

Invariants for knotted handlebodies

筑波大学・大学院数理物質科学研究科 石井 敦 (Atsushi Ishii)

Institute of Mathematics,

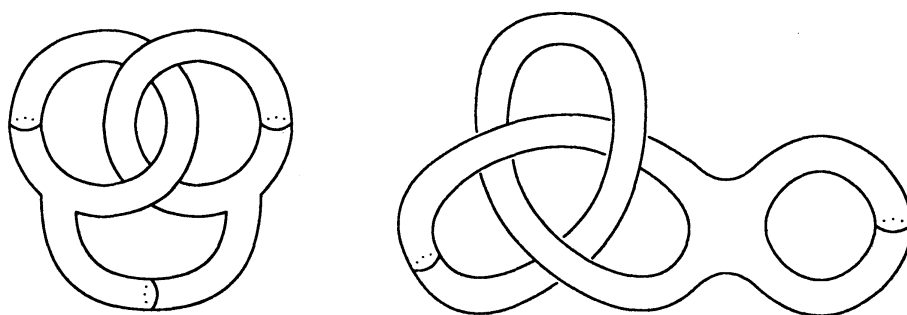
University of Tsukuba

1 はじめに

本稿では、ハンドル体結び目に対して有限型不変量を定義し、コード図の観点からその性質を調べる。結び目の有限型不変量 [7] は、Birman と Lin [1] や Bar-Natan [2] らによって量子不変量との関係が明らかにされている：結び目の量子不変量の変数 q に e^h を代入し、 h で展開して得られる係数が有限型不変量になる。現在までのところ、ハンドル体結び目の量子不変量は定義されていないが、ハンドル体結び目に対して有限型不変量を定義しその性質を調べることは、ハンドル体結び目の量子不変量を定義するための一つの方針になると思われる。

2 ハンドル体絡み目

ハンドル体結び目 (handlebody-knot) とは、ハンドル体の 3 次元多様体への埋め込みのことであり、特に本稿では 3 次元球面 S^3 への埋め込みを考える。例えば、種数 2 のハンドル体結び目には次のようなものがある。

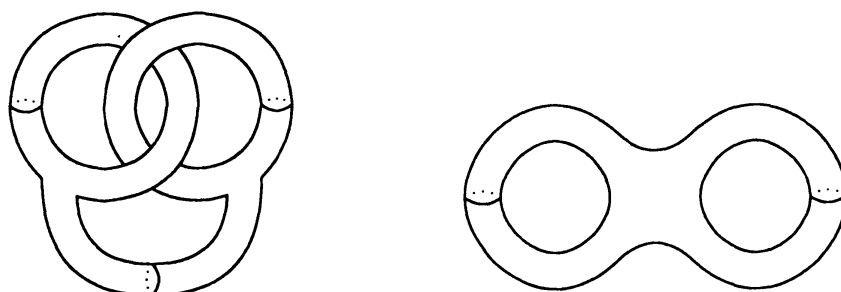


また、ハンドル体結び目の非交和をハンドル体絡み目 (handlebody-link) と呼ぶ。つまりいくつかのハンドル体を S^3 に埋め込んだものがハンドル体絡み目である。

二つのハンドル体絡み目 H と H' は S^3 の連続変形で移りあうとき等しいと定義される。つまり

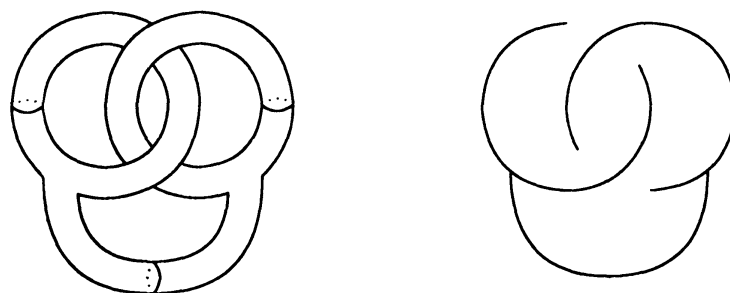
$$H = H' \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \text{ isotopy } f_t : S^3 \rightarrow S^3 \text{ s.t. } f_0 = \text{id}_{S^3}, f_1(H) = H'.$$

先に挙げた二つのハンドル体結び目は異なるが、次の二つのハンドル体結び目は同じものである。

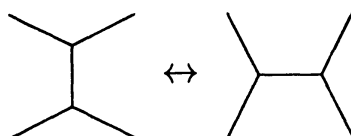


次に、空間スパインを用いたハンドル体絡み目の表示方法を紹介する。
空間スパインとは、有限3価グラフといくつかの円周 S^1 の S^3 への埋め込みのことである。ここで有限3価グラフとは、有限個の頂点と辺からなるグラフであって、すべての頂点の次数が3であるグラフのことである。空間スパインは空間グラフの特殊なものであるとすることができる。

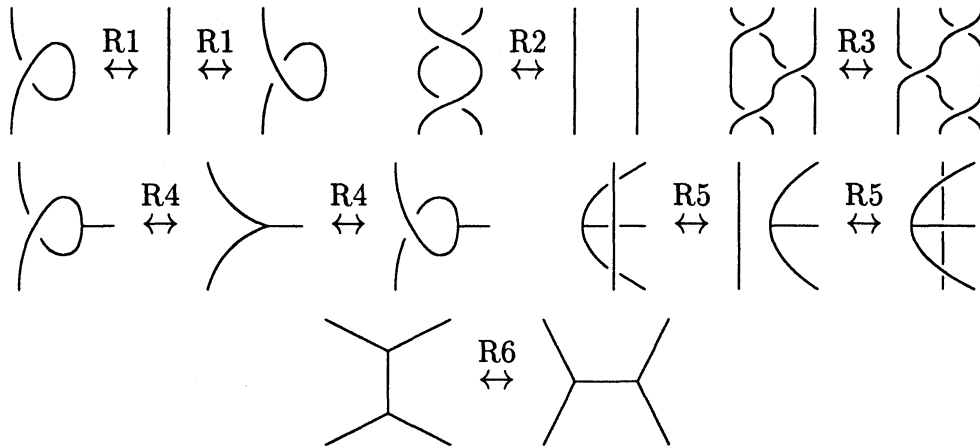
空間スパイン K の正則近傍 $N(K)$ はハンドル体絡み目になる。ハンドル体絡み目 H が空間スパイン K の正則近傍になるとき、 H は K によって表されるという。例えば、次の左のハンドル体結び目は右の空間スパインによって表される。



ハンドル体絡み目を空間スパインを用いて表す方法は一意的ではない。二つの空間スパインがいつ同じハンドル体絡み目を表すかは IH 変形を用いて述べることができる。 **IH 変形**とは、次の図で表される空間スパインの局所変形のことである。



また、空間スパインのダイアグラムに対しては次の局所変形を定義する。



このとき次の定理が成り立つ.

定理 1 ([3]). H_1, H_2 を空間スパイン K_1, K_2 によって表されるハンドル体絡み目とする. また D_1, D_2 を空間スパイン K_1, K_2 のダイアグラムとする. このとき, 次の三つは同値である.

- ハンドル体絡み目 H_1, H_2 は等しい.
- 空間スパイン K_1, K_2 は IH 変形と S^3 のイソトピーの有限列によって互いに移りあう.
- 空間スパインのダイアグラム D_1, D_2 は R 1 ~ R 6 の変形の有限列によって互いに移りあう.

3 ハンドル体結び目の有限型不変量

本節では, 空間スパインに対して有限型不変量を導入し, これを用いてハンドル体結び目の有限型不変量を定義する. 空間グラフの有限型不変量は Stanford [6] によって導入されている. 空間スパインを空間グラフの特殊なものとし, まず空間スパインに対して有限型不変量を導入する. 本稿では, 不変量は体 $\mathbb{C}$ に値を持つものとする.

有限 3 価グラフといくつかの円周 S^1 の S^3 へのはめ込みであって, 特異点が有限個の横断的な 2 重点のみからなるものを **特異空間スパイン** と呼ぶ. 二つの特異空間スパインは, 特異点ごとにこれを含む円盤を考え, これらの円盤を保存する S^3 のイソトピーで移りあうとき等しいと定義される.

空間スパインの不変量 v は、次のスケイン関係式を特異点が無くなるまで繰り返し用いることで、向き付けられた特異空間スパインに対して拡張することができる。

$$v \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \right) = v \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right).$$

ただし、ここで次のことに注意する。

- 空間スパインの不変量 v は、空間スパインの向きを無視することで、向き付けられた空間スパインの不変量になる。
- 拡張された不変量も同じ記号 v で表す。

空間スパインの不変量 v は、 $n+1$ 個の特異点を持つ任意の向き付けられた特異空間スパインに対して値が 0 になるとき、**order n 以下の空間スパインの有限型不変量**であると言う。order n 以下の有限型不変量は、 $n+1$ 個の特異点を持つ場合だけでなく、 $n+1$ 個以上の特異点を持つ場合にも値が 0 になることに注意する。

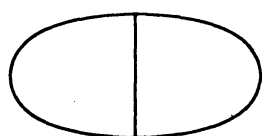
空間スパイン K をその正則近傍 $N(K)$ に送る写像 N とハンドル体絡み目の不変量 v に対して、 $v \circ N$ は空間スパインの不変量になる。

定義 2. ハンドル体絡み目の不変量 v は、 $v \circ N$ が order n 以下の空間スパインの有限型不変量であるとき、**order n 以下のハンドル体絡み目の有限型不変量**であるという。

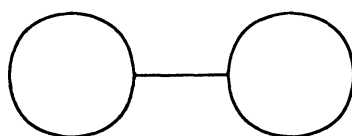
4 コードダイアグラム

以下では、種数 2 のハンドル体結び目の有限型不変量について、コードダイアグラムの観点から考察する。order n 以下の種数 2 のハンドル体結び目の有限型不変量全体のなす集合を $\mathcal{V}_n$ で表す。写像の通常の加法とスカラー倍によって $\mathcal{V}_n$ は線形空間になる。また $\mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{V}_n$ が成り立つので $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ が定義される。

G_1 を θ グラフ、 G_2 をハンドカフグラフとする。



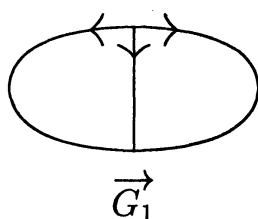
G_1



G_2

G_i 上のコードダイアグラムとは, G_i に頂点とは異なる 2 点の組をいくつか指定したものである. ここで, 点の組付きで位相同型な二つのコードダイアグラムは同一視し, 点の組は破線のコードで表す. コードダイアグラムの次数を付随するコードの本数で定義する.

G_i に向きを与えることで得られるすべての向き付けられたグラフからなる集合を $\mathcal{OG}_i$ で表す. また $\mathcal{OG} := \mathcal{OG}_1 \cup \mathcal{OG}_2$ とする. 特に, 次の向き付けられたグラフ $\vec{G}_1$ は $\mathcal{OG}_1$ の元である.



向き付けられたグラフ G 上の次数 n のコードダイアグラムからなる集合を $\mathcal{D}_n(G)$ で表す. $\bigcup_{G \in \mathcal{OG}} \mathcal{D}_n(G)$ の元によって $\mathbb{C}$ 上張られる線形空間を $\mathcal{D}_n$ で表す. ここで $\mathcal{D}_n$ において定義されるいくつかの関係式を導入する.

(FI) = 0

(4T) =

(RV) = 0

(VE) $\pm$ $\pm$ $\pm$ = 0

(IH) =

辺に向きが指定されていない関係式は、矛盾のないように自由に向きを与えて得られるすべての関係式を意味する．特に (IH) においては、真ん中の辺の向きを各項で独立に自由に決めることができる．このことから (IH) を 2 回用いることで次の関係式が得られる．

$$(OR) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

また (VE) の符号 $\pm$ は、コードがつながり辺の向きが互いに同調するときに $+$ 、同調しないときに $-$ と定める．

$\mathcal{A}_n := \mathcal{D}_n / (4T), (FI), (RV), (VE), (IH)$ と定義する．このとき次の命題が成り立つ．

命題 3. $\dim \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \leq \dim \mathcal{A}_n$.

証明．線形空間 $\mathcal{F}$ を次で定義する．

$$\mathcal{F} := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{K \mid K \text{ は } G \in \mathcal{OG} \text{ の空間埋め込み}\} / \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}.$$

向き付けられた特異空間スパインは、次の関係式を用いることで $\mathcal{F}$ において実現されているとみなす．

$$\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}.$$

n 個以上の特異点を持つ特異空間スパインによって張られる $\mathcal{F}$ の部分空間を $\mathcal{F}_n$ で表す．また $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ が成り立つので $\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1}$ が定義される．線形に拡張することで、 $\mathbb{C}$ に値を持つハンドル体結び目の不変量を $\mathcal{F}^*$ の元とみなす．このとき $v \in \mathcal{V}_n$ は $v|_{\mathcal{F}_{n+1}} = 0$ をみたす $v \in \mathcal{F}^*$ に同一視される．よって $\tilde{v} : \mathcal{F} / \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、次が可換図式になる．

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_n & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{F} & \xrightarrow{v(\in \mathcal{V}_n)} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow \tilde{v} & \\ \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1} & \xhookrightarrow{\tilde{i}} & \mathcal{F} / \mathcal{F}_{n+1} & & \end{array}$$

$\psi : \mathcal{V}_n \rightarrow (\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1})^*$ を $\psi(v) = \tilde{v} \circ \tilde{i}$ で定義すると、これは well-defined な全射になる． $\text{Ker}(\psi) = \mathcal{V}_{n-1}$ より $\mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \cong (\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1})^*$ が成り立つ．

n 個の特異点を持つ特異空間スパインに対して、特異点の逆像をコードで表すことで次数 n のコードダイアグラムが得られる．同じコードダイ

アグラムを得るための必要十分条件は特異空間スパインが交差交換で移りあうことである. よって全射 $\varphi: \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ が定まる. (FI), (4T), (RV), (VE) の関係式に対応して, $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ において次の等式が成り立つので, この写像は全射 $\tilde{\varphi}: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ を定める.

$$(fi) \quad \text{図} = 0$$

$$(4t) \quad \text{図} - \text{図} = \text{図} - \text{図}$$

$$(rv) \quad \text{図} = 0$$

$$(ve) \quad \pm \text{図} - \pm \text{図} - \pm \text{図} = 0$$

以上より, $\dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} \leq \dim \mathcal{A}_n$ が成り立つ. $\square$

補題を一つ用意する.

補題 4. $\mathcal{A}_n$ は $\mathcal{D}_n(\vec{G}_1)$ の元で生成される.

証明. 向き付けられたハンドカフグラフ $G_2 (\in \mathcal{OG}_2)$ 上のコードダイアグラムで表される元は, (VE) を繰り返し用いることで, ループでない辺からコードをなくすことができる. この状態で (IH) を用いることで θ グラフ上のコードダイアグラムが得られる. よって $\mathcal{A}_n$ は $\bigcup_{G \in \mathcal{OG}_1} \mathcal{D}_n(G)$ の元で生成される.

向き付けられた θ グラフ $G_1 (\in \mathcal{OG}_1)$ 上のコードダイアグラムで表される元は, (VE) を繰り返し用いることで, 自由に選んだ一つの辺からコードをなくすことができる. さらに (OR) を用いることで辺の向きを変えることができる. よって $\mathcal{A}_n$ は $\mathcal{D}_n(\vec{G}_1)$ の元で生成される. $\square$

次の命題より, order 3 以下のハンドル体結び目の有限型不変量は自明な不変量のみであることがわかる.

命題 5. $\dim \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_0 = \dim \mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_3/\mathcal{V}_2 = 0$.

証明. 金信 [4] や小池 [5] によって θ 曲線の低い order の有限型不変量が研究されている. この結果と補題を用いることで次が分かる. (以下では, コードダイアグラムに $\vec{G}_1$ と同じ向きが与えられているものとする.)

$$\mathcal{A}_1 = 0,$$

$$\mathcal{A}_2 = \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle,$$

$$\mathcal{A}_3 = \left\langle \text{Diagram 2}, \text{Diagram 3} \right\rangle.$$

各生成元は $\mathcal{A}_n$ において消えることが, 次の計算からわかる.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} \stackrel{(\text{VE})}{=} -2 \text{Diagram 4} \\
 & \stackrel{(\text{VE})}{=} 2 \text{Diagram 5} + 2 \text{Diagram 6} \\
 & \stackrel{(\text{RV})}{=} 0 + 2 \text{Diagram 7} \\
 & \stackrel{(\text{IH})}{=} 2 \text{Diagram 8} \\
 & \stackrel{(\text{IH})}{=} 2 \text{Diagram 9} \\
 & \stackrel{(\text{RV})}{=} 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} \stackrel{(VE)}{=} -2 \text{Diagram 2} \\
& \stackrel{(VE)}{=} 2 \text{Diagram 3} + 2 \text{Diagram 4} \\
& \stackrel{(RV)}{=} 0 + 2 \text{Diagram 5} \\
& \stackrel{(IH)}{=} 2 \text{Diagram 6} \\
& \stackrel{(RV)}{=} 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 7} \stackrel{(VE)}{=} - \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9} \\
& \stackrel{(VE)}{=} \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} \\
& \stackrel{(RV)}{=} \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} \\
& \stackrel{(IH)}{=} \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} \\
& \stackrel{(RV)}{=} 0.
\end{aligned}$$

よって $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_2 = \dim \mathcal{A}_3 = 0$ となり, 前の命題と合わせて $\dim \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_0 = \dim \mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_3/\mathcal{V}_2 = 0$ がわかる. $\square$

参考文献

- [1] J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993) 225–270.
- [2] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995) 423–472.
- [3] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1403–1418.
- [4] T. Kanenobu, *Vassiliev-type invariants of a theta-curve*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997) 455–477.
- [5] A. Koike, *Finite-type invariants of embeddings of a theta-curve up to type 4*, Yokohama Math. J. **47** (1999) 245–252.
- [6] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links, and graphs*, Topology **35** (1996) 1027–1050.
- [7] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, 23–69, Adv. Soviet Math., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.