

3 値を用いた Fail-Safe 論理回路

明治大学 大学院

河 敷 政 男

§ 0. あらまし

この報告は, Fail-Safe 論理の理論的研究について述べたものである。Fail-Safe 論理に適した 3 値論理関数の性質について調べ, これを用いた Fail-Safe 論理系の構成法を示す。また, 3 値論理を利用した Fail-Safe 論理回路の構成についても概説する。

KEYWORDS ; 論理代数

論理回路理論

Fail-Safe 論理

C 形論理関数

B-3 値論理関数

§ 1. まえがき

トランジスタ, 抵抗, ダイオードなどで構成されている (2 値) 論理回路では, 構成要素の故障で, 真理値 0 であるべきとき 1 になったり, 1 であるべきとき 0 になったりする場合がある。

能力が十分にあり得る。これでは、人命を預かる分野などでは安心して使用するわけにはゆかない。そこで、故障して正常な出力を出し得なくなるときには、必ず、真理値の0でも1でもない出力—真理値 $\frac{1}{2}$ —を出すような論理回路—Fail-Safe 論理回路—が望まれる。すなわち、Fail-Safe 論理回路は、論理演算の他に、故障~~を~~自身自身で発見してこれを示す能力も有する。工夫を凝して回路を構成することにより、このような Fail-Safe 論理回路を構成することができ*2,*4。

§2. C形論理関数と B-3 値論理関数

Fail-Safe 論理回路では、回路が故障すると入力のリカムにかかわらず出力は $\frac{1}{2}$ となる。また、正常なときこの論理回路が実行する論理関数は、入力が2値(0, 1)に限られれば出力は必ず2値(0, 1)に限られる。故障を表わす入力 $\frac{1}{2}$ があつたとき、出力の真理値をいかに割り当てるか。こゝに、この回路が実行する3値論理関数としての、ある程度の自由度がある。

入力に一つでも $\frac{1}{2}$ があると、出力は必ず $\frac{1}{2}$ となるような3値論理関数をC形論理関数と^{*6}いう。すなわち、

$$V_2 = \{0, 1\}, \quad V_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$$

x , 変数

$$X = (x_1, \dots, x_n), x_i \in T_3$$

とするとき,

定義 1; $X \in T_2^n \Rightarrow F(X) \in T_2$

$$X \in T_3^n - T_2^n \Rightarrow F(X) = \frac{1}{2}$$

なるとき, F を C 形論理関数という。|| こので, 記号

|| は定義, 定理などの終りを示すものとする。

2値論理の演算 AND , OR , NOT を, 上のように3値まで拡張した演算を $\odot$, $\vee$, $\sim$ で表わると,

$$x_1 \odot x_2, \quad x_1 \vee x_2, \quad \sim x_1$$

の真理値表は表1～表3のようになる。すなわち,

定義 2; 演算 $\odot$, $\vee$, $\sim$ の真理値表を表1～表3で定義する。 ||

$x_1 \backslash x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

表1. $x_1 \odot x_2$

$x_1 \backslash x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$	1

表2. $x_1 \vee x_2$

x_1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0

表3. $\sim x_1$

一方, 2値論理の AND , OR , NOT を次のようにも拡張できる。すなわち, 入力変数に $\frac{1}{2}$ があるときは, その変数

が0だと仮定したときの出かち、1だとしたときの出かちが等しければ、その値を出かに割り当て、異なるときは $\frac{1}{2}$ を割り当てる。このように拡張した演算を $\cdot$, $\vee$, $\sim$ で表わると、

$$x_1 \cdot x_2, \quad x_1 \vee x_2, \quad \sim x_1$$

の真理値表は、表4、表5、表3となる（NOTの拡張 $\sim$ については定義2と同じ）。すなわち、

定義3； 演算 $\cdot$, $\vee$ の真理値表を、表4、表5で定義する。 〓

$x_1 \backslash x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

表4. $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \backslash x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

表5. $x_1 \vee x_2$

定理1； すべてのC形論理関数は、各変数と演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ の結合により表現できる。 〓

また、各変数と演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ の結合により表現される関数はB-3値論理関数と呼ばれる。すなわち、帰納的に定義すると、

定義4； ① $0, 1, \alpha_i (i \in T_3)$ はB-3値論理関数である。

② A, B がB-3値論理関数ならば、 $\sim A, A \cdot B,$

$A \vee B$ は $B-3$ 値論理関数である。

③上で与えられるもののみが $B-3$ 値論理関数である。 $\parallel$

演算 $\odot$, $\vee$, $\sim$ に関しては, 2値論理で成り立つ

(i) 吸収律 $A \vee (A \odot B) \equiv A$

$$A \odot (A \vee B) \equiv A$$

(ii) 相補律 $A \odot \sim A \equiv 0$

$$A \vee \sim A \equiv 1$$

(iii) 零元の存在 $A \odot 0 \equiv 0$

$$A \vee 1 \equiv 1$$

は必ずしも成り立たない。

また, 演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ については, 真理値 $\frac{1}{2}$ を不確定に刻印させて古くから研究されている*1。これらについては, 2値論理で成り立つ

(i) 相補律 $A \cdot \sim A \equiv 0$

$$A \vee \sim A \equiv 1$$

は必ずしも成り立たない。

C 形論理関数では, 誤りを示す入力 $\frac{1}{2}$ が一つでもあれば, 出力は必ず $\frac{1}{2}$ となる。 $B-3$ 値論理関数にはいかなる性質があるか。これを調べる。

まず, 3値論理関数の定義域 T_3^n に, ある半順序関係 $\succeq$

を定義する。

定義5; $(a = (a_1, \dots, a_n), \ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in V_3^n$ で、

$$a_i \in V_2 \text{ のとき } a_i \equiv \ell_i$$

$$a_i = \frac{1}{2} \text{ のとき } \ell_i \in V_3$$

がすべての i で成立するとき、

$$a \geq \ell$$

とする。 //

こゝで、

定義6; a に表われるすべての $\frac{1}{2}$ を、0 または 1 で置き換えて得られるすべての V_2^n の元よりなる集合を

$$(a^*)$$

で表わす。 //

とすると、関係 $\geq$ は、上で定義した集合の包含関係と一致する。おなわち、

定理2; $a \geq \ell$ α

$$\Leftrightarrow$$

$$(a^*) \supset (\ell^*) \quad //$$

関係 $\geq$ を用いて、B-3 値論理関数の必要十分条件が与えられる。

定理3; 3 値論理関数 F が B-3 値論理関数であるための必要十分条件は、

$$(i) \quad (a \in T_2^n \Rightarrow F(a) \in T_2 \quad \text{かつ}$$

$$(ii) \quad (a \geq b \Rightarrow F(a) \geq F(b))$$

である。 Ⅱ (証明は § 8 附録参照。)

よ、て、B-3値論理関数の定義(定義4)のかわりに、定理3の(i), (ii)を用いともよい。これからわかることは、B-3値論理関数では、ある入力 a のときの値 $F(a)$ が $\frac{1}{2}$ ならば、 a よりも $\frac{1}{2}$ が多い入力に対しては必ず $\frac{1}{2}$ となる。また、 $F(a)$ が 0 ならば、 a よりも $\frac{1}{2}$ が多い入力に対しては決して 1 になることはない($F(a)$ が 1 のときは 0 になることはない)。また、入力が 2 値(0, 1)に限られるば、出力は必ず 2 値(0, 1)に限られる。

定理3から、たがちに次の系が導かれる。ただし、

$$F(a^*)$$

とは、変数が集合 a^* のすべての値をとるとき、関数 F のとる値のすべてからなる集合とする。

系1; F が B-3 値論理関数ならば

$$\forall (a \in T_2^n) \quad \sim F(a) \notin F(a^*) \quad \parallel$$

系2; F が B-3 値論理関数ならば

$$F(a) \equiv \frac{1}{2} \iff F(a^*) = \{0, 1\}$$

$$F(a) \equiv 0 \Rightarrow F(a^*) = \{0\}$$

$$F(a) \equiv 1 \Rightarrow F(a^*) = \{1\} \quad \parallel$$

定義 1 かよひ定理 3 から ちか 5 に

定理 4; C 形論理関数は, B-3 値論理関数である。||

たとえば, 演算 $\odot$, $\vee$ を演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ で表わしてやる
と,

$$\begin{aligned} x_1 \odot x_2 &\equiv (x_1 \vee x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \sim x_2) \\ &\equiv x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \cdot \sim x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 &\equiv x_1 \cdot x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_2 \\ &\equiv (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \sim x_1) \cdot (x_2 \vee \sim x_2) \end{aligned}$$

となる。

C 形論理関数も含め, 任意の定理 3 の (i), (ii) を満す関数 (B-3 値論理関数) から与えられたとき, この関数を各変数と演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ の結合で表現する, あるアルゴリズムが求められるが, こゝでは省略する。(附録参照)

系 2 からわかるように, B-3 値論理関数では入力に $\frac{1}{2}$ が含まれていても必ずしも出力は $\frac{1}{2}$ にはならない。ちなみに, 誤り訂正能力を有している場合がある。 $F(I(A^*)) = \{0\}$ (または $\{1\}$) とは, $I(A)$ に含まれる誤り入力 $\frac{1}{2}$ が 0 だけ (または 1 だけ) しかないことも出力は必ず 0 (または 1) になることを意味しているから,

$$F(I(A^*)) = \{0\} \Rightarrow F(I(A)) \equiv 0$$

$$(\text{または } F(I(A^*)) = \{1\} \Rightarrow F(I(A)) \equiv 1)$$

とすれば、この関数は最大の誤り訂正能力を有した関数^{*3}といえる。

定義 7; $X \in V_2^n \Rightarrow F(X) \in V_2$ で

$$\text{ii) } F(1A) \equiv \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(1A^*) = \{0, 1\}$$

$$\text{iii) } F(1A) \equiv 0 \Leftrightarrow F(1A^*) = \{0\}$$

$$\text{iii) } F(1A) \equiv 1 \Leftrightarrow F(1A^*) = \{1\}$$

なるとき、 F を P 形論理関数という。 〓

定理 5; P 形論理関数は $B-3$ 値論理関数にある。 〓

各変数と演算 $\cdot, \vee, \sim$ の結合に F を P 形論理関数の一つの表現方法に、≡ 記号、高岡氏が述べているように^{*3}、2 値論理でいう Prime-implicant 利用といわれる方法がある。

ある 2 値論理関数 f が与えられたとき、~~2~~^{入力} が 2 値 (0, 1) に限られたとき f を満たすような C 形論理関数、 P 形論理関数は、定義 1, 定義 7 からわかるように一意的に定まる。2 値論理の AND, OR, NOT に対応する C 形論理関数が演算 $\cdot, \vee, \sim$ 、 P 形論理関数が演算 $\cdot, \vee, \sim$ である。よって、 C 形論理関数が誤り訂正能力最小の、 P 形論理関数が最大の関数である。

なお、ここで述べた $B-3$ 値論理関数は、 $\frac{1}{2}$ を ϕ とした、渡辺、平山、浦野氏^{*5} の歌唱する ϕ 形論理関数と同一のものである。

§.3 Fail-Safe 論理系の構成

Fail-Safe 論理系は、いくつかの Fail-Safe な基本論理回路から構成される。

定義 8; 基本論理回路が、B-3 値論理関数を実行する回路で、回路が故障すると、入力にかかわらず出力は必ず $\frac{1}{2}$ になるとき、この基本論理回路は Fail-Safe であるという。 Ⅱ

論理系を構成しているいくつかの基本論理回路が故障したとき、この論理系に故障が生じたという。

定義 9; ある B-3 値論理関数 F を実行する論理系が次の条件を満すとき、この論理系を Fail-Safe 論理系という。

- (i) 論理系が正常な動作をしているときの出力を $F(X)$ 、故障が生じたときの出力を $F'(X)$ とするとき、すべての入力 X について、すべての系内の故障に対して

$$F(X) \leq F'(X)$$

である。 Ⅱ

Fail-Safe 論理系では、故障が生じたときの出力は正しいか、または $\frac{1}{2}$ であることがわかる。また、定義 9 の特殊な場合として C 形 Fail-Safe 論理系が定義される。

定義 10; ある C 形論理関数 F を実行する論理系が次の条

件を満たすとき、この論理系を C形 Fail-Safe 論理系という。

- (ii) 論理系が正常な動作をしているときの出力を $F(X)$ 、故障が生じたときの出力を $F'(X)$ とするとき、すべての入力 $X \in \mathcal{X}$ について、いかなる故障に対しても

$$F(X) \leq F'(X) \equiv \frac{1}{2}$$

である。

||

C形 Fail-Safe 論理系では、基本論理回路が一つでも故障すると、おまけに入力に故障入力 $\frac{1}{2}$ が一つでもあると、これを即座に検出して論理系の出力を $\frac{1}{2}$ とする。ちなみに、C形 Fail-Safe 論理系は、最終出力として 0 または 1 が出ている間は、この論理系を構成しているすべての基本論理回路が正常に動作していることを保証する。

通常、Fail-Safe 論理系の構成要素として、演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$, または $\odot$, $\vee$, $\sim$ を実行する Fail-Safe な基本論理回路が用いられる。

定理6; すべての Fail-Safe 論理系は、演算 $\cdot$, $\vee$, $\sim$ を実行する Fail-Safe な基本論理回路より構成できる。

||

定理7; すべての C形 Fail-Safe 論理系は、演算 $\odot$, $\vee$, $\sim$ を実行する Fail-Safe な基本論理回路より構成できる。

。 Ⅱ

ある2値論理系が, AND, OR, NOT の結合で構成されているとき, この論理系に Fail-Safe の性能をもたせるためには, 3値まで拡張した^{*}1, $V, \sim$ を実行する Fail-Safe な基本回路で, これらを置き換えれば Fail-Safe 論理系となる。また, 演算^①, $V, \sim$ を実行する Fail-Safe な基本論理回路に置き換えれば, C形 Fail-Safe 論理系となる。

以上述べた Fail-Safe 論理系, C形 Fail-Safe 論理系では, 論理系内に11かかる故障が生じても, 真理値0であるべきとき1になり, 逆に, 1であるべきとき0になり, たりすることはない。すなわち, 出力に $\frac{1}{2}$ が得られれば, 論理系を構成している基本論理回路に, 故障が生じたことを示している。

§4. Fail-Safe 論理回路構造の概要

Fail-Safe 基本論理回路を実際に物理的に実現するためには, 多くのアイディアが必要である。その特徴は^{*2}

1° ポテンシャル極大の概念

2° ベクトル和の概念

である。

ポテンシャルの低い点から無条件に高い点になることはないから、正常な出力である真理値 0, 1 にはポテンシャル極大の点、すなわち不安定の平衡点を対応させる。ポテンシャルの低い点に、故障の状態を表わす真理値 $\frac{1}{2}$ を対応させる。

物理的には、

真理値 0 : 電圧 $-V[V]$

真理値 1 : 電圧 $+V[V]$

真理値 $\frac{1}{2}$: 電圧 $V > |u|$ なり $u[V]$

のように対応させる。

また、上のようなポテンシャル極大の点を維持するには、すべての条件が正しいときのみ、すなわち、各条件を一つのベクトルで例えればそのベクトル和が0でないときのみとする。何か^障害が生ずればベクトル和が0にならないことを利用する。これを満す物理的現象として発振現象を利用する。すなわち、発振回路が発振するのは、発振回路のすべての構成要素がある特性の範囲内にあるときのみで、部品の断線、短絡、特性の劣化などによりある範囲外に特性になると発振は停止する。また、自励発振を抑えるため閾値発振を利用する。この発振出力を $-V[V]$, $+V[V]$ に整流して、それを真理値 0, 1 とする。

以上の概念を用いて、Fail-Safe な基本論理回路が図

1のように構成される。この回路が実行する論理関数を

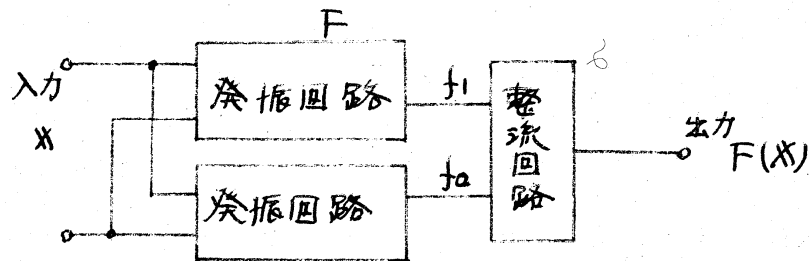


図1. Fail-Safe 基本論理回路構成図

F となるとき, $F(X) \equiv 1$ のとき発振する回路と,
 $F(X) \equiv 0$ のとき発振する回路をもつ。これらの発振回
 路が発振しているときを真値 1, 発振停止のときを 0 とし
 れば^{**}, この回路が実行する論理関数 f_1, f_0 は

$$f_1 \equiv \bigvee_i (F(X))$$

$$f_0 \equiv \bigvee_o (F(X))$$

となる。そして, この発振出力を整流し $+V(F), -V(F)$
 とする。すなわち, この整流回路が実行する論理関数 F は

$$F \equiv f_1 \sim f_0 \vee \frac{1}{2} \sim f_0 \sim f_1$$

^{**} 2値変数の 0, 1 と, 3値変数の 0, 1 とをまったく別
 の物理的状態に対応させているが, 2値状態は基本論理回路
 の内部のみであらうからさしつかえない。また, このことか
 ら, 回路に Fail-Safe 性を持たせる一因ともなり, ている。

となる。実際、これらの論理演算を行なうように、発振回路、整流回路も構成できる。このようにすれば、発振回路や整流回路など、あらゆる部品の故障は入力電圧の低下の方向であり、故障すれば出力は必ず $\frac{1}{2}$ となつて Fail-Safe な基本論理回路が構成できる。

以上の構成法により、条件

$$(A \leq B \Rightarrow F(A) \leq F(B))$$

も満す3値論理関数も実行する Fail-Safe な論理回路が構成できる。実際、第3章の $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\cdot$, $\vee$ なども実行する Fail-Safe な基本論理回路が試作、実験されている。詳しいことは、文献*4 を参照されたい。

§. 5. あとがき

Fail-Safe 論理回路に適用される3値論理関数は、結局、AND ($\cdot$), OR ($\vee$), NOT ($\neg$) に表現できる関数—3値論理関数—である。本論文では、この関数を、関数の定義域にわたる半順序関係を定義することにより統一的に取り扱った。これらの理論は、一つ Fail-Safe のみにとどまらず、ハザードの検出、Speed-Independent-logic、非同期論理回路などへ応用することができる。

§ 6. 謝 辞

本報告は、文献*2~*5 に負うところが大きい。こゝに感謝致します。

本研究は、筆者が電気試験所制御部自動制御研究室の実習生として行ったもので、御指導戴いた駒宮電子部品部長、土屋技官に、また御便宜を計りて戴いた上滝制御部長、佐藤自動制御室長に感謝致します。

最後に、日頃御指導、ご鞭撻を蒙り、明治入学後藤以弘教授に感謝致します。

§ 7. 参考文献

- *1, 情報処理学会編; 電子計算機ハンドブック, 1966.
- *2, 駒宮, 森沢, 土屋; フェイルセーフ論理回路概要, 電気学会大会, 1966-3.
- *3, 三根, 高岡; 非対称故障論理回路を用いた2重系の構成法, 信学会電算代研, 1967-4.
- *4, 土屋; フェイルセーフ論理方式の研究, 電試研究報告, NO. 645
- *5, 渡辺, 浦野; Fail-Safe 論理系の構成理論, 信学会誌, VOL. 52-C, 1969-1.
- *6, 向政; C系 Fail-Safe 論理の数学的構成について, 信学会誌, VOL. 52-C, 1969-12.

§8. 附 録

本報告では定理の証明はすべて省略したが、定理3についてのみこゝで証明を与える。なお、詳しいことは文献**を参照されたい。

必要条件; F が $B-3$ 値論理関数ならば、

$$(i) \quad (a \in V_1^* \Rightarrow F(a) \in V_2)$$

$$(ii) \quad (a \geq b \Rightarrow F(a) \geq F(b)) \quad ||$$

証明) 任意の $B-3$ 値論理関数 F が (i) を満すことは定義より明らか。よ、て (ii) について証明する。

$0, 1, \alpha_i$ が (ii) を満すことは明らか。

$B-3$ 値論理関数 F が (ii) を満すとす。

$\sim$ 順序関係 “ $\geq$ ” の定義より

$$F(a) \geq F(b) \Rightarrow \sim F(a) \geq \sim F(b)$$

であるから、 $\sim F$ も (ii) を満す。

$B-3$ 値論理関数 G, H がそれぞれ (ii) を満すとす。

そのとき、 $G \cdot H$ が (ii) を満すなり、おなわち

$$(a \geq b \Rightarrow (G \cdot H)(a) \geq (G \cdot H)(b))$$

とす。このことは、

** 向敷, 後藤; $B-3$ 値論理関数の必要十分条件,

明治大学工学部研究報告 No. 24.

補助定理 1; F が条件

$$(i) \quad (a \in V_2^n \Rightarrow F(a) \in V_2)$$

$$(ii) \quad (a \geq b \Rightarrow F(a) \geq F(b))$$

を満たせば,

$$F(a) \equiv \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad F(a^*) = \{0, 1\},$$

$$F(a) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad F(a^*) = \{0\},$$

$$F(a) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad F(a^*) = \{1\}$$

である。 $\parallel$

証明) 半順序関係 " $\geq$ " の定義 5, (a^*) の定義 6, $F(a^*)$ の定義より明らか。 $\blacksquare$

定義; $(a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in V_3^n$ に対する単項式とは

$$x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i} \cdots x_n^{a_n}$$

$$\text{ただし} \quad a_i \equiv 0 \text{ のとき} \quad x_i^{a_i} \equiv \sim x_i$$

$$a_i \equiv 1 \text{ のとき} \quad x_i^{a_i} \equiv x_i$$

$$a_i \equiv \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad x_i^{a_i} \equiv 1$$

で表わされる B -3 値論理関数をいう。 $\parallel$

定義; $(a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$ に対する

補助単項式とは

$$x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i} \cdots x_n^{a_n}$$

$$\text{ただし} \quad a_i \equiv 0 \text{ のとき} \quad x_i^{a_i} \equiv \sim x_i$$

$$a_i \equiv 1 \text{ のとき} \quad x_i^{a_i} \equiv x_i$$

$a_i \equiv \frac{1}{2}$ のとき $\neg x_i, x_i$

で表わされる B-3 値論理関数をいう。||

補助定理 2; 任意の $\mathcal{L} \in V_3^n$ に対する単項式を $M_{\mathcal{L}}$ とするとき,

$$(a = \mathcal{L}) \iff M_{\mathcal{L}}(a) \equiv 1,$$

$$(a > \mathcal{L}) \Rightarrow M_{\mathcal{L}}(a) \equiv \frac{1}{2},$$

$$M_{\mathcal{L}}(a) \equiv 0 \iff M_{\mathcal{L}}(a^*) = \{0\} \quad ||$$

証明) 定義より明らか。||

補助定理 3; 任意の $\mathcal{L} \in V_3^n - V_2^n$ に対する補助単項式を $M'_{\mathcal{L}}$ とするとき,

$$(a \geq \mathcal{L}) \iff M'_{\mathcal{L}}(a) \equiv \frac{1}{2},$$

$$(a \neq \mathcal{L}) \iff M'_{\mathcal{L}}(a) \equiv 0 \quad ||$$

証明) 定義より明らか。||

十分条件; $F: V_3^n \rightarrow V_3$ が

$$(i) \quad (a \in V_2^n) \Rightarrow F(a) \in V_2,$$

$$(ii) \quad (a \geq \mathcal{L}) \Rightarrow F(a) \geq F(\mathcal{L})$$

ならば, F は B-3 値論理関数である。||

証明) F が (i), (ii) を満たすとき, F を表現する一つの B-3 値論理関数 F_B を構成するアルゴリズムを考へる。

まず, V_3^n の元で $\frac{1}{2}$ が i 個存在する元の集合を A^i

で表わすことにする。

アルゴリズム 4.1;

1. $i = n$, $V = V_3^n$, $f' \equiv 0$ とする。
2. $(a \in A^i \cap V$ で $F(a) \equiv 1$ なるすべての元 a に対する単項式を求め, f' に $OR(V)$ で結合する。
3. 上の条件を満たす $(a$ に含まれるすべての元 (すなわち, $a \geq b$ なるすべての b)) を V から消去したものを新しい V とする。
4. $i = 0$ なら $f_1 \equiv f'$ としてこのアルゴリズムを終る。それ以外の場合は $i = i - 1$ として 2へ。

アルゴリズム 4.2;

1. $i = 1$, $V = V_3^n$, $f' \equiv 0$ とする。
2. $(a \in A^i \cap V$ で $F(a^*) \equiv \{0\}$ かつ $F(a) \equiv \frac{1}{2}$ なるすべての元 a に対する補助単項式を求め, f' に $OR(V)$ で結合する。
3. 上の条件を満たす $(a$ を含むすべての元 (すなわち, $a \leq b$ なるすべての b)) を V から消去したものを新しい V とする。
4. $i = n$ のとき $f_2 \equiv f'$ としてこのアルゴリズムを終る。それ以外の場合は $i = i + 1$ として 2へ。

以上のアルゴリズムの有効性は、 V_3^n の元が有限個であるから明らかである。このアルゴリズム 1, 2 で求めた f_1, f_2 に対して、B-3 値論理関数

$$F_B \equiv f_1 \vee f_2$$

は、与えられた関数 F を表現している。以下これを示す。

まず、 $(a \in V_2^n \Rightarrow F(a) \equiv F_B(a))$ を示す。

$(a \in V_2^n \Rightarrow f_2(a) \equiv 0)$ は補助定理 3 より明らか。

また、 $(a \in V_2^n \text{ で } F(a) \equiv 1 \text{ とする})$ 。

このとき、 $(a \leq b \text{ なる } b \text{ に対する単項式が } f_1 \text{ に必$
 が含まれているから ^{補助定理} ~~$F_B(a)$~~ 2 より $F_B(a) \equiv 1$ 。

次に $F_B(a) \equiv 1$ とする。

このとき、 $(a \leq b \text{ なる元 } b \text{ に対する単項式が } f_1 \text{ に含まれている。すなわち } F(b) \equiv 1 \text{ なる } (a \leq b \text{ なる元 } b \text{ が存在する。 } F \text{ は (ii) を満しているから})$

$$(a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \equiv 1$$

すなわち $F(a) \equiv 1$ である。

以上により $F(a) \equiv 1 \Leftrightarrow F_B(a) \equiv 1$ 。

また、 $(a \in V_2^n \text{ ならば (i) より } F(a) \in V_2, \text{ また } F_B \text{ は B-3 値論理関数より } F_B(a) \in V_2)$

以上により $F(a) \equiv 0 \Leftrightarrow F_B(a) \equiv 0$

が導かれて $(a \in V_2^n \Rightarrow F(a) \equiv F_B(a))$ となる。

上のことから $F(a^*) = F_B(a^*)$

が得られる。また、明らかに $F(a^*) = F_B(a^*)$ は

$$\{0, 1\}, \quad \{1\}, \quad \{0\}$$

のいずれか一つを取る。

$F(a^*) = \{0, 1\}$ とする。

このとき補助定理 1 より $F(a) \equiv \frac{1}{2}$ 。また、 F_B は B -
3 値論理関数で条件 (i), (ii) を満たしているから同様に $F_B(a)$
 $\equiv \frac{1}{2}$ 。すなわち $F(a) \equiv F_B(a)$ 。

$F(a^*) = \{1\}$ とする。

このとき、 f_2 には $a \geq b$ なる元 b に対する補助単
項式は存在しないから補助定理 3 より $f_2(a) \equiv 0$ 。

また、条件 (iv) より $F(a) \neq 0$ 。同様に $F_B(a) \neq 0$ 。

$F(a) \equiv \frac{1}{2}$ とする。

このとき、 $(a > b)$ で $F(b) \equiv 1$ なる元 b が存
在して、かつ、 $(a \leq c)$ で $F(c) \equiv 1$ なる元 c は
存在しない。すなわち、 f_1 には上のような b に対す
る単項式が存在して、 c に対する単項式は存在しないか
ら、補助定理 2 より $f_1(a) \equiv \frac{1}{2}$ 。

$F(a) \equiv 1$ とする。

このとき、 $(a \leq b)$ で $F(b) \equiv 1$ なる元 b が必ず存在
する。すなわち、 f_1 には上のような b に対する単項

式が存在するから補助定理2より $f_1(a) \equiv 1$ 。

以上により $F(a) \equiv F_B(a)$ 。

$F(a^*) = \{0\}$ とする。

このとき, 補助定理2より $f_1(a) \equiv 0$ は明らか。

また, 条件(iii)より $F(a) \neq 1$ 。同様に $F_B(a) \neq 1$ 。

$F(a) \equiv \frac{1}{2}$ とする。

このとき, $(a \geq b)$ で $F(b) \equiv \frac{1}{2}$ なる元 b が必ず存在する。すなわち, f_2 には上のような b に対する補助単項式が存在するから, 補助定理3より $f_2(a) \equiv \frac{1}{2}$ 。

$F(a) \equiv 0$ とする。

このとき, $(a \geq b)$ で $F(b) \equiv \frac{1}{2}$ なる元 b は存在しない。すなわち, f_2 には上のような b に対する補助単項式は存在しないから補助定理3より $f_2(a) \equiv 0$ 。

以上により $F(a) \equiv F_B(a)$ 。

故に, すべての $(a \in V_3^n)$ に対して

$$F(a) \equiv F_B(a)$$

すなわち, F_B は F を表現している B -3 値論理関数である。■

なお, 定義7の P 形論理関数を上で述べたアルゴリズムに従って求めると, いわゆる prime-implicant を用

といわれる表紙が得られる。