

# von Neumann 代数の自己同型写像群と 不変汎函数について

東北大理 斎藤 知之

von Neumann 代数  $M$  の  $*$  自己同型写像群  $G$  を dual pair  $(M_*, M)$  ( $M_*$  は  $M$  の predual) の中で, 非可換力学系の変換群としてとらえるべく,  $G$  不変正規正值線形汎函数 (不変測度) の存在条件を  $M_*$  の弱 compact 集合を使用して調べ, あわせて  $M$  に与える " $G$ -有限性" (不変測度が充分沢山ある) と Murray-von Neumann の " $G$ -有限性" の差を浮き彫りにしよう。

$M$  を Hilbert space  $\mathcal{H}$  上に作用する von Neumann 代数 (v. N. 代数) とし,  $G$  を  $M$  の unitarily implementされた  $*$ -automorphisms の a group とする。すなわち  $g \rightarrow u_g$  ( $G$  の  $\mathcal{H}$  上の unitary 表現) が  $u_g^* M u_g = M_g$  ( $\forall g$ ) を満たして存在する。今後  $a_g = u_g^* a u_g$   $\forall a \in M$  と書く。

Definition 1 (Størmer). 今  $e, f$  を  $M$  の射影元とし,  $e \overset{G}{\sim} f$  ( $G$ -equivalent) であるとは, 各  $g \in G$  に対して,  $e = \sum_{j \in G} u_g a_j a_j^*$ ,  $f = \sum_{j \in G} u_g^* a_j^* a_j u_g$  なる  $a_j \in M$  が存在するとき

であり,  $e \overset{G}{\sim} f$  ( $e \overset{G}{\sim} f$ ) とは,  $ecf$  の,  $fce$  と  $G$ -equivalent な部分射影元の存在するときである。

●  $M$  と  $G$  の接合積を使用することにより上の  $\overset{G}{\sim}$  は確かに同値関係になりさらに完全加法的であることがわかる。すなわち  $\{e_\alpha\}, \{f_\alpha\}$  を  $M$  の射影元の直交族とし各  $\alpha$  に対して,  $e_\alpha \overset{G}{\sim} f_\alpha$  ならば,  $\sum e_\alpha \overset{G}{\sim} \sum f_\alpha$  である。

●  $M$  が abelian,  $\sigma$ -finite の場合, 上の  $\overset{G}{\sim}$  は, Hopf の確率空間に導入した equivalence (Hopf-equivalence) と同値になり,  $M$  が一般の場合は, Murray, von Neumann の導入した equivalence ( $\sim$ ) を含む (Størmer [6])。

次に  $\mathcal{U}$  を  $M$  の,  $M$  の unitary 元により implement される inner automorphisms 全体のつくる group とし,  $\tilde{G}$  を  $G$  と  $\mathcal{U}$  により代数的に生成される automorphism group とする。

その時, equivalence relation  $\overset{G}{\sim}$  に関して次のような比較定理が成立する。

Proposition 1.  $M$  の射影元の対  $e, f$  に対して,  $M$  の  $\tilde{G}$  による fixed subalgebra  $M^{\tilde{G}}$  ( $M$  の  $G$  による fixed subalgebra を  $M^G$  とし,  $M$  の center を  $\mathcal{Z}$  とすると,  $M^{\tilde{G}} = M^G \cap \mathcal{Z}$ ) の射影元  $z$  が,  
 $ez \overset{G}{\sim} fz, \quad e(1-z) \overset{G}{\sim} f(1-z)$  なる如く存在する。

● abelian case は, Størmer により示された。[5]

このことを使用すると Murray-von Neumann の equivalence

の場合と同様にして次の命題が成立する。

Proposition 2.  $M$  が  $G$ -finite (i.e.  $1 \stackrel{G}{\sim} e \Rightarrow e=1$ ) ならば、  
もし  $M$  の射影元  $e, f$  に対して、 $e \stackrel{G}{\sim} f$  が成立すれば、 $1-e \stackrel{G}{\sim} 1-f$   
である。

以上の準備のもとに次のことが成立する。

Theorem 1.  $M$  が  $G$ -finite であることと、 $M$  が  $\tilde{G}$ -finite  
(i.e.  $M$  に  $\tilde{G}$ -不変 normal states ( $G$ -invariant normal traces)  
が充分沢山存在する) であることは、同値である。

以下この証明をしよう。[9] と類似の方法によつた。

$M$  は  $G$ -finite とする。

Lemma 1.  $e, f$  を  $M$  の射影元、 $\{e_k\}$  を  $M$  の射影元の単調増加列で、 $e_k \uparrow e$ 、 $e_k \stackrel{G}{\sim} f$  ( $\forall k$ ) とする。この時、 $e \stackrel{G}{\sim} f$  ( $\stackrel{G}{\sim}$  の連続性) である。

証明).  $e_1 \stackrel{G}{\sim} f_1 \leq f$  とする。

$k \geq 1$  に対して、 $f_1, f_2, \dots, f_k$  ( $M$  の射影元) が、 $f_i f_j = 0$  ( $i \neq j$ ) ( $1 \leq i < j \leq k$ ) 且つ  $\sum_{i=1}^k f_i \leq f$  且つ、 $e_{i+1} - e_i \stackrel{G}{\sim} f_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) なる  
如くとれたとする。  $e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} f$  且つ  $M$  が  $G$ -finite であるから  
Prop. 2 により  $1 - e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} 1 - f$ 。従つて、 $e_k \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=1}^k f_i$  によつて、

$$1 - e_{k+1} + e_k \stackrel{G}{\sim} 1 - f + \sum_{i=1}^k f_i$$

よつて Prop. 2 から

$$e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f - \sum_{i=1}^k f_i.$$

すなわち  $\exists f_{k+1} \in M$  : 射影元、 $e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f_{k+1} \leq f - \sum_{i=1}^k f_i$ 。

}

この操作をつづけることにより,  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  を,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f, \quad e_{i+1} - e_i \lesssim f_{i+1} (\forall i)$$

なる如く撰べる。従って,

$$e = e_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - e_i) \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f.$$

以上.

Lemma 2. 今  $M$  を Lemma 1 の仮定のもとに  $M$  の predual  $M_*$  に於いて,  $(T_g \varphi)(a) = \varphi(a^g)$   $\varphi \in M_*$ ,  $a \in M$ ,  $g \in \widetilde{G}$  とする ( $T_g$  は  $M_*$  の linear isometry). かくて  $\varphi \in M_*$  に対して,

$$K \equiv \{T_g \varphi; g \in \widetilde{G}\}$$

は, weakly  $(\sigma(M_*, M))$  relatively compact である。

(証明) もしこうでなければ [1] により  $M$  の射影元列  $\{e_n\}$  及び正の実数列  $\varepsilon (> 0)$ ,  $\{\varphi_n\} \subset K$  があって

$$|\varphi_n(e_n)| \geq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。  $\varphi_n = T_{g_n} \varphi$ ,  $f_n = e_n^{g_n}$  とし,  $f_n \lesssim e_n$  である。

今  $p_n \equiv \sum_{m=n}^{\infty} e_m$ ,  $q_n \equiv \bigvee_{m=n}^{\infty} f_m$  とすれば,  $p_n \downarrow$ ,  $q_n \downarrow$  である。

$q \equiv \bigwedge_{n=1}^{\infty} q_n$  とする。  $n$  fix  $k$  をおとり,  $r_k = \bigvee_{i=n}^{n+k} f_i$  とする。

今  $k \geq 1$  と  $r_{k-1} \lesssim \sum_{i=n}^{n+k-1} e_i$  を仮定する ( $k=1$  なら  $r_0 = f_n \lesssim e_n$ )。

$$r_k = r_{k-1} + (r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1}),$$

$$r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1} \lesssim (\sim) f_{n+k} - r_{k-1} \wedge f_{n+k} \leq f_{n+k} \lesssim e_{n+k}$$

から  $r_k \lesssim \sum_{i=n}^{n+k} e_i$  が成立する。よって,  $r_k \lesssim p_n (\forall k)$  から Lemma 1

から  $q_n = \bigvee_{k=1}^{\infty} r_k \lesssim p_n (\forall n)$  である。従って  $1 - q_n \gtrsim 1 - p_n$ ,

$\sup_n (1 - f_n) = 1$  かつ, Lemma 1 により  $1 - g \geq 1$ ,  $M$  の  $G$ -finiteness  
 かつ  $g = 0$  が成立.  $g_n \geq f_n$  より  $f_n \rightarrow 0$  (5) であり,  
 $|f(f_n)| \geq \varepsilon$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) に矛盾する. 従って,  $K$  は weakly  
 relatively compact である.

以上.

Theorem 1 の証明.  $M$  を  $G$ -finite とし  $\psi \in M_{\tilde{G}}^*$  ( $M_{\tilde{G}}$  の predual) ( $\psi \geq 0$ ) とする extension theorem により  
 $\varphi \in M_*$   $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi(c) = \psi(c)$   $\forall c \in M_{\tilde{G}}$ ,  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$  かつ  
 $\varphi$  が存在する.  $\Delta$

$\mathcal{Q}(\varphi) \equiv \overline{\text{co}} \{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$  ( $\overline{\text{co}}$  は  $\{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$   
 の strong convex closure) とすれば, Krein - Šmulian  
 の Theorem 及 Lemma 2 により  $\mathcal{Q}(\varphi)$  は weakly compact である.  
 また  $\{T_g; g \in \tilde{G}\}$  は group かつ,  $\mathcal{Q}(\varphi)$  は non-contracting  
 (distal) に, affinely に act してゐる (i.e.  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}(\varphi), \psi_1 + \psi_2$   
 に対し  $\inf_{g \in \tilde{G}} \|T_g \psi_1 - T_g \psi_2\| \geq \delta > 0$  for some  $\delta > 0$ ). 従って,  
 Ryll-Nardzewski の fixed point theorem ([2]) により  
 $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{Q}(\varphi) : T_g \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \ \forall g \in \tilde{G}$  である.  $\varphi \geq 0$  かつ  $\tilde{\varphi} \geq 0$  であり  
 $\tilde{\varphi}$  は  $M$  上の  $G$ -不変 normal state である. 今  $t \neq 0$ ,  
 $t \in M_{\tilde{G}}$  とする ( $t \geq 0$ ) と,  $\exists \psi \in (M_{\tilde{G}}^*)_*$  state:  $\psi(t) \neq 0$ . よって  
 この  $\psi$  に対して, 上の  $\tilde{\varphi}$  をとると,  $\tilde{\varphi}(t) = \psi(t) \neq 0$ . 従って,  
 Kovács - Szűcs の Theorem 1 により, ([3])  $M$  は  $\tilde{G}$ -finite である.

逆は明らかである。

以上。

この定理の  $\sigma$ -finite case は, Størmer により automorphism の分解定理 (free action に関する Kallman の Theorem) を使用して証明されたが複雑であった。Yeadon [9] は,  $G = \mathbb{N}$  の場合上の方法で, normal trace の存在を, dimension function を全然使用せずに証明した。

今こゝで Kovács - Szűcs により与えられた  $G$ -不変測度の存在条件を述べておこう。

Kovács - Szűcs の定理。  $M$  を  $\ast$ -N. 代数とし,  $G$  を  $M$  の  $\ast$ -automorphism group とする。今  $M$  が  $G$ -finite ( $G$ -invariant normal states が  $M$  の正元を分離するくらい充分沢山ある) ならば,  $\forall t \in M$  に対して,

$$\tilde{co}(t, M) \cap M^G$$

は one point set である (但し  $\tilde{co}(t, G)$  は,  $t$  の  $G$  による orbit の weak convex hull である)。さらに上の unique element を  $\mathbb{E}_G(t)$  とすると,  $t \rightarrow \mathbb{E}_G(t)$  は,  $M$  onto  $M^G$  の faithful normal  $G$ -invariant projection of norm one ( $G$ -expectation) で, すべて  $G$ -invariant normal state  $\phi$  に対して,

$\phi = \phi \circ \mathbb{E}_G$  である。逆に  $M$  onto  $M^G$  の  $G$ -(invariant) expectation があれば,  $M$  は  $G$ -finite で, その  $G$ -expectation は  $\mathbb{E}_G(\cdot)$  である。

次に  $G$ -finiteness の別の characterization を述べよう。

Theorem 2.  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は、 $M_*$  のかつた  $\tau$  weakly relatively compact subset  $K$  に対して

$$\{T_g \varphi; \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$$

が  $\tau$  weakly relatively compact となることである。

● 実は, Størmer は,  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は  $G$  に関して  $C(\tilde{G})$  でなない! Lemma 2 の命題が成立することであることを示した ([7])。

abelian case なら次のように記述できる。

$(X, \mathcal{M}, \mu)$  を  $\sigma$ -finite measure space とし,  $G$  を  $X$  上に left operate する a discrete group  $s \rightarrow ss, s \in X$  とし,  $\mu$  を quasi-invariant, i.e.  $\mu(ssE) = 0 \Leftrightarrow \mu(E) = 0$  all  $E \in \mathcal{M}$  とする。

$$d\mu(ss) = r_s(s) d\mu(s) \text{ を Radon-derivative}$$

$$\text{としよう。} \langle a^s, f \rangle = \langle a, r_{s^{-1}}(\cdot) f(ss^{-1} \cdot) \rangle$$

に注意して,

Corollary 1.  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  が Hopf-finite であるための必要充分条件は,  $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  のかつた  $\tau$  weakly relatively compact subset  $K$  に対して,

$$\{r_{s^{-1}}(\cdot) f(ss^{-1} \cdot), f \in K, g \in G\}$$

が  $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  で  $\tau$  weakly relatively compact になることである。

$G = \mathbb{N}$  の case は次の様である。

Corollary 2.  $M$  が finite であるための必要充分条件は,  $K \subset M_*$  なる  $K$  に対して weakly relatively compact subset に対して,

$$\{T_g \varphi; \varphi \in K, g \in \mathbb{N}\} = \{u^* \varphi u; \varphi \in K, u: \text{unitary of } M\}$$

が weakly relatively compact となることである。

Corollary 3.  $M$  が finite ならば,  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は,  $\forall K \subset M_*$  weakly relatively compact subset に対して,

$$\{T_g \varphi; g \in G, \varphi \in K\}$$

が weakly relatively compact となることである。

Theorem 2 の証明。以下  $M$  が  $G$ -finite を仮定する。

1 段。  $\{\varphi_i\} \subset M_*$  :  $\varphi_i \rightarrow \varphi_0$  weakly ( $\varphi_0 \in M_*$ ) とし,  $\{a_n\}$  は  $M$  の unit sphere  $S$  の sequence で,  $0$  に strongly に収束するものとする。この時,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i(a_n^2) = 0 \quad \text{uniformly for } i=1, 2, 3, \dots, \varphi \in \tilde{G}$$

である。

証明)  $\varphi = \sum \frac{|\varphi_i|}{2^i \|\varphi_i\|}$  とし,  $\varphi$  の  $M$  に於ける台を  $e_\varphi$  とし,  $e_\varphi$  の  $M^G \cap \mathcal{Z} (= M^{\tilde{G}})$  に於ける台を  $z^G(e_\varphi)$  とする。この時,  $M_{z^G(e_\varphi)}$  上に  $\tilde{G}$  は natural に act するから  $M_{z^G(e_\varphi)}$  は,  $G$ -finite



である。さらに  $M_{ZG(e_g)}$  は,  $\sigma$ -finite である。というのは,  
 $M_{ZG(e_g)}$  に至ける  $\tilde{G}$  の fixed subalgebra は,  $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$  であり,  
 従って Kovács の定理から  $M_{ZG(e_g)}$  onto  $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$   
 への faithful normal  $\tilde{G}$ -invariant projection of norm one  
 が存在するので,  $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$  が  $\sigma$ -finite を示せば充分である。  
 $\varphi$  の  $M^G \cap Z$  に至ける台を  $e_{g'}$  とすると  $ZG(e_g) \leq e_{g'}$  である  
 からこれは明らかである。又  $\varphi_i(a) = \varphi_i(a ZG(e_g)) \quad \forall a \in M, \forall i$   
 となるから  $M$  を  $\sigma$ -finite と仮定して, 一般性を失なわぬ。  
 よって, Theorem 1 から,  $M$  には, faithful normal  $G$ -invariant  
 trace が存在する。これを  $\tau$  としよう。

$S \ni x, y$  に対して,

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \tau((x-y)^*(x-y))^{1/2}$$

とすると  $(S, d)$  は, complete metric space である。

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \{a \mid a \in S \mid |\varphi_j(a) - \varphi_0(a)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq i\}$$

とすれば,  $H_i$  は closed で,  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$  となる。

従って Baire の Theorem によつて,  $\exists a_0 \in S; \exists \beta > 0$  (real);  
 $\exists j_0: S \cap \{a; d(a, a_0) \leq \beta\} \subset H_{j_0}$  となる。

$M$  が finite algebra であるから命題を示すには,  $a_n = a_n^*$   
 として一般性を失なわぬ。従つて  $M$  の射影元の列  $\{e_n\}$  が,  
 $e_n \rightarrow 1$  (s),  $\|a_n e_n\| \leq \varepsilon/6 \quad n=1, 2, 3, \dots$  なる如く存在する。

$$\|(a_n e_n)^g\| = \|a_n e_n\| \quad \forall g \in \tilde{G} \text{ に注意して,}$$

$$\begin{aligned}
& |(q_j - q_0)(a_n^g)| \\
& \leq |(q_j - q_0)(e_n^g a_n^g e_n^g)| + |(q_j - q_0)(e_n^g a_n^g (1 - e_n^g))| \\
& \quad + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g e_n^g)| + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))| \\
& \leq \varepsilon + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))|
\end{aligned}$$

とたゞ。

今  $b_n(g) \equiv e_n^g a_0 e_n^g + (1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g) \in S$  とする。

$$\begin{aligned}
& \tau((b_n(g) - a_0)^*(b_n(g) - a_0))^{1/2} \\
& \leq \tau((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^g) a_0^* (1 - e_n^g) a_0 (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^g) a_0^* e_n^g a_0 (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau(e_n^g a_0^* (1 - e_n^g) a_0 e_n^g)^{1/2} \\
& \leq 3\tau(1 - e_n^g)^{1/2} + \tau(1 - e_n^g) a_0 e_n^g a_0^* (1 - e_n^g)^{1/2} \\
& \leq 4\tau(1 - e_n^g)^{1/2} = 4\tau(1 - e_n)^{1/2}.
\end{aligned}$$

従って  $\tau(1 - e_n) \rightarrow 0$  (s) から  $g$  は independent に  $n_0(\beta)$  が (自然数) とれ,

$$\tau((b_n(g) - a_0)^*(b_n(g) - a_0))^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_0(\beta).$$

又  $e_n^g a_0 e_n^g \in S$  から

$$\tau((e_n^g a_0 e_n^g - a_0)^*(e_n^g a_0 e_n^g - a_0))^{1/2} \leq 3\tau(1 - e_n)^{1/2}$$

から  $\exists n_1(\beta)$  ( $g$  は independent) (自然数):

$$3\tau(1 - e_n)^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_1(\beta).$$

今  $n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta)$  とすると,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))| \leq 2\varepsilon$$

$\forall j \geq j_0$  によって, 全体として,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \leq 3\varepsilon \quad \forall j \geq j_0, \quad \forall n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta).$$

残りの  $|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)|$ ,  $j=1, 2, \dots, j_0-1$ , ( $\forall g \in \tilde{G}$ ) の部分  
は, 次のようである。

$$\{T_g(\varphi_j - \varphi_0), T_g\varphi_0, j=1, 2, \dots, j_0-1, g \in \tilde{G}\}$$

は, Theorem 1 の証明からわかるように weakly relatively compact である。よって Akemann [1] の定理により,  $\exists \Psi \in M_*$ ,  $\Psi \geq 0$ :  $\forall \varepsilon > 0$  に対して,  $\exists \delta > 0$ :

$$\Psi(a^*a + aa^*) < \delta \quad (a \in S) \Rightarrow \underbrace{|(T_g(\varphi_j - \varphi_0)(a))| < \varepsilon,}_{|T_g\varphi_0(a)| < \varepsilon}$$

$$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$$

である。今  $a_n \rightarrow 0 \quad (S)$  から  $\exists n_2(\varepsilon): \forall n \geq n_2(\varepsilon)$  に対して,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| < \varepsilon, \quad |\varphi_0(a_n^g)| < \varepsilon$$

$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$ 。従って, 前半とあわせて,

$$\left. \begin{aligned} |(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ |\varphi_0(a_n^g)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, j=1, 2, \dots.$$

よって  $|\varphi_j(a_n^g)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$  uniformly for  $g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots$ 。

今定理の証明をする。 $\{T_g\varphi, \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$  が weakly relatively compact であることをいうには, かつてな  $\{e_n\}$   $M$  の射影元の直交列に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(e_n^g) = 0 \quad \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, \varphi \in K$$

をいえる。もしそうでなければ、 $\exists \{e_n\} : \exists \varepsilon_0 > 0$

$\exists n_k (n_k \uparrow) (k=1, 2, \dots) \exists g_k \in \widehat{G}, \exists \varphi_k \in K \ k=1, 2, 3, \dots :$

$$(*) \quad |\varphi_k(e_{n_k}^{g_k})| \geq \varepsilon_0, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Eberlein - Šmulian の Theorem から  $\exists \{\varphi_{k_p}\} \subset \{\varphi_k\} : (k_p \uparrow \infty)$

$\varphi_{k_p} \rightarrow \varphi_0$  weakly  $(p \rightarrow \infty)$ ,  $\exists \varphi_0 \in M_*$  である。  $\varphi_{k_p} \rightarrow 0$

(S) から 前半により,

$$\varphi_{k_p'}(e_{n_{k_p}}^{g'}) \rightarrow 0 \ (p \rightarrow \infty) \text{ uniformly for } p', g' \in \widehat{G}$$

となり (\*) に矛盾する。よって  $\{\varphi \circ g; \varphi \in K, g \in \widehat{G}\}$  は,

weakly relatively compact である。

逆は, Theorem 1 及び, Kovács - Szűcs の Theorem による。

以上。

$G$ -finite でも  $G$ -finite でない例が沢山あるし, Corollary 3 を一般の場合に拡張することが今後の問題となろう。

## 文 献

- [1] C. A. Akemann : The dual space of an operator algebra,  
Trans. Amer. Math. 126 (1967), 286-302.
- [2] F. P. Greenleaf : Invariant means on topological  
groups, Van Nostrand, New York (1969).
- [3] I. Kovács - J. Szűcs : Ergodic type theorems in  
von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966),

233-246.

- [4] S. Sakai:  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras, Springer.
- [5] E. Størmer: Large groups of automorphisms of  $C^*$ -algebras, Comm. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.
- [6] \_\_\_\_\_: Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear.
- [7] \_\_\_\_\_: Invariant states of von Neumann algebras, To appear.
- [8] \_\_\_\_\_; Invariant measures and von Neumann algebras, unpublished.
- [9] F. J. Yeadon: A new proof of the existence of a trace in a finite von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 257-260.
- [10] T. Hamachi: Construction of the finite center-valued relative dimension function of a  $W^*$ -algebra, and invariant measures, To appear.
- [11] K. Saitô: Automorphism groups of von Neumann algebras and Ergodic type theorems, To appear.