

秤の点検と計り直しに関する数理モデル

流通科学大・情報学部 三道 弘明 (Hiroaki Sandoh)
Department of Information & Management Science,
University of Marketing & Distribution Sciences

1. はじめに

化学物質などを生産する工程の最終段階において、袋詰めなどにされた製品の重量を秤で測定し、その結果を製品に記載するという工程が存在する。このような工程は、例えば約 250Kg 収容可能なドラム缶に化学物質を詰め込み、最終段階でその正確な重量を測定し、結果をドラム缶に記載するというような場合に見られる。これとよく似た作業に、スーパーなどの小売業において、ほぼ同じ大きさの肉片や魚介類をパックし、その価格を決定するために、パックを計量するという作業がある。

一般に化学物質の製造工程におけるこのような計量工程は製品そのものの品質には直接影響しないためそれほど重視されておらず、経費もかけられていない。しかし、計量を継続しているうちに秤自身に狂いが生じることも少なくなく、狂いが生じた秤で計量された製品は、記載された重量と実際の重量とが異なったまま出荷されることとなる。特に、製品が化学薬品のような物質である場合、記載された重量と実際のそれとが異なっていると、消費者がこのような製品をそのまま化学反応に用いた際に正しく反応しないこととなる。このような場合には、大きなクレームが寄せられるばかりでなく、製造業者としての信用をも失墜しかねない。以下では、このように実際の重量と記載された重量が異なる製品を、その製品の品質に関係なく**不良品**と呼ぶこととする。現実には、こうした秤の狂いは、秤に対して定期的な点検を実施することによって検出可能である。

製品が非常に高価であったり、実際の重量と記載重量にズレが存在すること自体非常に重大な問題となる場合には、製品の出荷に先立って秤の点検を行い、秤が正常であることを確認した上で出荷することとなる。しかし、そうでない場合には、秤の点検結果を待たず、計量が終わると逐次製品を出荷している。これは、製品の納期を優先したり、計量工程にかかる費用を可能な限り削減するためである。ところが、このように秤の点検結果を一切待たずに出荷する場合でも、秤に対して定期的な点検を行うことで、出荷される不良品の量のある程度制御することは可能である。

また、点検結果を一度だけ待ち、秤に異常がなければ製品をそのまま出荷するが、異常が検出されたときには、計り直しを行ってから製品を出荷するという場合も見受けられる。但し、計り直しを行った場合には、次の点検を待たずに、計り直しが完了した時点で全商品を出荷している。ところが、計り直しの際にも秤に再度狂いが発生する可能性が存在しており、実際にはこのことで不良品が出荷されている。このような場合にも、すべての製品を計り直すのではなく、一部の製品を計り直すに止めることで出荷される不良品の量のある程度制御することができる。

以上のように、単なる計量工程においても秤の異常によって種々の問題が存在している。しかも、秤の構造や、点検、調整作業が単純かどうか、技術を必要とするかどうかによって、様々な対応が考えられる。同様に、計量を終えた製品の取り扱い方法によっても対応は様々である。本研究では、これらの問題を整理し、定期的点検によって不良品の出荷量を抑制する点検政策と、計り直しを行う量を調整することで不良品の出荷量を制御するための数理モデルを展開する。以下では、計量すべき製品の量は多く、これを連続量と見なすことで、秤に狂いが発生した時間をそれまでに計量した製品量

に対応させて考えることとする。更に、秤に狂いが発生する時間間隔を分布関数 $F(t)$ をもつ確率変数として表現し、 $F(t)$ には平均 $\mu = \int_0^\infty t dF(t)$ が存在するものとする。

2. 秤の点検政策

ここでは、前述したように秤の点検がそれほど複雑な作業や特別な技術を必要としない場合を念頭においている。更に、計量を終えた製品は逐次出荷され、秤に対しては時刻 $iT (i = 0, 1, 2, \dots)$ で点検を行うこととする。このとき、秤の構造に応じて、点検作業と調整作業が異なる場合もあれば、点検自身調整作業を伴う場合とが存在する。以下では、前者の場合を扱うモデル [1, 2] を Model I, 後者の場合を扱うそれ [3] を Model II と呼ぶこととする。

2.1 Model I

Model Iにおいては、秤の点検が完了した時点で秤は正常に戻ることから、この時点を再生点とする再生過程 [5],[6] を形成することは明らかである。よって、Model Iにおける不良率 $Q_1(T)$ は

$$Q_1(T) = \frac{\int_0^T F(t)dt}{T} = 1 - \frac{\int_0^T \bar{F}(t)dt}{T} \quad (1)$$

となる。ここで、製造業者の立場から、市場に出荷される不良品の割合である不良率を、 α 以下に押さえることを考える。式 (1) より

$$\lim_{T \rightarrow +0} Q_1(T) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} Q_1(T) = 1 \quad (3)$$

$$Q'_1(T) = \frac{-[T\bar{F}(T) - \int_0^T \bar{F}(t)dt]}{T^2} \quad (4)$$

が成立する。ここで

$$R_1(T) = -T\bar{F}(T) + \int_0^T \bar{F}(t)dt \quad (5)$$

とおくと

$$R'_1(T) = T f(T) > 0 \quad (6)$$

$$\lim_{T \rightarrow +0} R_1(T) = 0 \quad (7)$$

が成り立つことから、 $Q'_1(T) > 0$ であり、 $Q_1(T)$ は $(0, 1)$ における T の単調増加関数である。故に、 $Q_1(T) \leq \alpha (0 < \alpha < 1)$ を満足する最大の T が唯一存在する。

次に、単位製品量当たりの期待費用を最小にするという意味での経済的点検政策について考察する。不良品を出荷した場合の1単位時間あたりに計量された不良品に要する費用を c_1 、1回の点検、調整に必要な費用を c_2 とする。このとき無限期間における単位時間当たりの期待費用は、再生報酬過程 [5],[6] の性質を用いて

$$C_1(T) = \frac{c_1 \int_0^T F(t)dt + c_2}{T} \quad (8)$$

で与えられる。 $C_1(T)$ を T に関して微分すると、 $C_1'(T) \geq 0$ は

$$R_1(T) \geq \frac{c_2}{c_1} \quad (9)$$

に等価であることがわかる。 よって、式 (6), (7) より

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} R_1(T) = \mu > \frac{c_2}{c_1} \quad (10)$$

ならば、 $C_1'(T)$ の符号は負から正に唯一度だけ変化し、 $C_1(T)$ を最小にする有限の $T = T^*$ が唯一存在する。 また、不等式 (10) が成り立たない場合には、 $C_1'(T) \leq 0$ であり、 $T^* = +\infty$ となり、一切点検を実施しないことが最適となる。

なお、Model I と同様の考え方に基づき離散型確率分布を用いたモデル [1] や、1 日の計量時間を τ としたとき、これを N 等分し、時刻 i/N ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) で点検 (調整) を行うモデル [2] も存在する。

2.2 Model II

Model II の下では、点検は秤の異常を検出する目的で実施され、秤に異常が発見されたときのみ調整を行う。 このとき、調整が完了した時点再生点とする再生過程が形成される。 よって、Model II における不良率 $Q_2(T)$ は、次式で与えられる。

$$Q_2(T) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \int_{iT}^{(i+1)T} [(i+1)T - t] dF(t)}{\sum_{i=0}^{\infty} \int_{iT}^{(i+1)T} (i+1)T dF(t)} = 1 - \frac{\mu}{T \sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}(iT)} \quad (11)$$

ここで

$$\lim_{T \rightarrow +0} Q_2(T) = 1 - \frac{\mu}{\int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt} = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} Q_2(T) = 1 \quad (13)$$

が成立し、 $Q_2(T)$ を T に関して微分すると

$$Q_2'(T) = \frac{\mu \sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}(iT) [1 - iT r(iT)]}{[T \sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}(iT)]^2} \quad (14)$$

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad (15)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (16)$$

が得られる。式 (14) より、 $Q_2(T)$ は T に関して必ずしも単調性をもたないため、一般分布 $F(t)$ の下で、不良率を α 以下に抑制する最大の点検時間間隔 T の存在を解析的に示すことは困難である。但し、分布関数 $F(t)$ が指数分布のそれであるとき、 $Q_2(T) = Q_1(T)$ となり、解析結果は Model I のそれと同じになる [3]。

次に、単位製品量当たりの期待費用を最小にするという意味での経済的 point 検政策について考察する。 Model I で使用した費用 c_1, c_2 に加え、1 回当たりの調整費用を c_3 を導入する。このとき無限期間における単位時間当たりの期待費用は

$$C_2(T) = c_1 + \frac{c_2}{T} - \frac{c_1 \mu - c_3}{T \sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}(iT)} \quad (17)$$

で与えられる。しかしここでも、一般分布 $F(t)$ の下で、 $C_2(T)$ を最小にするような $T = T^*$ の存在を解析的に示すことは困難である。但し、 $F(t)$ が指数分布の分布関数である場合には、 T^* の存在条件を明らかにすることは可能である [3]。

3. 計り直しの問題

ここでは次のような状況を考える。すなわち、製品の重量が大きく、これらは特殊な秤を使って計量される。また秤が特殊である関係で、その点検や調整には特殊な技術が必要であり、有資格者でないと点検、調整を行うことはできない。秤の点検、調整は、毎日朝夕の2回、つまり作業開始前と作業終了後の2回、有資格者が現場に出向き実施する。更に、秤の点検自身が調整作業を含んでおり、これらは区別されない。計量を終えた製品は、概ね計量の終了した順にその場に山積みされ、夕方に実施される点検で異常が検出されなければそのまま出荷される。秤に異常が発見されたときには、現状ではすべての製品を計り直しているが、ここでは過去に遡及して割合 $u (0 \leq u \leq 1)$ だけ計り直すことを考える [4]。

上に述べたような方策を考えると、市場に出荷される不良品の割合である不良率 $Q(u)$ は

$$Q(u) = \frac{\int_0^{(1-u)\tau} F(t)dt + F(\tau) \int_0^{u\tau} F(t)dt}{\tau} \quad (18)$$

となる。ここに、 τ は1日の計量時間あるいは、1日の計量時間に対応させた製品数を表す。よって、 $Q(u)$ を最小にするような $u = u^*$ が存在すれば、これが不良率を最小にするという意味での最適な計り直しの割合である。

式 (18) より、次が成立する。

$$Q'(u) = F(\tau)F(u\tau) - F[(1-u)\tau] \quad (19)$$

$$Q'(0) = -F(\tau) (< 0) \quad (20)$$

$$Q'(1) = F^2(\tau) (> 0) \quad (21)$$

よって、 $Q'(u)$ は u の増加関数であり、しかもその値は負から正に唯一度だけ変化する。従って、不良率 $Q(u)$ を最小にする $u = u^* (0 < u^* < 1)$ が唯一存在する。

また、式 (18) より

$$Q(0) = \frac{\int_0^{\tau} F(t)dt}{\tau} \quad (22)$$

$$Q(1) = \frac{F(\tau) \int_0^{\tau} F(t)dt}{\tau} \quad (23)$$

を得る。よって

$$Q(0) > Q(1) \quad (24)$$

が成立し、一切計り直しを行わない場合の不良率は、すべてを計り直す場合のそれよりも大きいことがわかる。

ここで、許容不良率を $\alpha (0 < \alpha < 1)$ とするとき、 $Q(u) \leq \alpha$ を満足する最小の計り直し量を与える割合を u_α と書くこととすると、以上の解析結果より、 u_α は次のようになる。

- (1) $\alpha \geq \int_0^{\tau} F(t)dt / T$ ならば、 $Q(u) \leq \alpha$ for $0 \leq u \leq 1$ が成立し、 $u_\alpha = 0$ である。すなわち計り直しは必要ないこととなる。

(2) $\int_0^\tau F(t)dt/\tau > \alpha > F(\tau) \int_0^\tau F(t)dt/\tau$ である場合, $Q(u) = \alpha$ を満たす唯一の $u_\alpha (0 < u_\alpha < 1)$ が存在する.

(3) $\alpha \leq F(\tau) \int_0^\tau F(t)dt/T$ のときには, 次のような場合分けが必要である.

(a) $Q(u) = \alpha$ となる u が 2 つ存在するとき, 小さい方を u_α とする.

(b) $Q(u) = \alpha$ となる u が唯一の場合には, それが u_α である.

(c) $Q(u) = \alpha$ が解をもたないときには, 計り直しをしても不良率を α 以下に抑えることはできない.

次に, 1 単位時間に対応した不良品を市場に出荷した場合に要する費用を c_1 とする. また, 1 単位時間あたりに製品を計り直すために必要な費用を c_2 とする. 但し, $c_2 < c_1$ と仮定する. このとき, 1 日あたりに要する期待費用は

$$C(u) = c_1 \left[\int_0^{(1-u)\tau} F(t)dt + F(\tau) \int_0^{u\tau} F(t)dt \right] + c_2 u \tau F(\tau) \quad (25)$$

で与えられる. よって $C(u)$ を最小にするような $u = u^{**}$ が経済的な計り直しの割合を与える.

式 (25) より, $C'(u) \geq 0$ は

$$\frac{F[(1-u)\tau]}{F(\tau)} - F(u\tau) \leq \frac{c_2}{c_1} \quad (26)$$

に等価である. 式 (26) の左辺を $L(u)$ とおくと

$$L(0) = 1 > \left(\frac{c_2}{c_1} \right) \quad (27)$$

$$L(1) = -F(\tau) < 0 \quad (28)$$

$$L'(u) = -\tau \left[\frac{f[(1-u)\tau]}{F(\tau)} + f(u\tau) \right] (< 0)$$

が成立する. 故に, 不等式 (26) を満たす最小の $u = u^{**}$ が唯一存在し, これが $C(u)$ を最小にするという意味で経済的な計り直しの割合を与える.

4. 数値例

4.1 点検政策

Model I においては, 秤の異常はランダムに発生すると考え, ここでは異常が生起する時間間隔に対して分布関数が次式で与えられる指数分布を考える.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (29)$$

図 1 は $\lambda = 0.2 (\mu = 5)$ とした場合の不良率 $Q_1(T)$ であり, 不良率の単調性が見て取れる.

Model II では, 秤に異常が発生する時間間隔に対して, 分布関数が次式で与えられるワイブル分布を考える.

$$F(t) = 1 - \lambda e^{-\lambda t^\beta} \quad (30)$$

ワイブル分布のパラメータを $(\lambda, \beta) = (0.031420, 2), (0.005698, 3), (0.000209, 5)$ とした場合の不良率 $Q_2(T)$ を図 2 に示す. なお, これらのパラメータは, いずれの組み合わせも $\mu \approx 5$ を与える. 図 2 より, 不良率に単調性がないことがわかる.

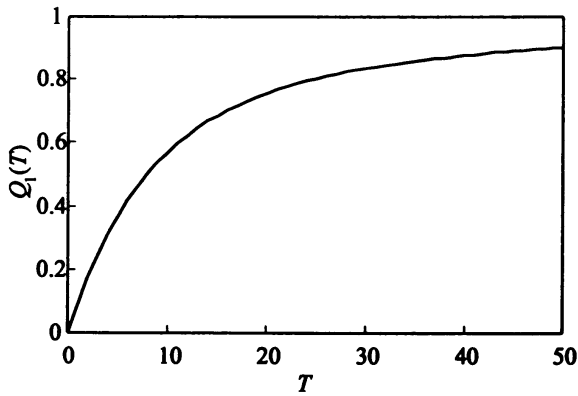


図 1: 不良率

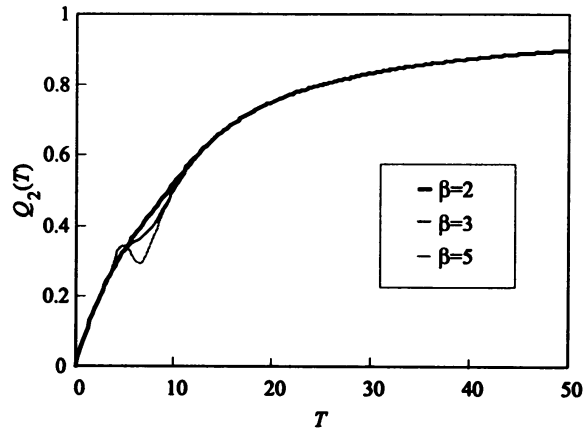


図 2: 不良率

4.2 計り直しの問題

ここでは、秤に狂いが生じるまでの時間間隔に対して、分布関数が次式で与えられるガンマ分布を考える。

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} \quad (31)$$

図 3 は、 $\lambda = 0.73$ とした場合の不良率 $Q(u)$ であり、 λ がこの値のとき、 $F(T) \approx 1/6$ が成立し、秤は 6 単位時間に 1 度の割合で狂うこととなる。図 3 より不良率を最小にするような計り直しの割合 $u = u^*$ が存在することがわかる。つまり、計り直しの際に秤に再度異常が発生する可能性が存在する関係で、現状のように全製品を計量し直すのではなく、過去に遡って一部を計り直す方が、市場に流出する不良品の割合が抑制されるという意味で、得策であることがわかる。

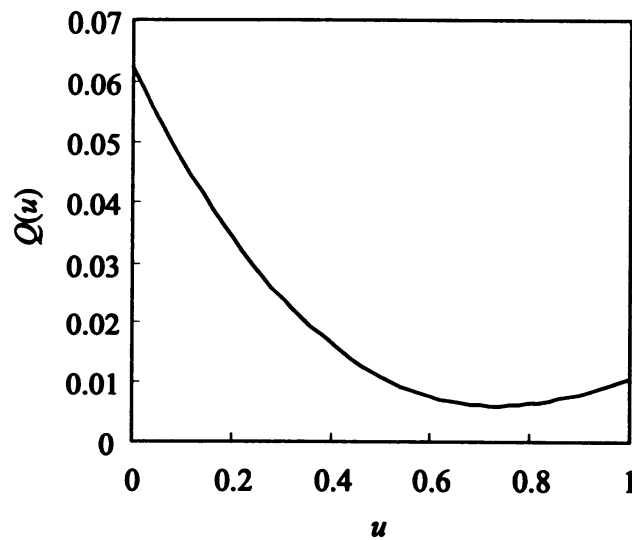


図 3: 不良率

5. むすび

生産の最終工程において、製品の最終的な重量を秤を用いて計量する場合がある。このような計量工程においては、秤に狂いが発生することも少なくなく、狂いの発生した秤で計量した製品は、記載重量と実際の重量が異なることとなる。本研究では、このような状況に焦点を絞り、秤の点検政策と計り直しの問題について考察し、それぞれの数理モデルを展開した。計量を終えた製品を即座に出荷する場合には、秤に定期的点検を施すことで、実重量と記載重量が異なる製品の市場流出をある程度抑制することが可能である。また、すべての製品の計量を終えた時点で秤の点検を実施し、秤に異常がない場合にはそのまま製品を出荷、秤に異常が検出された場合には、秤の調整を行った上で計り直しを行い、計り直しが終了するとそのまま製品を出荷するというような場合には、すべての製品を計り直すのではなく、過去に遡って一部の製品を計り直す方が得策であることを明らかにした。但し、これは計り直しの際にも、秤に狂いが生じる可能性が存在するからである。

参考文献

- [1] 三道弘明：秤の最適点検政策に関する研究, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J83-A, No. 3, pp. 302-308 (2000).
- [2] 井垣伸子, 三道弘明：秤の最適点検頻度に関する研究, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J84-A, No. 6, pp. 827-833 (2001).
- [3] H. Sandoh and N. Igaki : Inspection Policies for a Scale, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 220-231 (2001).
- [4] 三道弘明, 中川覃夫, 太田俊彦: 化学製品に対する最適計り直し量に関する一考察, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 45, No. 2, pp. 76-80 (2000).
- [5] Ross, S. M.: *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco (1970).
- [6] Ross, S. : *Stochastic Processes, Second edition*, John Wiley & Sons, New York (1996).