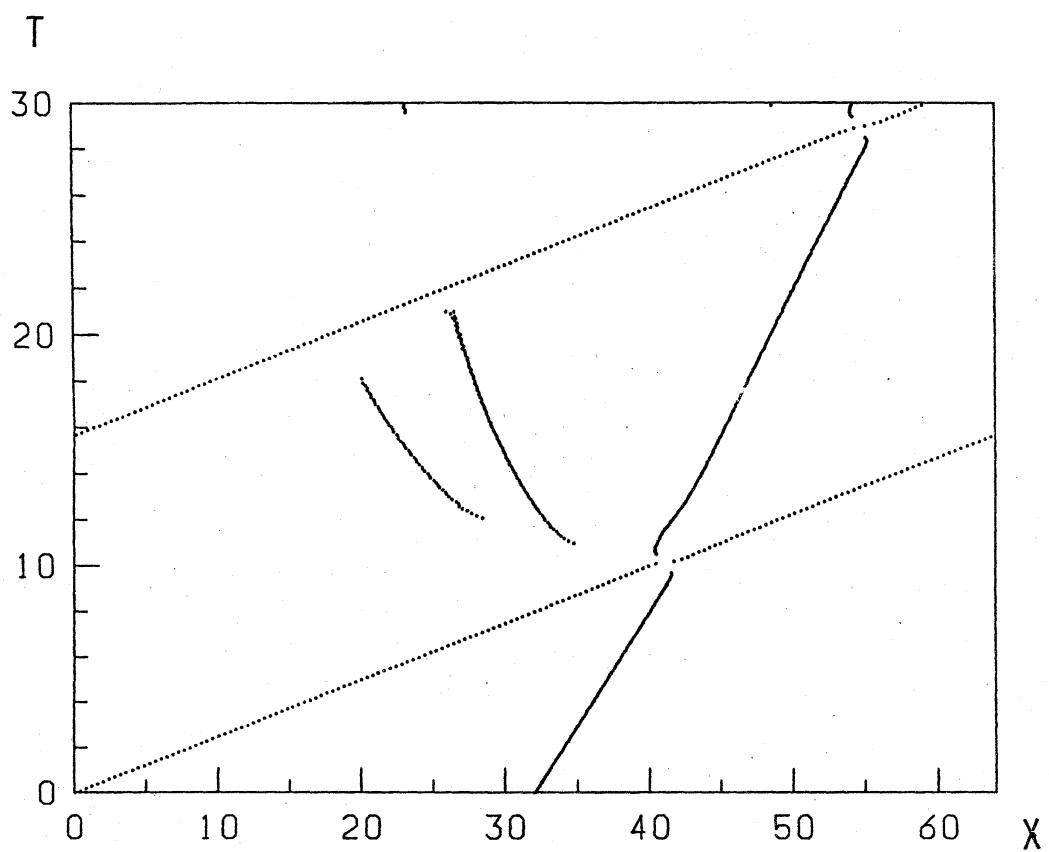


図 1 1. パルス・ピークの軌道。衝突により位相のずれを起こす。