

UHF-代数の変換群による実現について

九 大 理 岡 幸 正

§ 1. 序

作用素環を変換群と対応させて研究することは、これまでいろいろなされている。Murray と von Neumann は ergodic な変換群を用いて II 型, III 型の factor を構成した ([6], [7]) がその後 この technique が 作用素環論において重要な役割を果たしたことはよく知られている。特に Powers [9] は II_∞ 型の UHF-代数のある product state に対応する表現による factor が Pukánszky [10] における III 型の factor と同型であること (Glimm [4]) を用いて III 型の factor の非可算存在を証明した。一方 Glimm [5] は locally compact な変換群が自然に C^* 代数をひきおこすことを示した。

ここでは、 II_∞ 型の UHF-代数が 変換群 (G, Z) に対応する [5] の意味の C^* 代数 $\mathcal{O}(G, Z)$ と同型である、但し $G = \coprod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$, $Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$, $G^{(k)} = Z^{(k)}$ は位数 q_k ($q_1 = p_1$, $q_k = p_k/p_{k-1}$ ($k \geq 2$)) の巡回群、こと

従って特に、 $\{2^n\}$ 型の OHF-代数は [10] における変換群 (G, Z) ,
 即ち $G = \prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$, $Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$, $G^{(k)} = Z^{(k)} = \{0, 1\}$ ($k=1, 2, \dots$) に
 対応する C^* -代数 $\mathcal{O}(G, Z)$ と同型であることを述べよう.

§ 2. 変換群 C^* -代数 $\mathcal{O}(G, Z)$ の構成 (Glimm [5], Effros-Hahn [2])

(G, Z) を G, Z がそれぞれ *locally compact*, T_2 , *second countable* であるような位相変換群とする. $C_0(G \times Z)$ を $G \times Z$ 上の *compact support* をもつ複素数値連続関数全体とする.

$f, g \in C_0(G \times Z)$ に対して $f * g, f^* \in C_0(G \times Z)$ を次のように定義する:

$$f * g(t, \zeta) = \int f(s, \zeta) g(s^{-1}t, s^{-1}\zeta) ds$$

$$f^*(t, \zeta) = \overline{f(t^{-1}, t^{-1}\zeta)} \Delta(t^{-1})$$

ここに ds は G 上の固定した左不変な Haar 測度, Δ はその *modular* 関数である. $C_0(G \times Z)$ は上の演算と普通の加法, スカラー積, および *inductive limit topology* に関して 位相 $*$ -代数になる. 次に $f \in C_0(G \times Z)$ に対して *norm* $\|f\|$ を次のように定義する:

$$\|f\| = \sup \|L(f)\|,$$

ここに, L は $C_0(G \times Z)$ の Hilbert space 上への (*weakly continuous* 2° *non-degenerate*) 表現全体をわたるとする.

$C_0(G \times Z)$ の表現 L はすべて norm-decreasing 即ち,

$$\|L(f)\| \leq \|f\|_0, \quad \forall f \in C_0(G \times Z)$$

但し,
$$\|f\|_0 = \int \|f(s, \cdot)\|_\infty ds$$

である. $C_0(G \times Z)$ の norm $\|f\|$ による completion $\mathcal{O}(G, Z)$ を (G, Z) の変換群 C^* 代数という.

§ 3. UHF-代数の変換群による表現 ([8])

$Z^{(k)} (k=1, 2, \dots)$ を compact Hausdorff space とし, $Z_n = \prod_{k=1}^n Z^{(k)}$, $Z = \prod_{k=1}^\infty Z^{(k)}$ とおく. X が compact Hausdorff space ならば X 上の連続関数全体のつくる C^* 代数を $C(X)$ とかく. このとき

補題 1.
$$C(Z) = C^* \lim_n C(Z_n) = \bigotimes_k C(Z^{(k)})$$

正の整数 n に対して M_n を n 次複素行列全体のつくる C^* 代数とする.

補題 2. H を位数 n の巡回群とする. このとき

$$\mathcal{O}(H, H) \cong M_n$$

証明:

(H, H) は discrete 有限変換群で, $\mathcal{O}(H, H) = C(H \times H)$ である. s を H の生成元, 即ち, $H = \{e, s, s^2, \dots, s^{n-1}\}$ とする. $f \in C(H \times H)$ に対して,

$$\alpha_{k,l} = f(s^{k-k}, s^{l-k}) \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$$

とし,

$$T_f = (\alpha_{k,l})_{k,l}$$

と置く. 写像 T は $C(H \times H)$ から M_n の上への principal $*$ -isomorphism である. 従って

$$\mathcal{O}(H, H) \cong M_n.$$

証明終.

注: H が無限巡回群ならば, $\mathcal{O}(H, H) \cong LC(\mathcal{H})$, separable Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の完全連続作用素全体, であることも同様に証明できる.

次に $G^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) を位数 g_k の巡回群とし, $Z^{(k)} = G^{(k)}$, $G_n = \prod_{k=1}^n G^{(k)}$, $Z_n = G_n$ とする. 但し g_k は正の整数, このとき,

補題 3. $\mathcal{O}(G_n, Z_n) \cong \bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathcal{O}(G^{(k)}, Z^{(k)})$

証明:

$\bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathcal{O}(G^{(k)}, Z^{(k)})$ から $\mathcal{O}(G_n, Z_n)$ への線型写像 λ_n を次のように定義する: 任意の $\bigotimes_{1 \leq k \leq n} f^{(k)} \in \bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathcal{O}(G^{(k)}, Z^{(k)})$ に対して,

$$\lambda_n \left(\bigotimes_{1 \leq k \leq n} f^{(k)} \right) (s^{(1)}, \dots, s^{(n)}; z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) = \prod_{k=1}^n f^{(k)}(s^{(k)}, z^{(k)}).$$

この写像 λ_n は onto, principal $*$ -isomorphism である.

証明終.

補題 2, 3 によって

補題 4. $\mathcal{O}(G_n, Z_n) \cong M_{p_n}$ (但し $p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$)

$\mathcal{O}$ を単位元をもつ C^* 代数とする. $\mathcal{O}$ が $\{p_n\}$ 型の uniformly hyperfinite (UHF) algebra であるとは (i) $p_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $p_n \mid p_{n+1}$ (ii) $\mathcal{O} = C^*\text{-}\lim_n M_{p_n}$ である正の整数 $\{p_n\}$ が存在することをいう. (Glimm [3])

補題 3 におけると同様に $G^{(k)} = Z^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) を位数 q_k の巡回群, $e^{(k)}$ を $G^{(k)}$ の単位元とし, $G_n = Z_n = \prod_{k=1}^n G^{(k)}$ ($n=1, 2, \dots$) とする. また, G を $G^{(k)}$ の restricted direct product BP 5 $G = \prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)} = \{ (s^{(k)})_{k=1, 2, \dots} : s^{(k)} \in G^{(k)}, \text{ 有限個の } k \text{ を除いて } s^{(k)} = e^{(k)} \}$ とし, $Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$ とする. このとき

定理 1. $\mathcal{O}(G, Z) \cong C^*\text{-}\lim_n \mathcal{O}(G_n, Z_n)$
 $\cong \bigotimes_k \mathcal{O}(G^{(k)}, Z^{(k)})$

従って $\mathcal{O}(G, Z)$ は $\{p_n\}$ 型の UHF-代数である.

但し $p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$ ($n=1, 2, \dots$).

証明:

$0 < m \leq n$ である任意の整数 m, n に対して,
 $\mathcal{O}(G_m, Z_m)$ から $\mathcal{O}(G_n, Z_n)$ の中への canonical
 imbedding ϕ_{nm} を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \phi_{nm}(f)(s^{(1)}, \dots, s^{(m)}; z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \\ = f(s^{(1)}, \dots, s^{(m)}; z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \prod_{k=m+1}^n \delta_{e(k)}(s^{(k)}) \end{aligned}$$

ここに $f \in \mathcal{O}(G_m, Z_m)$, $(s^{(1)}, \dots, s^{(m)}) \in G_n$, $(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \in Z_n$.

ϕ_{nm} は principal $*$ -isomorphism $\mathcal{Z}$

$$\phi_{nl} = \phi_{nm} \phi_{ml} \quad (l \leq m \leq n)$$

をみたす. 従って $C^*\text{-}\lim_n \mathcal{O}(G_n, Z_n)$ が存在する. ([11])

次に, $\mathcal{O}(G_m, Z_m)$ から $\mathcal{O}(G, Z)$ の中への canonical imbedding ϕ_m を

$$\begin{aligned} \phi_m(f)(s^{(1)}, s^{(2)}, \dots; z^{(1)}, z^{(2)}, \dots) \\ = f(s^{(1)}, \dots, s^{(m)}; z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \prod_{k=m+1} \delta_{e(k)}(s^{(k)}) \end{aligned}$$

ここに, $f \in \mathcal{O}(G_m, Z_m)$, $(s^{(k)}) \in G$, $(z^{(k)}) \in Z$,

によって定義する. ϕ_m は principal $*$ -isomorphism $\mathcal{Z}$

$$\phi_m = \phi_n \phi_{nm} \quad (m \leq n)$$

をみたす. 従って $\phi_m(\mathcal{O}(G_m, Z_m)) \subseteq \phi_n(\mathcal{O}(G_n, Z_n))$ ($m \leq n$)

$$\text{もし } C_0(G \times Z) \subseteq \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \phi_m(\mathcal{O}(G_m, Z_m))} : \mathcal{O}(G, Z) \text{ に}$$

おける norm $\|\cdot\|$ -closure, なければ, $\mathcal{O}(G, Z)$

$$= \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \phi_m(\mathcal{O}(G_m, Z_m))} \quad \text{従って,}$$

$$\mathcal{O}(G, Z) \cong C^*\text{-}\lim_n \mathcal{O}(G_n, Z_n) \quad (\text{Takeda [11]})$$

$C_0(G \times Z)$ の元は $\sum_{i=1}^{\ell} \delta_{s_i} h_i$, $s_i \in G$, $h_i \in C(Z)$ の形

だから, 任意の $s \in G$, $h \in C(Z)$ に対し,

$$\delta_s h \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \phi_m(\mathcal{O}(G_m, Z_m))}$$

を述べばよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$s = (s^{(1)}, \dots, s^{(n)}, e^{(n+1)}, e^{(n+2)}, \dots)$$

$$\|\psi_n(g) - h\|_{\infty} < \varepsilon$$

である正の整数 n と $g \in C(Z_n)$ が存在する. ここに

ψ_n は $C(Z_n)$ から $C(Z)$ の中への canonical imbedding

である. $f \in C(G_n \times Z_n) = \mathcal{O}(G_n, Z_n)$ を次のように

定義する:

$$f(t^{(1)}, \dots, t^{(n)}; z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) = g(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \prod_{k=1}^n \delta_{s^{(k)}}(t^{(k)})$$

$$\text{このとき } \phi_n(f) = \delta_s \psi_n(g) \in \phi_n(\mathcal{O}(G_n, Z_n)) \quad \text{で,}$$

$$\|\phi_n(f) - \delta_s h\| < \varepsilon$$

$$\text{従って } \delta_s h \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \phi_m(\mathcal{O}(G_m, Z_m))} \quad \text{即ち}$$

$$\mathcal{O}(G, Z) \cong C^* \text{-} \lim \mathcal{O}(G_n, Z_n).$$

補題 4 によつて $\mathcal{O}(G_n, Z_n) \cong M_{p_n}$ だから $\mathcal{O}(G, Z)$

は $\{p_n\}$ 型の DHF-代数である. また補題 3 によつて,

$$\mathcal{O}(G, Z) \cong \bigotimes_k \mathcal{O}(G^{(k)}, Z^{(k)})$$

を得る.

証明終.

逆に $\mathcal{O}$ を $\{p_n\}$ 型の DHF-代数とする. $q_1 = p_1$, $q_k = p_k/p_{k-1}$

($k=2, 3, \dots$) とし, $G^{(k)}, Z^{(k)}$, G_n, Z_n , G, Z を上のようにとる.

このとき

定理 2. $\mathcal{O} \cong \mathcal{O}(G, \mathbb{Z})$

証明:

UHF-代数の定義, C^* -inductive limit の定義([11]) およ
び, 補題 3, 定理 1 によって明らかである.

証明終.

以上.

文 献

- [1] J. Dixmier, Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [2] E. G. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C^* -algebras, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 75(1967).
- [3] J. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 95(1960), 318-340.
- [4] J. Glimm, Type I C^* -algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.
- [5] J. Glimm, Families of induced representations, Pacific J. Math., 12(1962), 885-911.
- [6] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., 37(1936), 116-229.
- [7] J. von Neumann, On rings of operators III, Ann. of Math., 41(1940), 94-161.
- [8] Y. Oka, A characterization of uniformly hyperfinite algebras, (to appear).
- [9] R. T. Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Ann. of Math., 86(1967), 138-171.
- [10] L. Pukánszky, Some examples of factors, Publ. Math. Debrecen, 4(1955-56), 135-156.
- [11] Z. Takeda, Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, Tohoku Math. J., 7(1955), 67-86.